Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x)=x^{15}+x+1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando *x* recorre toda la recta real. **(1 punto)**

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x\,dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$ **(1,25 puntos por integral)**

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-az=4 \\ x+ay+\quad z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor *a = 2*. **(1 punto)**

4A. Dado el plano $\alpha\equiv 4x+2y+4z-15=0$ y el punto *A(2,–3,1)*
a) Calcula la distancia del punto *A* al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto *A* al plano α. **(1,5 puntos)**

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.
a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**
a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**
b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea *X* la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".
b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**
b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

UCLM

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$. **(1 punto)**

2B. Dadas las funciones $f(x)=2xe^{-x}$ y $g(x)=x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**.

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ **(1 punto)**

b) Para $a = 2$ calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**
c) Para $a = 0$ calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:
a) Determina el valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**
b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**
c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto *P(2, 0, 2)* y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

5B. a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**
b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.
b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**
b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

SOLUCIONES

PROPUESTA A

1A. a) Enuncia el teorema de Bolzano y justifica razonadamente que la gráfica de la función $f(x)=x^{15}+x+1$ corta al eje OX al menos una vez en el intervalo [-1,1]. **(1,5 puntos)**
b) Calcula razonadamente el número exacto de puntos de corte con el eje *OX* cuando *x* recorre toda la recta real. **(1 punto)**

a) El T. de Bolzano dice que si una función es continua en (a, b) y el signo de *f(a)* es distinto del signo de *f(b)* entonces existe, al menos, un punto $c \in (a,b)$ tal que *f(c)= 0.*

La función $f(x)=x^{15}+x+1$ es un polinomio, por tanto continua, y en el intervalo [-1,1] cambia de signo.

$$f(x)=x^{15}+x+1 \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=(-1)^{15}-1+1=-1<0 \\ f(1)=1^{15}+1+1=3>0 \end{cases}$$

Cumple las hipótesis del teorema, luego existe, al menos un punto $c \in (-1,1)$ donde *f(x)* se anula.

b) Para que existan más puntos donde la función se anule debe de tener algún máximo o mínimo. Determinemos si los tiene.

$$f(x)=x^{15}+x+1 \Rightarrow f'(x)=15x^{14}+1$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 15x^{14}+1=0 \Rightarrow 15x^{14}=-1 \Rightarrow x^{14}=-\frac{1}{15} \Rightarrow x=\sqrt[14]{-\frac{1}{15}}=\textit{No existe}$$

No existe ningún punto crítico y la función siempre crece, pues su derivada $f'(x)=15x^{14}+1$ es siempre positiva (exponente par).
Solo corta el eje OX en 1 punto $c \in (-1,1)$.

OTRA FORMA DE DEMOSTRARLO.
Podemos aplicar el teorema de Rolle:
Sea *f(x)* una función que es **continua** en [c, d] y **derivable** en (c, d) y que además cumple que $f(c)=f(d)$. Entonces existe algún punto $e \in (c,d)$ tal que *f ´ (e) = 0.*

Si existiese otro punto *x = d* donde la función se anula tendríamos un intervalo (c, d) donde la función es continua y derivable y además $f(c)=f(d)=0$. Aplicando el teorema de Rolle existe algún punto $e \in (c,d)$ tal que *f ´ (e) = 0.* Y hemos visto que la derivada nunca se anula.
Por lo que la hipotesis de partida es falsa y no existe ningun punto más donde la función se anula.

2A. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x dx$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx$ **(1,25 puntos por integral)**

a) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int\left(x^2-1\right)\cos x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=x^2-1\rightarrow du=2xdx\\ dv=\cos x dx\rightarrow v=\int\cos x dx=senx\end{array}\right\}=\left(x^2-1\right)senx-\int senx\cdot 2xdx=$$

$$=\left(x^2-1\right)senx-2\int xsenxdx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=senxdx\rightarrow v=\int senxdx=-\cos x\end{array}\right\}=$$

$$=\left(x^2-1\right)senx-2\left[\left(x\left(-\cos x\right)\right)-\int-\cos x dx\right]=\left(x^2-1\right)senx-2\left[-x\cos x+\int\cos x dx\right]=$$

$$=\left(x^2-1\right)senx-2\left[-x\cos x+senx\right]=x^2senx-senx+2x\cos x-2senx=\boxed{x^2senx-3senx+2x\cos x}$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\pi}\left(x^2-1\right)\cos x dx=\left[x^2senx-3senx+2x\cos x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\left[\pi^2sen\pi-3sen\pi+2\pi\cos\pi\right]-\left[0^2sen0-3sen0+2\cdot 0\cdot\cos 0\right]=\boxed{-2\pi}$$

b)

$$\int\frac{e^x}{e^{2x}+e^x-2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ e^x=t\Rightarrow e^{2x}=t^2\\ e^xdx=dt\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}\end{array}\right\}=\int\frac{\cancel{t}}{t^2+t-2}\frac{dt}{\cancel{t}}=\int\frac{1}{t^2+t-2}dt=\ldots$$

$$t^2+t-2=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{-1+3}{2}=1\\ \frac{-1-3}{2}=-2\end{array}\right.\Rightarrow t^2+t-2=\left(t-1\right)\left(t+2\right)$$

$$\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+2}\Rightarrow\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{A\left(t+2\right)+B\left(t-1\right)}{\left(t-1\right)\left(t+2\right)}\Rightarrow 1=A\left(t+2\right)+B\left(t-1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}t=1\rightarrow 1=3A\rightarrow A=\frac{1}{3}\\ t=-2\rightarrow 1=-3B\rightarrow B=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{1}{t^2+t-2}=\frac{1/3}{t-1}-\frac{1/3}{t+2}$$

$$\ldots=\int\frac{1/3}{t-1}-\frac{1/3}{t+2}dt=\int\frac{1/3}{t-1}dt-\int\frac{1/3}{t+2}dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t-1}dt-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t+2}dt=\frac{1}{3}\ln\left|t-1\right|-\frac{1}{3}\ln\left|t+2\right|=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=e^x\end{array}\right\}=\boxed{\frac{1}{3}\ln\left|e^x-1\right|-\frac{1}{3}\ln\left|e^x+2\right|+K}$$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-az=4 \\ x+ay+\quad z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{array}\right\}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resuélvelo razonadamente para el valor $a = 2$. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

Averiguamos los valores de "a" que anulan el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix}=-5a+3-4a+a^2+15-4=a^2-9a+14$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-9a+14=0 \Rightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot1\cdot14}}{2}=\frac{9\pm5}{2}=\begin{cases} \frac{9+5}{2}=7 \\ \frac{9-5}{2}=2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes posibles.

CASO 1. $a \neq 2 \text{ y } a \neq 7$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (una única solución).

CASO 2. $a=2$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-2z=4 \\ x+2y+\quad z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} x & +2y & +z & =2 \\ -x & -3y & +2z & =-4 \\ \hline & -y & +3z & =-2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 2}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} x & +4y & -5z & =6 \\ -x & -3y & +2z & =-4 \\ \hline & y & -3z & =2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ -y+3z=-2 \\ y-3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} = -\text{Ecuación 2}^{\text{a}} \\ \text{Quitamos la ecuación 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ y-3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ \boxed{y=3z+2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3(3z+2)-2z=4 \Rightarrow x+9z+6-2z=4 \Rightarrow \boxed{x=-7z-2}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones). Las soluciones son: $x=-7t-2;\ y=3t+2;\ z=t$

CASO 3. $a=7$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y-7z=4 \\ x+7y+\quad z=2 \\ x+4y-5z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} x & +7y & +z & =2 \\ -x & -3y & +7z & =-4 \\ \hline & 4y & +8z & =-2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} x & +4y & -5z & =6 \\ -x & -3y & +7z & =-4 \\ \hline & y & +2z & =2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ 4y+8z=-2 \\ y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} -4 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \begin{array}{ccc} 4y & +8z & =-2 \\ -4y & -8z & =-8 \\ \hline & 0 & =-10 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=4 \\ 4y+8z=-2 \\ 0=-10 \end{array}\right\} \text{¡}IMPOSIBLE\text{!}$$

La tercera ecuación del sistema plantea una igualdad imposible, por lo que el sistema es INCOMPATIBLE (sin solución).

b) Para $a=2$ está resuelto el sistema en el apartado anterior y sus soluciones son:

$$x=-7t-2;\ y=3t+2;\ z=t \quad siendo \quad t\in\mathbb{R}$$

4A. Dado el plano $\alpha \equiv 4x+2y+4z-15=0$ y el punto *A(2,–3,1)*
a) Calcula la distancia del punto *A* al plano α. **(1 punto)**
b) Calcula razonadamente el lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al plano α sea igual que la distancia del punto *A* al plano α. **(1,5 puntos)**

a) Utilizamos la fórmula:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \equiv 4x+2y+4z-15=0\\ A(2,-3,1)\end{array}\right\} \Rightarrow d(A,\alpha)=\frac{\left|4(2)+2(-3)+4(1)-15\right|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=\frac{9}{6}=1.5\,u$$

b) Sean los puntos de coordenadas *P(x, y, z)*. Deben cumplir:

$$\left.\begin{array}{r}\alpha \equiv 4x+2y+4z-15=0\\ P(x,y,z)\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\alpha)=1.5 \Rightarrow \frac{\left|4x+2y+4z-15\right|}{\sqrt{4^2+2^2+4^2}}=1.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|4x+2y+4z-15\right|=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+2y+4z-15=9 \Rightarrow 4x+2y+4z-24=0 \Rightarrow \boxed{\beta : 2x+y+2z-12=0} \\ ó \\ 4x+2y+4z-15=-9 \Rightarrow 4x+2y+4z-6=0 \Rightarrow \boxed{\pi : 2x+y+2z-3=0} \end{cases}$$

El lugar geométrico son dos planos paralelos a α situados a 1.5 unidades del plano α. Uno por encima y otro por debajo del plano α.

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3% de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4% de defectuosos y la C produce 800 con un 2% de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. **(0,75 puntos)**

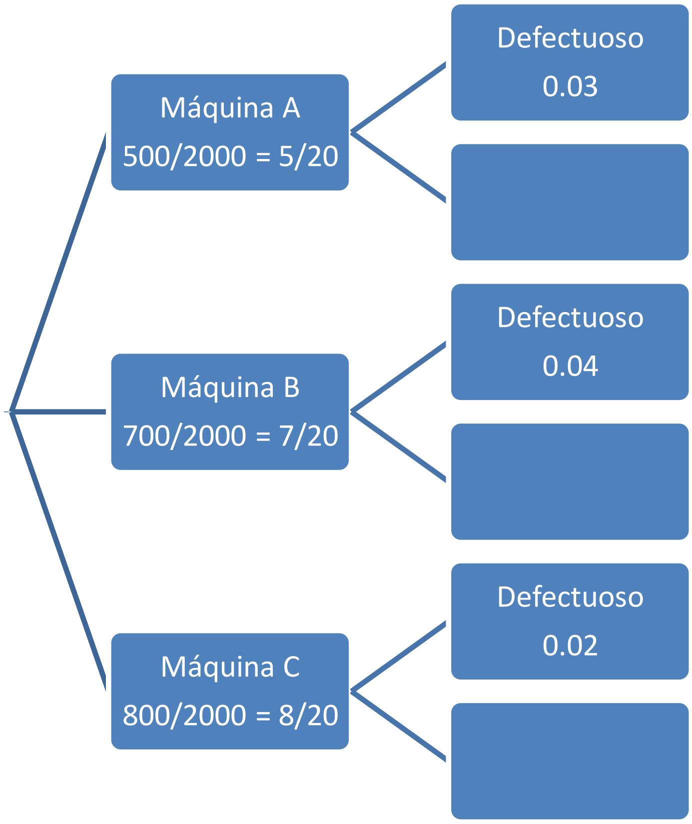
a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. **(0,5 puntos)**

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. **(0,75 puntos)**

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. **(0,5 puntos)**

a) Realizamos un diagrama de árbol para resolver el problema.
Se producen entre las tres máquinas un total de 500 + 700 + 800 = 2000 condensadores.



a1)

$$P(Defectuoso) = P(Máquina\ A)P(Defectuoso/Máquina\ A) +$$
$$+P(Máquina\ B)P(Defectuoso/Máquina\ B) + P(Máquina\ C)P(Defectuoso/Máquina\ C) =$$
$$= \frac{5}{20}\cdot 0.03 + \frac{7}{20}\cdot 0.04 + \frac{8}{20}\cdot 0.02 = \frac{0.15+0.28+0.16}{20} = \frac{0.59}{20} = \boxed{0.0295}$$

a2)

$$P(Máquina\ A/Defectuoso) = \frac{P(Máquina\ A \cap Defectuoso)}{P(Defectuoso)} = \frac{\frac{5}{20}\cdot 0.03}{0.0295} = \frac{15}{59} = \boxed{0.254}$$

b) X = "Número de múltiplos de tres que pueden salir" es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 2/6 = 0.33$.

$X = B(5, 0.33)$

b1) Media = $n \cdot p = 5 \cdot 1/3 = 5/3$.

Desviación típica = $\sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{10}{9}} = 1.054$

b2) $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.0412 + 0.0041 = \boxed{0.0453}$

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	[illegible]	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	[illegible]	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	[illegible]	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Prueba que cualquiera que sea la constante a la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [1,3]. **(0,75 puntos)**
b) Calcula razonadamente un punto del intervalo abierto (1,3) cuya existencia asegura el teorema de Rolle. **(0,75 puntos)**
c) Calcula razonadamente los puntos de la gráfica $f(x)=x^3-5x^2+7x$ donde la recta tangente tenga la misma pendiente que la recta $y=4x+2$. **(1 punto)**

a) Si f es continua en *[a,b]* y derivable en *(a,b)* y *f(a) = f(b)* entonces existe al menos un *c* en *(a,b)* tal que *f ’(c)=0.*

La función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ es un polinomio y por lo tanto es continua y derivable en cualquier intervalo. Además $\begin{cases} f(1)=1^3-5\cdot 1^2+7+a=3+a \\ f(x)=3^3-5\cdot 3^2+7\cdot 3+a=3+a \end{cases} \Rightarrow f(1)=f(3)$, para cualquier valor de *a*.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(x)=x^3-5x^2+7x+a \Rightarrow f\,'(x)=3x^2-10x+7$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-10x+7=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{6}=\frac{10\pm 4}{6}=\begin{cases} \frac{10+4}{6}=\frac{7}{3}=2.33 \\ \frac{10-4}{6}=1 \end{cases}$$

El valor de *x* en el intervalo *(1, 3)* en el cual se anula la derivada que existe según el teorema de Rolle es *x = 7/3*.

c) La pendiente de la recta $y=4x+2$ es 4, por lo que la recta tangente debe tener pendiente 4, es decir, la derivada de la función debe ser 4. Buscamos ese valor.

$$f\,'(x)=4 \Rightarrow 3x^2-10x+7=4 \Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\begin{cases} \frac{10+8}{6}=\boxed{3=x} \\ \frac{10-8}{6}=\boxed{\frac{1}{3}=x} \end{cases}$$

$$x=3 \Rightarrow f(3)=3^3-5x^2+7\cdot 3=3 \Rightarrow \boxed{A(3,3)}$$

$$x=\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-5\left(\frac{1}{3}\right)^2+7\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}-\frac{5}{9}+\frac{7}{3}=\frac{49}{27} \Rightarrow \boxed{B\left(\frac{1}{3},\frac{49}{27}\right)}$$

Los puntos buscados tienen coordenadas $A(3,3)$ y $B\left(\frac{1}{3},\frac{49}{27}\right)$

2B. Dadas las funciones $f(x)=2xe^{-x}$ y $g(x)=x^2e^{-x}$, calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de esas funciones. **(2,5 puntos)**.

Localizamos los puntos de corte de dichas gráficas y el área del recinto será el valor absoluto de la integral definida entre un valor y el otro de la diferencia entre las funciones.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2e^{-x}=2xe^{-x} \Rightarrow x^2e^{-x}-2xe^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}\left(x^2-2x\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \Rightarrow \text{¡}IMPOSIBLE\text{!} \\ ó \\ x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ó \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte son $x=0$ y $x=2$, por lo que el área es $Área=\left|\int_0^2 2xe^{-x}-x^2e^{-x}dx\right|$

Calculamos la integral indefinida primero.

$$\int 2xe^{-x}-x^2e^{-x}dx=\int\left(2x-x^2\right)e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=2x-x^2 \rightarrow du=(2-2x)dx \\ dv=e^{-x}dx \rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=$$

$$=\left(2x-x^2\right)\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}(2-2x)dx=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}+\int 2e^{-x}-2xe^{-x}dx=$$

$$=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}+\int 2e^{-x}dx-\int 2xe^{-x}dx=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}-2e^{-x}-\int 2xe^{-x}dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=2x \rightarrow du=2dx \\ dv=e^{-x}dx \rightarrow v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}-2e^{-x}-\left[(2x)\left(-e^{-x}\right)-\int\left(-e^{-x}\right)2dx\right]=$$

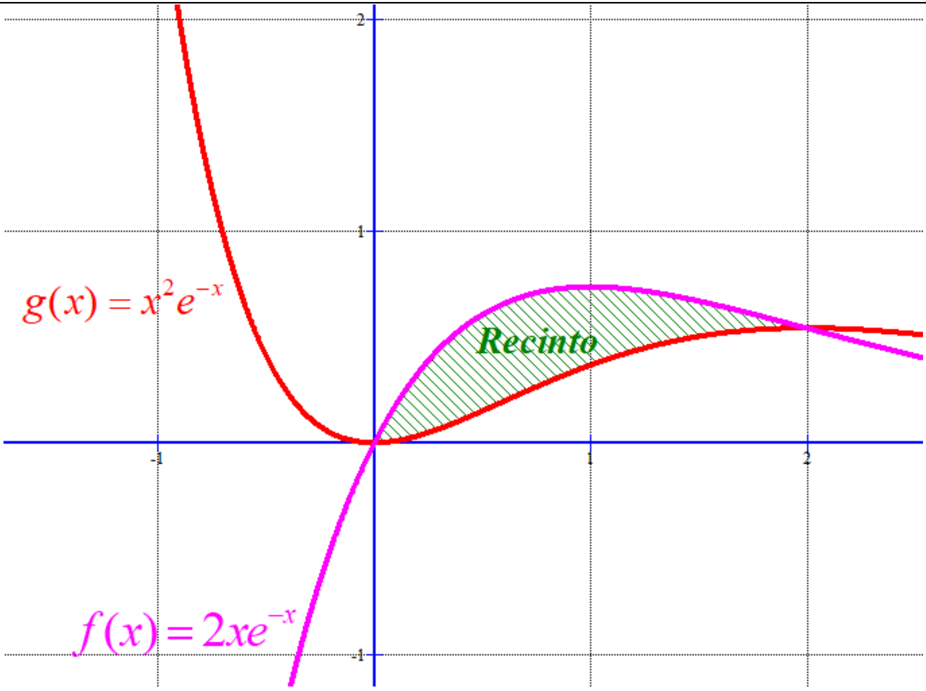
$$=-2xe^{-x}+x^2e^{-x}-2e^{-x}+2xe^{-x}-2\int e^{-x}dx=\cancel{-2xe^{-x}}+x^2e^{-x}-\cancel{2e^{-x}}+\cancel{2xe^{-x}}+\cancel{2e^{-x}}=\boxed{x^2e^{-x}+K}$$

Calculamos el valor de la integral definida.

$$Área=\left|\int_0^2 2xe^{-x}-x^2e^{-x}dx\right|=\left|\left[x^2e^{-x}\right]_0^2\right|=\left[2^2e^{-2}\right]-\left[0^2e^{-0}\right]=4e^{-2}=\boxed{0.5413\,u^2}$$

El área del recinto es 0.5413 unidades cuadradas.

Para comprobarlo hacemos el dibujo y contamos cuadraditos (cada cuadradito = 1 u^2).



Es difícil contar pues el valor del área es muy pequeño, pero se aprecia que la zona rayada es menos de un cuadradito, es decir, menos de 1 unidad cuadrada y quizás un poco más de la mitad.

3B. a) Encuentra los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente matriz tenga inversa.

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1 punto)}$$

b) Para *a = 2* calcula razonadamente A^{-1} y comprueba el resultado. **(1 punto)**

c) Para *a = 0* calcula razonadamente el valor de los determinantes $\left|A^{-1}\right|$ y $|2A|$. **(0,5 puntos)**

a) La matriz tendrá inversa cuando su determinante no se anule. Averiguamos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2)2 + a - 0 + a(a-2) + 0 + 0 =$$

$$= \left(a^2 - 2a - a + 2\right)2 + a + a^2 - 2a = 2a^2 - 6a + 4 + a + a^2 - 2a = 3a^2 - 7a + 4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 7a + 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{6} = \begin{cases} \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ \frac{7-1}{6} = 1 \end{cases}$$

La matriz *A* tiene inversa cuando $a \neq 1 \text{ y } a \neq \frac{4}{3}$

b) Para *a = 2* existe la inversa y la calculamos con la fórmula $A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es la inversa.

$$A\cdot A^{-1}=Id \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+1+0 & -1+2-1 & 1/2-1/2+0 \\ 0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & -2+0+2 & 1+0+0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=Id$$

Faltaría comprobar que también se cumple $A^{-1}\cdot A=Id$

c) Para $a = 0$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos las propiedades de los determinantes y tenemos que:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{4}$$

$$\text{y } |2A|=\{\text{La matriz A es de dimensión } 3\times 3\}=2^3\cdot|A|=8\cdot 4=32$$

4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(0,1,1)$, $\vec{v}=(1,1,-1)$ y $\vec{w}=(2,0,3)$:

a) Determina el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que el vector $\vec{u}-\lambda\vec{v}$ sea perpendicular a $\vec{w}$. **(1 punto)**

b) ¿Son linealmente dependientes los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$? Razona la respuesta. **(0,5 puntos)**

c) Encuentra razonadamente las ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta que pase por el punto *P(2, 0, 2)* y que sea perpendicular simultáneamente a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. **(1 punto)**

a) Para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar debe dar como resultado 0.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}-\lambda\vec{v}=(0,1,1)-\lambda(1,1,-1)=(-\lambda,1-\lambda,1+\lambda)\\ \vec{w}=(2,0,3)\\ (\vec{u}-\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(-\lambda,1-\lambda,1+\lambda)(2,0,3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\lambda+3+3\lambda=0\Rightarrow\lambda+3=0\Rightarrow\boxed{\lambda=-3}$$

b) Para que sean 3 vectores linealmente dependientes el determinante de orden 3 formado por sus coordenadas debe dar como resultado 0.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(0,1,1)\\ \vec{v}=(1,1,-1)\\ \vec{w}=(2,0,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\2&0&3\end{vmatrix}=0-2+0-2-3-0=-7\neq 0$$

Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes, pues el determinante es no nulo.

c) Si la recta es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ entonces su vector director es el producto vectorial de dichos vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(0,1,1)\\ \vec{v}=(1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}i&j&k\\0&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-i+j+0-k+0-i=-2i+j-k=(-2,1,-1)$$

Obtenemos la ecuación de la recta pedida.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{u}\times\vec{v}=(-2,1,-1)\\ P(2,\ 0,\ 2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

La pasamos a ecuaciones implícitas.

$$r\equiv\begin{cases}x=2-2y\\ z=2-y\end{cases}\Rightarrow\boxed{r\equiv\begin{cases}x+2y-2=0\\ y+z-2=0\end{cases}}$$

5B. a) El 60% del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30% vota a A, el 50% a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10% vota a A, el 60% a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. **(0,75 puntos)**

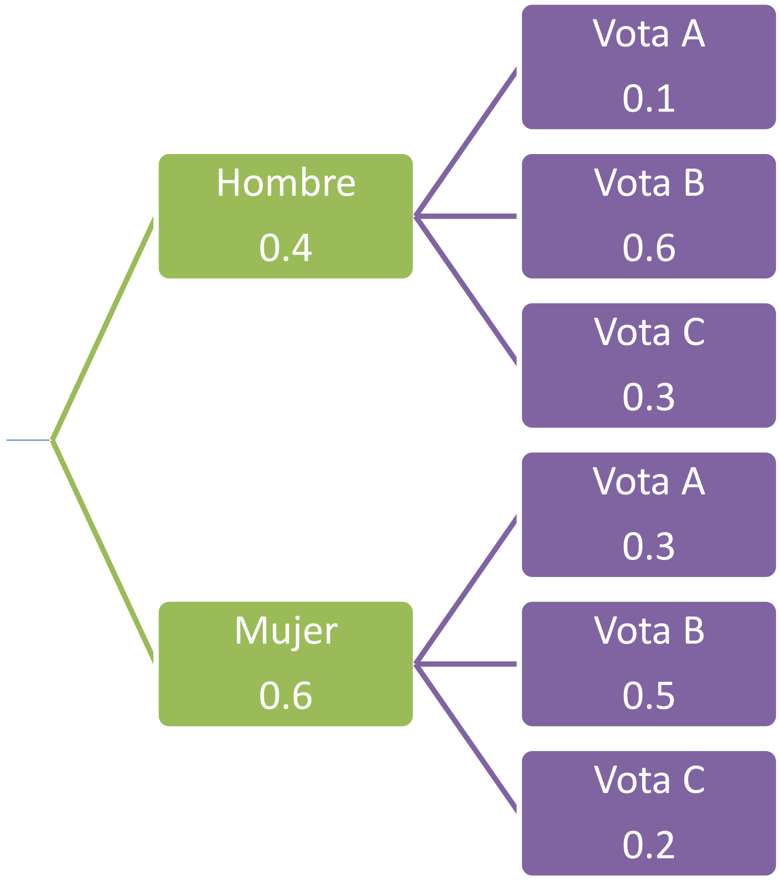
a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. **(0,5 puntos)**

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. **(0,75 puntos)**

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(0,5 puntos)**

Hacemos un diagrama de árbol describiendo la situación planteada.



a1) *P(Ser hombre y votante de C) = 0.4 · 0.3 = 0.12*

a2)

$$P\left(\text{Ser mujer / Votante de B}\right)=\frac{P\left(\text{Ser mujer } \cap \text{ Votante de B}\right)}{P\left(\text{Votante de B}\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.5}{0.6\cdot 0.5+0.4\cdot 0.6}=\frac{0.30}{0.3+0.24}=\frac{0.30}{0.54}=\boxed{\frac{5}{9}}$$

b) X = Nota de un opositor

X = N(4.05, 2.5)

b1)

$$P(X>5)=P\left(\frac{X-4.05}{2.5}>\frac{5-4.05}{2.5}\right)=P(Z>0.38)=1-P(Z<0.38)=\{\textit{Mirando la tabla}\}=$$

$$=1-0.6480=0.352$$

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

Por lo que de los 1000 estudiantes han superado el 5 en la prueba $0.352 \cdot 1000 = 352$ de ellos.

b2)

Nos piden averiguar el valor de "a" para que $P(X>a)=\frac{330}{1000}$.

$$P(X>a)=\frac{330}{1000}\Rightarrow 1-P(X<a)=0.33\Rightarrow P(X<a)=1-0.33=0.67$$

$$\left\{\begin{array}{l}\textit{Tipificamos}\\ \text{para utilizar la tabla proporcionada}\end{array}\right\}\Rightarrow P\left(\frac{X-4.05}{2.5}<\frac{a-4.05}{2.5}\right)=P\left(Z<\frac{a-4.05}{2.5}\right)=0.67$$

Miramos en la tabla.

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879

$$\frac{a-4.05}{2.5}=0.44\Rightarrow a-4.05=2.5\cdot 0.44\Rightarrow a=5.15$$

La nota de corte debe ser de 5.15 puntos para conseguir 330 aprobados.