Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 3

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gráfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Calculau una matriu X que satisfaci: (6 punts)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculau, si és possible, la matriu inversa de X. (4 punts)

2. El rendiment dels treballadors d'una fábrica (valorat en una escala de 0 a 100), durant una jornada de 8 hores, ve donat per la funció:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t, & si\ 0 \le t \le 4, \\ 80, & si\ 4 \le t < 6, \\ 170 - 15t, & si\ 6 \le t \le 8 \end{cases}$$

on t és el temps en hores.

a) Determinau els intervals de creixement i decreixement. Quin és el rendiment máxim? (6 punts)

b) En quins instants de la jornada laboral el rendiment se situa a la meitat de l'escala? (4 punts)

3. Una urna conté 6 boles vermelles i 2 de negres. Es disposa, a més, d'una baralla espanyola[1] de 48 cartes i d'una baralla de póquer (o baralla francesa)[2] de 52 cartes. S'extreu una bola a l'atzar. Si és vermella, s'extreu a l'atzar una carta de la baralla espanyola. Si és negra s'extreu a l'atzar una carta de la baralla de póquer.

a) Calculau la probabilitat que la carta extreta sigui figura. (6 punts)

b) Si la carta extreta ha estat figura, quina és la probabilitat que la bola extreta sigui vermella? (4 punts)

[1]la baralla espanyola té 48 naips, repartits entre quatre pals: ors, copes, espases i bastos. La baralla de 48 cartes está numerada de l'1 (as) al 9, sent les figures el 10 (sota), l'11 (cavall) i el 12 (rei)

[2]la baralla francesa consta de 52 cartes distribuïdes entre 4 pals (cors, diamants, piques i trévols), i numerades de l'1 (o as) al 10, seguides per les figures, que porten la J (de la veu anglesa jack o patge), la Q (de queen o reina) i la K (de king o rei).

4. Al llarg de les diferents proves d'accés a la Universitat (PAU) s'ha observat que la distribució de les qualificacions de l'assignatura MACSII segueix una llei normal de mitjana 5.3 punts i desviació típica 0.8.

a) Quina és la probabilitat que una mostra de 49 alumnes tingui una mitjana superior a 5.7? (5 punts)

b) Quina és la probabilitat que un alumne escollit a l'atzar suspengui l'assignatura MACSII, entenent per suspendre obtenir una qualificació menor que 5 punts? (5 punts)

Model 3

OPCIÓ B

1. L'administrador de la comunitat de veïns vol saber qué cobra a l'hora un electricista, un lampista i un paleta. Per a això, sap que:

- Al 4t B, l'electricista hi va estar 1 hora i el paleta 2 hores, i varen haver de pagar 78 € de má d'obra.
- Al 3r A, varen pagar 85 € per les 2 hores que hi va ser el lampista i l'hora que hi va ser el paleta.
- Al 1r A, casa meva, hi va ser 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens varen cobrar 133 €.

Quant cobra per hora cada professional? (10 punts)

2. Dos grups diferents, G_1 i G_2, de la mateixa empresa poden dur a terme un projecte de jardineria. Es tracta d'enjardinar tres zones: A, B i C. A la taula següent es recull el nombre d'unitats que pot enjardinar cada grup durant una setmana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grup G1	4	10	7
Grup G2	10	5	7

Han d'enjardinar un mínim de 40 unitats a la zona A, 50 unitats a la zona B i 49 unitats a la zona C, i el cost setmanal s'estima en 3.300 e per al grup G_1 i en 4.000 e per al grup G_2.
Quantes setmanes haurá de treballar cada grup per acabar el projecte amb el cost mínim?
(10 punts)
S'ha de plantejar el problema com un problema de programació lineal, dibuixant la regió factible de solucions i determinant i dibuixant els seus vértexs.

3. Considerau la funció

$$h(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

a) Calculau una primitiva d'aquesta funció. (4 punts)
b) Calculau la següent integral definida: (6 punts)

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$$

i comprovau que el seu valor és $\frac{3}{4}$.

4. Un restaurant té contractats dos cambrers, en Joan i na Catalina, per atendre el servei de menjador. Na Catalina posa el servei el 70% dels dies i es confon en col·locar els coberts el 5% dels dies que posa el servei. En Joan, per contra, col·loca malament alguna peça el 25% dels dies que posa el servei.
a) Aquest matí, l'encarregat del restaurant passa revista al servei: quina és la probabilitat que trobi algun servei mal col·locat? (6 punts)
b) Per desgrácia, l'encarregat va trobar uns coberts mal col·locats i desitja conéixer la probabilitat que hagi estat en Joan. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1. Determinar una matriz X que verifique: (6 puntos)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, la matriz inversa de X. (4 puntos)

Vemos si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ Entonces tiene inversa.

Despejamos la matriz X.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{T}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la expresión inicial tenemos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 11/3 & 7/3 \end{pmatrix}$$

2. El rendimiento de los trabajadores de una fábrica (valorado en una escala de 0 a 100), durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4,\\ 80, & si\ 4\le t<6,\\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8\end{cases}$$

donde t es el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuál es el rendimiento máximo?

(6 puntos)

b) ¿En qué instantes de la jornada laboral el rendimiento se sitúa en la mitad de la escala?

(4 puntos)

a) La función es continua en cada trozo pues son funciones polinómicas y en los cambios de definición también es continua.

En $t = 4$ y en $t = 6$ se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} r(4)=-160+240=80 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -10t^2+60t=80 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} 80=80 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} r(x)=r(4)=80$$

$$\left.\begin{array}{l} r(6)=170-90=80 \\ \lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^-} 80=80 \\ \lim\limits_{x\to 6^+} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} 170-15t=80 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=\lim\limits_{x\to 6^-} r(x)=r(6)=80$$

La función es continua y es un trozo de parábola, un trozo de recta horizontal y otro trozo de recta oblicua.

Utilizamos la derivada de la función para ver su crecimiento y decrecimiento.

$$r(t)=\begin{cases}-10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4,\\ 80, & si\ 4\le t<6,\\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8\end{cases} \Rightarrow r\,'(t)=\begin{cases}-20t+60, & si\ 0<t<4,\\ 0, & si\ 4<t<6,\\ -15, & si\ 6<t<8\end{cases}$$

En el intervalo (0, 4) la derivada se anula cuando $-20t+60=0 \rightarrow t=3$. Vemos como evoluciona el signo de la derivada antes y después de $t = 3$.

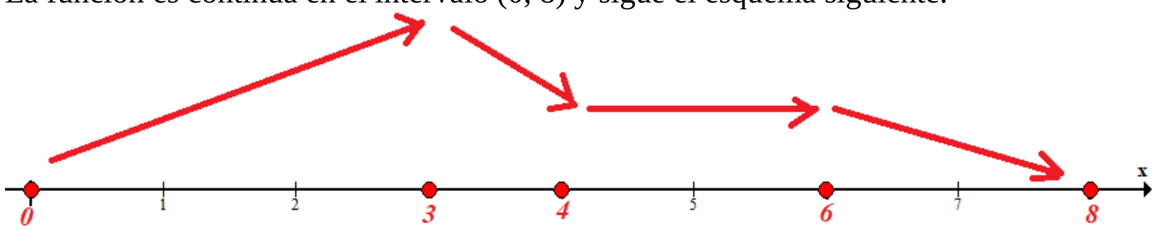
En (0, 3) tomamos $t = 2$ y la derivada vale –40 + 60 = 20 > 0. La función crece en (0, 3).

En (3, 4) tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale –70+60 = –10 < 0. La función decrece en (3, 4).

En el intervalo (4, 6) la derivada es siempre cero. La función es constante en (4, 6).

En el intervalo (6, 8) la derivada no se anula y la derivada siempre es negativa. La función es decreciente en (6, 8).

La función es continua en el intervalo (0, 8) y sigue el esquema siguiente.



La función crece en el intervalo (0, 3), decrece en el intervalo $(3,4)\cup(6,8)$ y es constante en el intervalo (4, 6).
El rendimiento máximo se alcanza en $t = 3$.
Como $r(3) = -90 + 180 = 90$. El rendimiento máximo es de 90.

b) ¿En que momento $r(t) = 50$? ¿Para que valor de t se cumple $r(t) = 50$?
Como en el intervalo de 4 a 6 siempre vale 80 ahi no se produce esa igualdad. Igualamos a 50 la función en los dos intervalos donde el rendimiento varía.

$$\left.\begin{array}{r} r(t)=50 \\ r(t)=\begin{cases} -10t^2+60t, & si\ 0\le t\le 4, \\ 80, & si\ 4\le t<6, \\ 170-15t, & si\ 6\le t\le 8 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -10t^2+60t=50 \Rightarrow -10t^2+60t-50=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow t^2-6t+5=0 \Rightarrow t=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-20}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow t=\dfrac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+4}{2}=5\notin[0,4] \\ \dfrac{6-4}{2}=1\in[0,4]\Rightarrow \boxed{t=1} \end{cases} \\ o \\ 170-15t=50 \Rightarrow -15t=-120 \Rightarrow \boxed{t=\dfrac{120}{15}=8} \end{cases}$$

El rendimiento es 50 para $t = 1$ y para $t = 8$.

3. Una urna contiene 6 bolas rojas y 2 negras. Se dispone además de una baraja española[1] de 48 cartas y de una baraja de póquer (o baraja francesa)[2] de 52 cartas. Se extrae una bola al azar. Si es roja, se extrae al azar una carta de la baraja española. Si es negra se extrae al azar una carta de la baraja de póquer.

a) Calcular la probabilidad que la carta extraída sea figura. (6 puntos)

b) Si la carta extraída ha sido figura, ¿cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja? (4 puntos)

[1]la baraja española tiene 48 cartas, repartidas entre cuatro palos: oros, copas, espadas y bastos. La baraja de 48 cartas está numerada del 1 (as) al 9, siendo las figuras el 10 (sota), el 11 (caballo) y el 12 (rey)

[2]la baraja francesa consta de 52 cartas distribuidas entre 4 palos (corazones, diamantes, picas y tréboles), y numeradas del 1 (o as) al 10, seguidas por las figuras, que llevan la J (de la voz inglesa jack o paje), la Q (de queen o reina) y la K (de king o rey).

Al extraer una carta de una baraja española la probabilidad de sacar figura es:

$$P\left(\text{Sacar figura/Baraja española}\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=$$

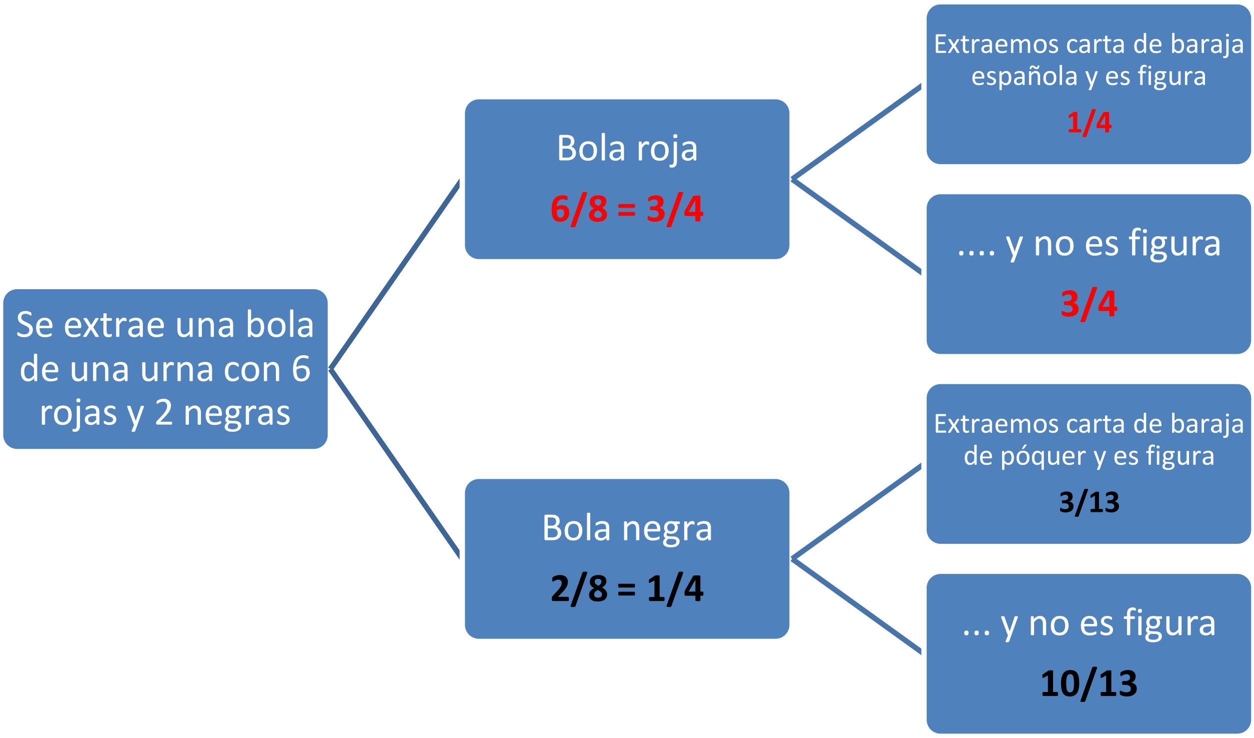
$$=\frac{\text{Nº de jotas, caballos y reyes}}{\text{Nº total de cartas}}=\frac{4+4+4}{48}=\frac{1}{4}$$

Al extraer una carta de una baraja de póquer la probabilidad de sacar figura es:

$$P\left(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=$$

$$=\frac{\text{Nº de J, Q y K}}{\text{Nº total de cartas}}=\frac{4+4+4}{52}=\frac{3}{13}$$

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Sacar figura}) = P(\text{Sacar bola roja y carta con figura}) + P(\text{Sacar bola negra y carta con figura}) =$$

$$= P(\text{Sacar bola roja})P(\text{Sacar figura/Baraja española}) +$$

$$+P(\text{Sacar bola negra})P(\text{Sacar figura/Baraja de póquer}) =$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{13} = \boxed{\frac{51}{208} = 0.245}$$

b) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(\text{Roja / Ha salido figura}) = \frac{P(\text{Roja } \cap \text{ Ha salido figura})}{P(\text{Sacar figura})} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{51/208} = \frac{3/16}{51/208} = \boxed{\frac{13}{17} = 0.765}$$

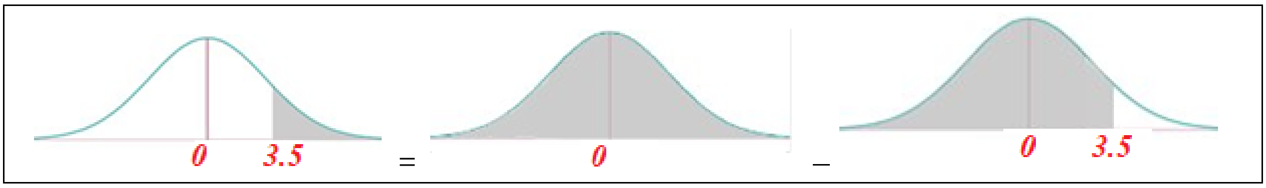
4. A lo largo de las diferentes pruebas de acceso a la Universidad (PAUs) se ha observado que la distribución de las calificaciones de la asignatura MACSII sigue una ley normal de media 5.3 puntos y desviación típica 0.8.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de 49 alumnos tenga una media superior a 5.7? (5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar suspenda la asignatura MACSII, entendiendo por suspender obtener una calificación menor que 5 puntos? (5 puntos)

Si X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU. $X = N(5.3,\ 0.8)$

Tomamos una muestra de 49 alumnos. Las medias muestrales siguen una ley normal de media la misma que la distribución de las notas y de desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.8}{\sqrt{49}} = \frac{0.8}{7} = \frac{4}{35}$

$$\overline{X_{49}} = N\left(5.3,\ \frac{4}{35}\right)$$

a) $P\left(\overline{X_{49}} > 5.7\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{49}} - \mu}{\sigma} > \frac{5.7-5.3}{4/35}\right) = P(Z > 3.5) = \ldots$



$\ldots = 1 - P(Z \leq 3.5) = \{\text{Miramos en la tabla de la N}(0,1)\} = 1 - 0.9998 = \boxed{0.0002}$

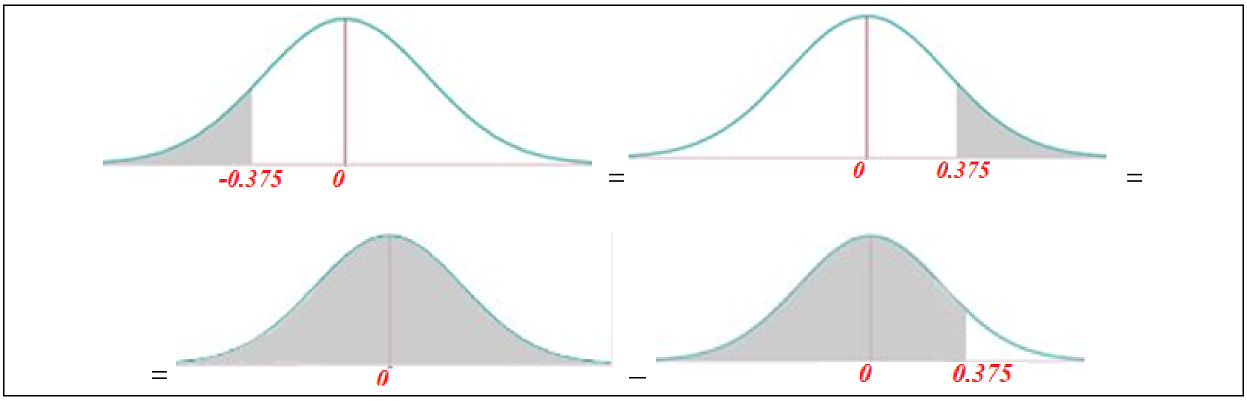
	0	
0.0	0.5000	0
0.1	0.5398	0
0.2	0.5793	0
0.3	0.6179	0
0.4	0.6554	0
0.5	0.6915	0
0.6	0.7257	0
0.7	0.7580	0
0.8	0.7881	0
0.9	0.8159	0
1.0	0.8413	0
1.1	0.8643	0
1.2	0.8849	0
1.3	0.9032	0
1.4	0.9192	0
1.5	0.9332	0
1.6	0.9452	0
1.7	0.9554	0
1.8	0.9641	0
1.9	0.9713	0
2.0	0.9772	0
2.1	0.9821	0
2.2	0.9861	0
2.3	0.9893	0
2.4	0.9918	0
2.5	0.9938	0
2.6	0.9953	0
2.7	0.9965	0
2.8	0.9974	0
2.9	0.9981	0
3.0	0.9987	0
3.1	0.9990	0
3.2	0.9993	0
3.3	0.9995	0
3.4	0.9997	0
3.5	0.9998	0

b) Como volvemos a plantearnos la probabilidad de que un alumno….
Entonces ya no hablamos de distribución de medias sino de la variable X = Calificación de un alumno en MACSII en la PAU que sigue una distribución normal $X = N(5.3,\ 0.8)$.

Nos piden calcular $P(\text{Suspender}) = P(X < 5)$.

$$P(\text{Suspender}) = P(X < 5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{5-5.3}{0.8}\right) =$$

$$= P(Z < -0.375) = \ldots$$



$\ldots = P(Z > 0.375) = 1 - P(Z < 0.375) = \{$Miramos en la tabla de la N(0, 1) redondeando a 0.38$\} =$

$= 1 - 0.6480 = \boxed{0.3520}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6

OPCIÓN B

1. El administrador de la comunidad de vecinos quiere saber que cobra a la hora un electricista, un fontanero y un albañil. Para ello, sabe que:

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra.
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil.
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €.

¿Cuánto cobra por hora cada profesional? (10 puntos)

Llamo "e" al dinero que cobra un electricista por hora, "f" a lo que gana un fontanero por hora y "a" a lo que cobra un albañil por hora de trabajo.

- En el cuarto B, el electricista estuvo 1 hora y el albañil 2 horas, y cobraron 78 € de mano de obra. → $e+2a=78$
- En el tercero A, pagaron 85 € por las 2 horas del fontanero y 1 hora del albañil. → $2f+a=85$
- En el primero A, mi casa, por 1 hora del fontanero, 1 hora del electricista y 3 horas del albañil se han pagado 133 €. → $f+e+3a=133$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} e+2a=78 \\ 2f+a=85 \\ f+e+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} e=78-2a \\ 2f+a=85 \\ f+e+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ f+78-2a+3a=133 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ a+f=55 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2f+a=85 \\ a=55-f \end{array}\right\} \Rightarrow 2f+55-f=85 \Rightarrow \boxed{f=30} \Rightarrow \boxed{a=55-30=25} \Rightarrow \boxed{e=78-50=28}$$

El electricista gana 28 € por hora de trabajo, el fontanero 30 € y el albañil 25 €.

2. Dos grupos diferentes, G_1 y G_2, de la misma empresa pueden realizar un proyecto de jardinería. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la tabla siguiente se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo durante una semana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grupo G1	4	10	7
Grupo G2	10	5	7

Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, y el coste semanal se estima en 3.300 € para el grupo G_1 y en 4.000 € para el grupo G_2. ¿Cuántas semanas habrán de trabajar cada grupo para acabar el proyecto con un coste mínimo?

(10 puntos)

Se ha de plantear el problema como un problema de programación lineal, dibujando la región factible de soluciones y determinando y dibujando sus vértices.

Llamo "x" = número de semanas que debe trabajar el grupo 1 e "y" = número de semanas que debe trabajar el grupo 2.

El número de unidades que se ajardinan en esas semanas aparecen en la tabla siguiente.

	Zona A	Zona B	Zona C	Coste
Semanas G1 (x)	4x	10x	7x	3300x
Semanas G2 (y)	10y	5y	7y	4000y
TOTALES	4x + 10y	10x + 5y	7x + 7y	3300x + 4000y

Expresamos las restricciones en inecuaciones.

"*Hay que ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C*" → $4x+10y \geq 40; \quad 10x+5y \geq 50; \quad 7x+7y \geq 49$

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; \quad y \geq 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+10y \geq 40 \\ 10x+5y \geq 50 \\ 7x+7y \geq 49 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+5y \geq 20 \\ 2x+y \geq 10 \\ x+y \geq 7 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo es el coste: $C(x,y) = 3300x + 4000y$ y deseamos minimizarlo.

Para dibujar la región factible dibujo primero las rectas que la delimitan.

$2x+5y=20$

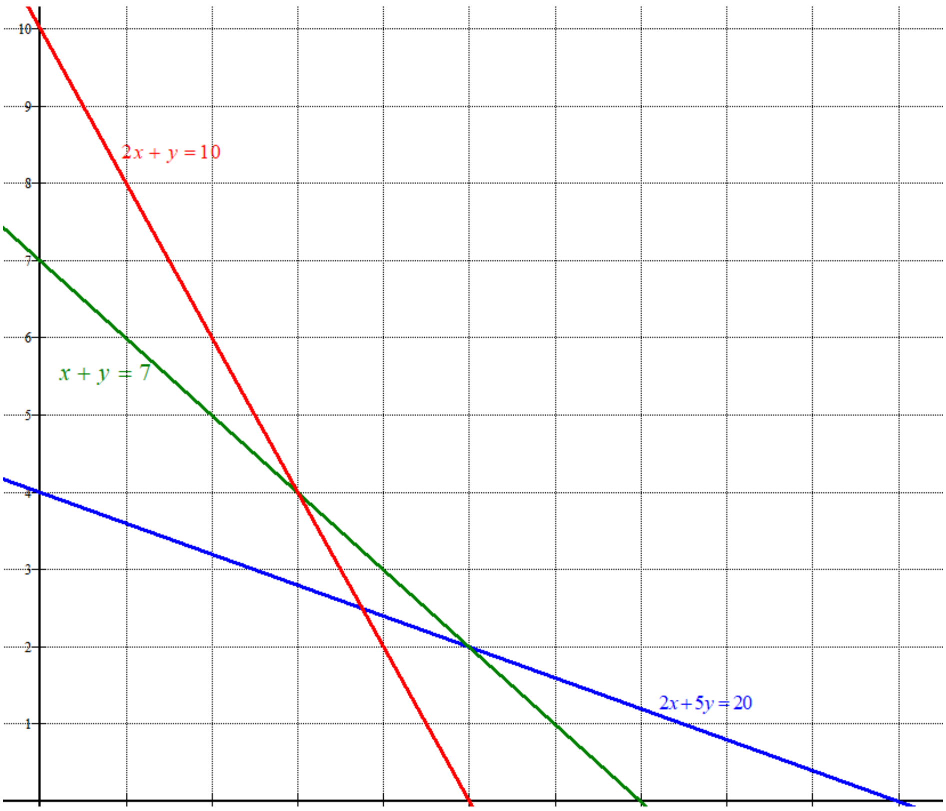
x	$y=\frac{20-2x}{5}$
0	4
5	2
10	0

$2x+y=10$

x	$y=10-2x$
3	4
5	0
0	10

$x+y=7$

x	$y=7-x$
0	7
3	4
5	2



$x \geq 0; \quad y \geq 0$ Primer cuadrante

Como las restricciones son una región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones:

$$4x+10y \geq 40; \quad 10x+5y \geq 50; \quad 7x+7y \geq 49$$

La región factible está situada por encima de las rectas roja, verde y azul y dentro del primer cuadrante. La coloreo de rosa en la siguiente imagen.

Para determinar el coste mínimo y como se consigue valoro la función coste $C(x,y)=3300x+4000y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 10) → $C(0,10)=0+40000=40000$
B(3, 4) → $C(3,4)=9900+16000=25900$
C(5, 2) → $C(5,2)=16500+8000=24500$
D(10, 0) → $C(10,0)=33000$

El mínimo coste es de 24500 € y se produce en el punto C(5, 2) que significa que deben trabajar 5 semanas el grupo G_1 y 2 semanas el grupo G_2.

3. Considerar la función

$$h(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

a) Calcular una primitiva de esta función. (4 puntos)

b) Calcular la siguiente integral definida: (6 puntos)

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx$$

y comprobar que su valor es $\frac{3}{4}$.

a)

$$\int h(x)dx=\int\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int e^{x}+e^{-x}dx\right)=\frac{1}{2}\int e^{x}dx+\frac{1}{2}\int e^{-x}dx=\boxed{\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}+K}$$

Donde $K\in\mathbb{R}$

b)

$$\int_{0}^{\ln 2}\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{2}e^{-x}\right]_{0}^{\ln 2}=\left[\frac{1}{2}e^{\ln 2}-\frac{1}{2}e^{-\ln 2}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{0}-\frac{1}{2}e^{-0}\right]=$$

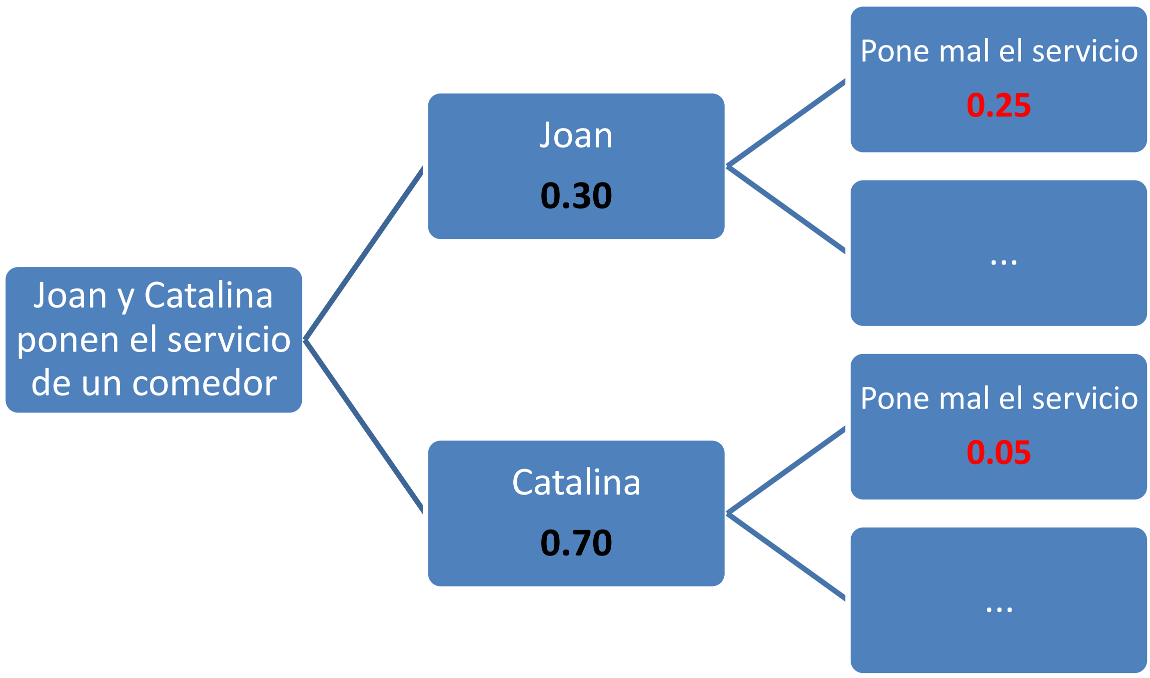
$$=\frac{1}{2}2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

4. Un restaurante tiene contratados dos camareros, Joan y Catalina, para atender el servicio de comedor. Catalina pone el servicio el 70% de los días y se confunde al colocar los cubiertos el 5% de los días que pone el servicio. Joan, por contra, coloca mal alguna pieza el 25% de los días que pone el servicio.

a) Esta mañana, el encargado del restaurante pasa revista al servicio: ¿Cuál es la probabilidad de que encuentre algún servicio mal colocado? (6 puntos)

b) Por desgracia, el encargado encuentra unos cubiertos mal colocados y desea conocer la probabilidad de que haya sido Joan. (4 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Pone mal el servicio}) = P(\text{Joan pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio / Joan}) +$$
$$+P(\text{Catalina pone el servicio})P(\text{Pone mal el servicio / Catalina}) =$$
$$= 0.3 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.05 = 0.075 + 0.035 = \boxed{0.110}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplico el teorema de Bayes.

$$P(\text{Joan / Mal puesto el servicio}) = \frac{P(\text{Joan} \cap \text{Mal puesto el servicio})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} =$$

$$= \frac{P(\text{Joan})P(\text{Mal puesto el servicio / Joan})}{P(\text{Está mal puesto el servicio})} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.110} = \frac{75}{110} = \boxed{\frac{15}{22} = 0.682}$$