Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t)=at^2\ e^{-bt}$; donde $t\in[0,+\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a,\ b\in\mathbb{R}^+$.
a) Determina los valores de *a* y *b* para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto $(2,\ 8e^{-2})$. **(1,5 puntos)**
b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** Nota: A largo plazo se entiende como que $t\to+\infty$.
2A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{x-1} & si \quad x<0\\ bx-1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x)dx=4$. **(1 punto)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x-\ y-\ z=1\\ x+2y+\ z=-4\\ x-4y-3z=a^2-3\end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = –3*. **(1 punto)**

4A. Dados los puntos *A(–1,3,0), B(2,0,–1)* y la recta *r* intersección de los planos $\alpha\equiv x-2y-6=0$ y $\beta\equiv 2y+z=0$
a) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *r*. **(0,75 puntos)**
b) Encuentra razonadamente el punto de la recta *r* cuya distancia al punto *A* sea mínima**. (0,75 puntos)**
c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por *A* y *B* sea paralelo a la recta *r*. **(1 punto)**
5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**
b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:
b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**
b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Determina razonadamente el punto *(x, y)* de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa $x = -1/2$. **(1 punto)**
2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 + 2}{x^2 - x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros *a* y *b* tales que $A^2 = aA + bI$. **(1,25 puntos)**
b) Calcula razonadamente todas las matrices *X* que verifican que $(A - X)(A + X) = A^2 - X^2$.
(1,25 puntos)
4B. Dados los puntos *A(–1,2,0), B(1,0,–4)* y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \quad \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un punto *C* de la recta *r* que forme con *A* y *B* un triángulo isósceles con el lado desigual en *AB*. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta *r* y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto *A*. **(1 punto)**
5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.
a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**
a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**
b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES

PROPUESTA A

1A. Después de la administración por vía oral de un fármaco, la concentración de este en sangre sigue el modelo: $C(t)=at^2\ e^{-bt}$; donde $t\in[0,+\infty)$ es el tiempo en horas transcurridas desde la administración y $a,\ b\in\mathbb{R}^+$.

a) Determina los valores de *a* y *b* para que el modelo de la concentración tenga un extremo relativo en el punto *(2, 8e*$^{-2}$*)*. **(1,5 puntos)**

b) Según el modelo anterior, ¿a qué valor tiende la concentración de este fármaco a largo plazo? Interpreta el resultado. **(1 punto)** Nota: A largo plazo se entiende como que $t\to+\infty$.

a)

Si $C(t)$ tiene un extremo relativo en el punto *(2, 8e*$^{-2}$*)* su derivada se anula para $t=2$.

$$C(t)=at^2\ e^{-bt}\Rightarrow C'(t)=2at\ e^{-bt}-b\cdot at^2\ e^{-bt}=ate^{-bt}(2-bt)$$

$$\left.\begin{array}{r}C'(t)=ate^{-bt}(2-bt)\\ C'(2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot 2\cdot e^{-2b}(2-2b)=0\Rightarrow\begin{cases}2b-2=0\Rightarrow\boxed{b=1}\\ ó\\ a=0\ \text{¡No es posible! pues a}\in\mathbb{R}^+\end{cases}$$

Si $C(t)=at^2\ e^{-t}$ tiene un extremo relativo en el punto *(2, 8e*$^{-2}$*)* su gráfica debe pasar por dicho punto, es decir, $C(2)=8\ e^{-2}$.

$$\left.\begin{array}{l}C(t)=at^2\ e^{-t}\\ C(2)=8\ e^{-2}\end{array}\right\}\Rightarrow a\cdot 2^2\ e^{-2}=8\ e^{-2}\Rightarrow 4a\cdot e^{-2}=8\ e^{-2}\Rightarrow\boxed{a=2}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = 1*.

b)

$$\lim_{t\to+\infty}C(t)=\lim_{t\to+\infty}2t^2\ e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2t^2}{e^t}=\frac{\infty}{\infty}=\left\{\begin{array}{l}\text{Indeterminación}\\ \text{Aplico L´Hôpital}\end{array}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{4t}{e^t}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Indeterminación}\\ \text{Aplico L´Hôpital}\end{array}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{4}{e^t}=\frac{4}{\infty}=0$$

La concentración del fármaco en la sangre tiende a ser nula.

2A. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+a}{x-1} & si \quad x<0\\ bx-1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

a) Calcula razonadamente los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea derivable en todo $\mathbb{R}$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula razonadamente el parámetro b para que $\int_1^2 f(x)dx=4$. **(1 punto)**

a) Si la función es derivable, debe ser continua y para ello debe serlo en $x = 0$. Deben ser iguales los límites laterales en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2+a}{x-1}=\dfrac{0^2+a}{0-1}=-a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} bx-1=-1\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow -a=-1\Rightarrow \boxed{a=1}$$

Si la función es derivable, debe serlo en $x = 0$ y las derivadas laterales deben coincidir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{x-1} & si \quad x<0\\ bx-1 & si \quad x\geq 0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\cdot(bx-1)-1\cdot(x^2+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{2bx^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} & si \quad x<0\\ b \quad si \quad x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=\dfrac{2b\cdot 0^2-0-0^2-1}{(0-1)^2}=-1\\ f'(0^+)=b\\ f'(0^-)=f'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

b) La integral definida es en el intervalo (1,2), en dicho intervalo la función es $f(x)=bx-1$ **.**

$$\int_1^2 f(x)dx=4\Rightarrow \int_1^2 bx-1dx=4\Rightarrow \left[b\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=4\Rightarrow \left[b\frac{2^2}{2}-2\right]-\left[b\frac{1^2}{2}-1\right]=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b-2-\frac{b}{2}+1=4\Rightarrow 4b-4-b+2=8\Rightarrow 3b=10\Rightarrow \boxed{b=\frac{10}{3}}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x + 2y + z = -4 \\ x - 4y - 3z = a^2 - 3 \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = -3$. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 1 + 4 + 2 - 3 + 4 = 10 - 10 = 0 .$$

El rango de A no es 3.

¿El rango de A es 2?

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª y comprobamos el valor de su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \neq 0$$

El rango de A es siempre 2.

Averiguamos el rango de la matriz ampliada A/B.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & -3 & a^2 - 3 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de eliminar la columna 1ª y averiguamos cuando su determinante se anula.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -4 & -3 & a^2 - 3 \end{vmatrix} = -a^2 + 3 - 16 - 6 + 4 + 2a^2 - 6 + 12 = a^2 - 9$$

$$a^2 - 9 = 0 \Rightarrow a = \sqrt{9} = \pm 3$$

Se nos plantean tres casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -3 \text{ y } a \neq 3$

En este caso el determinante anterior es no nulo y por tanto el rango de A/B es 3. Como el rango de A es 2 el sistema es INCOMPATIBLE.

CASO 2. $a = -3$

Vemos como queda el sistema y lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+2y+\ \ z=-4 \\ x-4y-3z=9-3=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{a} - \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =-4 \\ -x & +y & +z & =-1 \\ \hline & 3y & +2z & =-5 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 1^{a} \\ \begin{array}{rrrl} x & -4y & -3z & =6 \\ -x & +y & +z & =-1 \\ \hline & -3y & -2z & =5 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\ \ y-\ \ z=1 \\ 3y+2z=-5 \\ -3y-2z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{a} + \text{Ecuación } 2^{a} \\ \begin{array}{rrl} -3y & -2z & =5 \\ 3y & +2z & =-5 \\ \hline & 0 & =0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-\ \ y-\ \ z=1 \\ 3y+2z=-5 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ 3y+2z=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y-z=1 \\ 3y=-2z-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-y-z=1 \\ \boxed{y=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}z} \end{array}\right\} \Rightarrow x-\left(-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}z\right)-z=1 \Rightarrow x+\frac{5}{3}+\frac{2}{3}z-z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+5+2z-3z=3 \Rightarrow 3x=-2+z \Rightarrow \boxed{x=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a=3$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+2y+\ \ z=-4 \\ x-4y-3z=9-3=6 \end{array}\right\}$$

Es igual que en el caso anterior y por tanto también es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

b) Para el valor *a* = *–3* el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x-\ \ y-\ \ z=1 \\ x+2y+\ \ z=-4 \\ x-4y-3z=9-3=6 \end{array}\right\}$$

Está resuelto en el apartado anterior y sus soluciones son:

$$x=-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}t; \quad y=-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}t; \quad z=t$$

4A. Dados los puntos *A(–1,3,0)*, *B(2,0,–1)* y la recta *r* intersección de los planos $\alpha \equiv x-2y-6=0$ y $\beta \equiv 2y+z=0$

a) Calcula la distancia del punto *A* a la recta *r*. **(0,75 puntos)**

b) Encuentra razonadamente el punto de la recta *r* cuya distancia al punto *A* sea mínima**. (0,75 puntos)**

c) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano que pasando por *A* y *B* sea paralelo a la recta *r*. **(1 punto)**

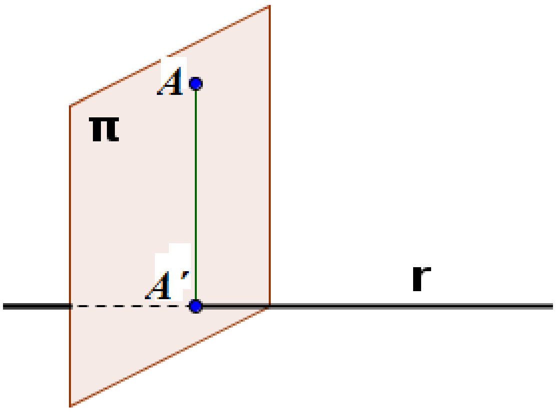
a) Hallamos la ecuación de la recta *r* intersección de los planos.

$$r \equiv \left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x-2y-6=0 \\ \beta \equiv 2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y+6 \\ z=-2y \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l} x=6+2t \\ y=t \\ z=-2t \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left\{\begin{array}{l} P(6,0,0)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=(2,1,-2) \end{array}\right.$$

Para hallar la distancia del punto A a la recta *r* determinamos el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto A.

Luego determinamos el punto A´ de corte de recta *r* y plano π.

La distancia de punto A a la recta *r* es el módulo del vector $\overrightarrow{AA'}$.



El plano **π** tiene como vector normal el director de la recta *r*.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \left\{\begin{array}{l} P(6,0,0)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=(2,1,-2) \end{array}\right. \\ A(-1,3,0)\in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \left\{\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,-2) \\ A(-1,3,0)\in \pi \end{array}\right. \Rightarrow \pi \equiv \left\{\begin{array}{l} 2x+y-2z+D=0 \\ A(-1,3,0)\in \pi \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-1)+3-2\cdot 0+D=0 \Rightarrow -2+3+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow \pi \equiv 2x+y-2z-1=0$$

Hallamos el punto *A´* de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+y-2z-1=0 \\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x=6+2t \\ y=t \\ z=-2t \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(6+2t)+t-2(-2t)-1=0 \Rightarrow 12+4t+t+4t-1=0 \Rightarrow 9t+11=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=-\frac{11}{9}\Rightarrow\begin{cases}x=6+2\left(-\frac{11}{9}\right)=6-\frac{22}{9}=\frac{32}{9}\\ y=-\frac{11}{9}\\ z=-2\left(-\frac{11}{9}\right)=\frac{22}{9}\end{cases}\Rightarrow A'\left(\frac{32}{9},\frac{-11}{9},\frac{22}{9}\right)$$

Hallamos la distancia pedida.

$$\left.\begin{array}{l}A(-1,3,0)\\ A'\left(\frac{32}{9},\frac{-11}{9},\frac{22}{9}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\left(\frac{32}{9},\frac{-11}{9},\frac{22}{9}\right)-(-1,3,0)=\left(\frac{32}{9}+1,\frac{-11}{9}-3,\frac{22}{9}\right)=\left(\frac{41}{9},\frac{-38}{9},\frac{22}{9}\right)$$

$$\text{Distancia}(A,r)=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=\sqrt{\left(\frac{41}{9}\right)^2+\left(\frac{-38}{9}\right)^2+\left(\frac{22}{9}\right)^2}=\sqrt{\frac{3609}{81}}=\boxed{\frac{\sqrt{401}}{3}\approx 6.67\ u}$$

b) El punto que nos piden hallar es el punto A´ determinado en el apartado anterior.

$$A'\left(\frac{32}{9},\frac{-11}{9},\frac{22}{9}\right)$$

c) El plano π´ pedido tiene como vector director el director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(2,1,-2)$ pues es paralelo a la misma. El otro vector director del plano será el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(2,1,-2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,0,-1)-(-1,3,0)=(3,-3,-1)\\ A(-1,3,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi'\equiv\begin{vmatrix}x+1 & y-3 & z\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & -3 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-1-6y+18-6z-3z+2y-6-6x-6=0\Rightarrow \boxed{\pi'\equiv -7x-4y-9z+5=0}$$

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores A, B y C. A suministra el 20 %, B el 10% y C el resto. De las lámparas de A salen defectuosas el 5 %, de las de B el 4% y de las de C el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) No salgan defectuosas. **(0,75 puntos)**

a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por B. **(0,5 puntos)**

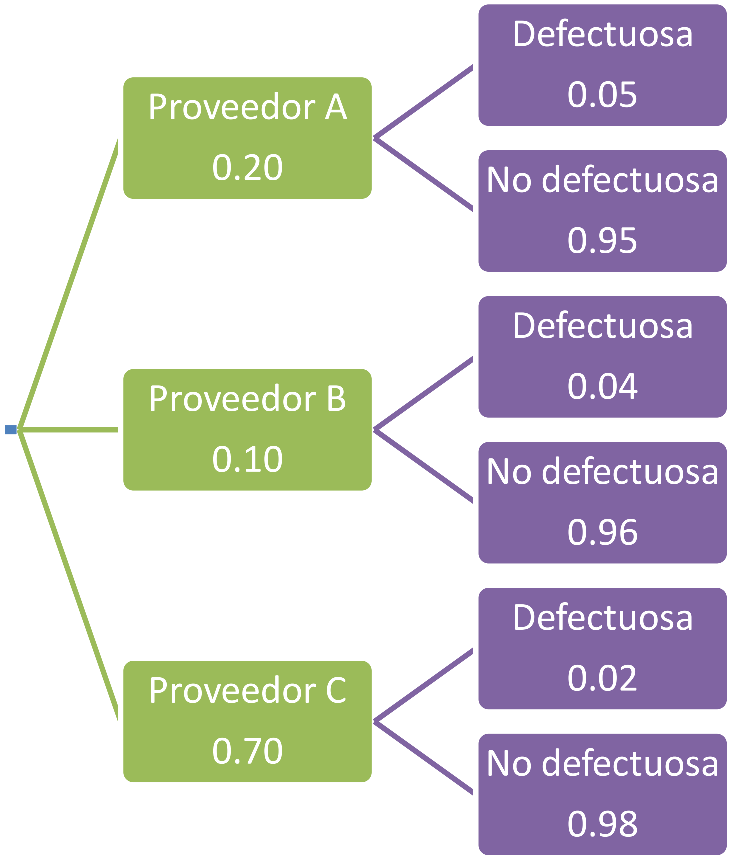
b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:

b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. **(0,75 puntos)**

b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. **(0,5 puntos)**

a)

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación y las distintas probabilidades.



a1)

$$P(\text{No defectuosa}) = 0.20 \cdot 0.95 + 0.10 \cdot 0.96 + 0.70 \cdot 0.98 = \boxed{0.972}$$

a2)

$$P(\text{Proveedor B / Es defectuosa}) = \frac{P(\text{Proveedor B } \cap \text{ Es defectuosa})}{P(\text{Es defectuosa})} =$$

$$= \frac{0.10 \cdot 0.04}{1 - P(\text{No es defectuosa})} = \frac{0.0040}{1 - 0.972} = \frac{0.0040}{0.0280} = \frac{1}{7} = \boxed{0.142}$$

b) X = Número de aciertos en 5 preguntas.

b1) Es una variable aleatoria binomial pues se responde al azar y la probabilidad de acierto en cada pregunta es la misma. Y son cinco repeticiones.

$$\left.\begin{array}{r} n=5 \\ p=P(\text{Acertar en una pregunta})=\dfrac{1}{2}=0.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X=\text{Número de aciertos} \\ X=B(5,0.5) \end{array}\right\}$$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.3125+0.1563+0.0313=\boxed{0.5001}$$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	[illegible]
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1563
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0313

b2) Es una variable aleatoria binomial pues se responde al azar y la probabilidad de acierto en cada pregunta es la misma. Y son cinco repeticiones.

$$\left.\begin{array}{r} n=5 \\ p=P(\text{Acertar en una pregunta})=\dfrac{1}{4}=0.25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X=\text{Número de aciertos} \\ X=B(5,0.25) \end{array}\right\}$$

$$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.0879+0.0146+0.0010=\boxed{0.1035}$$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	[illegible]	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Determina razonadamente el punto *(x, y)* de la parábola $y = x^2 + 1$ en el que la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta normal a la gráfica de la parábola dada en el punto de abscisa *x = –1/2*. **(1 punto)**

a) La expresión de la suma de las coordenadas de los puntos de la gráfica es:

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow S(x) = x + y = x + x^2 + 1 = x^2 + x + 1$$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos de la función *S(x)*.

$$S(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow S'(x) = 2x + 1$$
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} = -0.5$$

Comprobamos si es un mínimo o un máximo utilizando la derivada segunda.

$$S'(x) = 2x + 1 \Rightarrow S''(x) = 2 \Rightarrow S''(-0.5) = 2 > 0$$

Como la derivada segunda es positiva, en el valor *x = –0.5* hay un mínimo relativo.
Sustituimos en la función y hallamos las coordenadas del punto.

$$\left.\begin{array}{l} x = -0.5 \\ y = x^2 + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = (-0.5)^2 + 1 = 1.25$$

El punto $(-0.5,\ 1.25)$ es el punto de la gráfica de la parábola donde la suma de sus coordenadas alcanza su mínimo valor.

b) La recta normal a la gráfica en *x = –1/2* tiene la ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} y - y\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{y'(-1/2)}\left(x - \left(\frac{-1}{2}\right)\right) \\ y = x^2 + 1 \to y\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1 = 1.25 \\ y' = 2x \to y'(-1/2) = -\frac{2}{2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1.25 = \frac{-1}{-1}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = x + 0.5 + 1.25$$

.

$$\boxed{y = x + 1.75}$$

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}dx$ b) $\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}dx$ **(1,25 puntos por integral)**

a)

$$\int \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x}dx = \dots$$

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3 & -x^2 & +2 & x^2-x \\ -2x^3 & +2x^2 & & 2x+1 \\ \hline & x^2 & +2 & \\ & -x^2 & +x & \\ \hline & & x+2 & \end{array} \Rightarrow \frac{2x^3-x^2+2}{x^2-x} = 2x+1+\frac{x+2}{x^2-x}$$

$$\dots = \int 2x+1+\frac{x+2}{x^2-x}dx = \int 2x+1dx + \int \frac{x+2}{x^2-x}dx = x^2+x+\int \frac{x+2}{x^2-x}dx = \dots$$

$$x^2-x = x(x-1)$$

$$\frac{x+2}{x^2-x} = \frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{x+2}{x^2-x} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Rightarrow x+2 = A(x-1)+Bx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 2=-A \to A=-2 \\ x=1 \to 3=B \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^2-x} = \frac{-2}{x}+\frac{3}{x-1}$$

$$\dots = x^2+x+\int \frac{-2}{x}+\frac{3}{x-1}dx = x^2+x-2\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{3}{x-1}dx = \boxed{x^2+x-2\ln|x|+3\ln|x-1|+K}$$

b) Calculo primero la integral indefinida y luego aplicamos la regla de Barrow.

$$\int (2x-3)e^{x-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u=2x-3 \to du=2dx \\ dv=e^{x-1}dx \to v=\int e^{x-1}dx = e^{x-1} \end{array} \right\} = (2x-3)e^{x-1} - \int e^{x-1}2dx =$$

$$= 2xe^{x-1}-3e^{x-1}-2\int e^{x-1}dx = 2xe^{x-1}-3e^{x-1}-2e^{x-1} = \boxed{2xe^{x-1}-5e^{x-1}+K}$$

Lo aplico a la integral definida.

$$\int_1^2 (2x-3)e^{x-1}dx = \left[2xe^{x-1}-5e^{x-1}\right]_1^2 = \left[2\cdot 2e^{2-1}-5e^{2-1}\right]-\left[2\cdot 1e^{1-1}-5e^{1-1}\right] = \boxed{-e+3}$$

3B. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) Halla razonadamente dos parámetros a y b tales que $A^2=aA+bI$. **(1,25 puntos)**

b) Calcula razonadamente todas las matrices X que verifican que $(A-X)(A+X)=A^2-X^2$.

(1,25 puntos)

a)

$$A^2=aA+bI \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1+0 & -3-3\\ 0+0 & 0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -3a\\ 0 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -6\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -3a\\ 0 & a+b\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}1=a+b\\ -6=-3a\\ 0=0\\ 1=a+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1=a+b\\ -6=-3a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1=a+b\\ \boxed{a=2}\end{cases} \Rightarrow 1=2+b \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -1$.

b)

$$(A-X)(A+X)=A^2-X^2 \Rightarrow \cancel{A^2}+AX-XA-\cancel{X^2}=\cancel{A^2}-\cancel{X^2}\Rightarrow AX-XA=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AX=XA\Rightarrow \left\{\begin{matrix}A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}a-3c & b-3d\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -3a+b\\ c & -3c+d\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases}a-3c=a\\ b-3d=-3a+b\\ c=c\\ d=-3c+d\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\cancel{a}-3c=\cancel{a}\\ \cancel{b}-3d=-3a+\cancel{b}\\ \cancel{d}=-3c+\cancel{d}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-3c=0\\ -3d=-3a\\ 0=-3c\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}-3c=0\\ -3d=-3a\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\boxed{c=0}\\ \boxed{d=a}\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$$

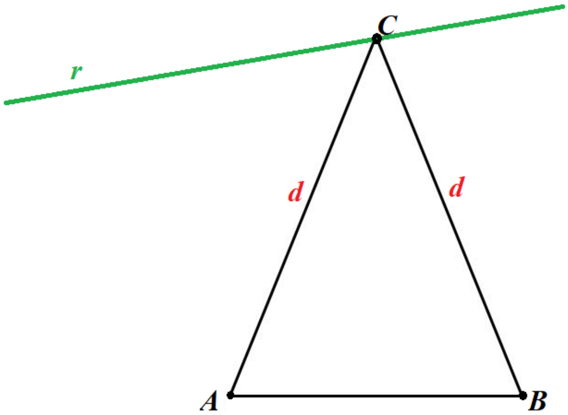
Las matrices que cumplen la condición son $X=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}; \quad a,b\in\mathbb{R}$

4B. Dados los puntos *A(–1,2,0)*, *B(1,0,–4)* y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \quad \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 3+\lambda \end{cases}$$

a) Calcula razonadamente un punto *C* de la recta *r* que forme con *A* y *B* un triángulo isósceles con el lado desigual en *AB*. **(1,5 puntos)**
b) Encuentra razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta perpendicular a la recta *r* y al vector $\overrightarrow{AB}$ y que pase por el punto *A*. **(1 punto)**

a) Observamos el dibujo para iniciar la búsqueda del punto C.



El punto C pertenece a la recta r y además la distancia de A a C es igual que la distancia de C a B.

$$\left. \begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \\ C \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow C(1-\lambda, \lambda, 3+\lambda)$$

$$\left. \begin{array}{r} D(C,A) = D(C,B) \\ A(-1,2,0) \\ B(1,0,-4) \\ C(1-\lambda,\lambda,3+\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \\ \overrightarrow{AC} = (1-\lambda,\lambda,3+\lambda)-(-1,2,0) = (2-\lambda,\lambda-2,3+\lambda) \\ \overrightarrow{BC} = (1-\lambda,\lambda,3+\lambda)-(1,0,-4) = (-\lambda,\lambda,7+\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2-\lambda)^2+(\lambda-2)^2+(3+\lambda)^2} = \sqrt{(-\lambda)^2+(\lambda)^2+(7+\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)^2+(\lambda-2)^2+(3+\lambda)^2 = (-\lambda)^2+(\lambda)^2+(7+\lambda)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+\cancel{\lambda^2}-4\lambda+\cancel{\lambda^2}+4-4\lambda+9+\cancel{\lambda^2}+6\lambda = \cancel{\lambda^2}+\cancel{\lambda^2}+49+\cancel{\lambda^2}+14\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 17-2\lambda = 49+14\lambda \Rightarrow -16\lambda = 32 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \boxed{C(1-\lambda,\lambda,3+\lambda) = (3,-2,1)}$$

b) La recta *s* perpendicular a la recta *r* y al vector $\overrightarrow{AB}$ tiene como vector director el producto vectorial del vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = \quad \lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,1) \\ \mathrm{P_r}(1,0,3) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,0,-4) - (-1,2,0) = (2,-2,-4) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\overrightarrow{v_s} = -2i + 4j + 2k - 2k - 2j + 4i = 2i + 2j = (2,2,0)$$

Además la recta *s* pasa por el punto *A(–1,2,0)*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = (2,2,0) \\ A(-1,2,0) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 2+2\lambda \\ z = 0 \end{cases}}$$

5B. a) En una clase el 80% aprueba la asignatura de Biología, el 70% aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60% aprueba Biología y Matemáticas.

a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? **(0,75 puntos)**

a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? **(0,5 puntos)**

b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:

b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información necesaria para resolver el problema planteado.
Establecemos que son 100 alumnos y trabajamos con valores absolutos.

	Aprueba Biología	No aprueba Biología	
Aprueba Matemáticas	**60**		**70**
No aprueba Matemáticas			
	80		**100**

Completamos la tabla teniendo en cuenta que la suma de las dos primeras celdas de cada fila o columna deben dar el resultado total que aparece a la derecha o en la parte inferior.

	Aprueba Biología	No aprueba Biología	
Aprueba Matemáticas	**60**	**10**	**70**
No aprueba Matemáticas	**20**	**10**	**30**
	80	**20**	**100**

a1) Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.

Los casos posibles son 100 y los favorables son los que aprueban matemáticas y biología más los que aprueban sólo matemáticas más los que aprueban sólo biología.

$$P(\text{Apruebe alguna de las asignaturas}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{60+20+10}{100} = \boxed{0.9}$$

a2) Aplicamos la regla de Laplace y obtenemos la probabilidad pedida.
Tenemos en cuenta que los casos posibles ya no son 100 sino 80 que son los que aprueban Biología. Y de todos estos los que aprueban matemáticas son solo 60.

$$P(\text{Apruebe Matemáticas / Aprueba Biología}) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}} = \frac{60}{80} = \boxed{0.75}$$

b) X = Cantidad de líquido dispensado.

Varianza = $\sigma^2 \rightarrow 4 = \sigma^2 \rightarrow \sigma = 2$. Sabemos que la media es 20 y la desviación típica es 2.

$X = N(25, 2)$

b1)

$$P(22 < X < 28) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{22-25}{2} < \frac{X-25}{2} < \frac{28-25}{2}\right) = P(-1.5 < Z < 1.5) =$$

$$= P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z > 1.5) = P(Z < 1.5) - [1 - P(Z < 1.5)] =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla de la N(0, 1)}\} = \ldots$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

$$\ldots = 0.9332 - [1 - 0.9332] = \boxed{0.8664}$$

b2) Para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 % siendo el vaso de "a" cl debe cumplirse que *P(X > a) < 0.025.*

Averiguamos cuando *P(X > a) = 0.025*

$$P(X > a) = 0.025 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X-25}{2} > \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z > \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) = 0.025 \Rightarrow 1 - 0.025 = P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{a-25}{2}\right) = 0.975 \Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow \ldots$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

$$\frac{a-25}{2} = 1.96 \Rightarrow a = 25 + 2 \cdot 1.96 = 28.92$$

Para que la probabilidad de derramarse el líquido sea inferior al 2,5% el vaso debe de ser, al menos, de 29 cl.