	Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 (tabla adicional)**

OPTATIVIDAD: CADA PERSONA DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

Problemas (a elegir tres)

P1. (Números y álgebra)

Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 2$.

P3. (Análisis)

Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t)=660-231t+27t^2-t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibujar la gráfica de la función S(t) para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

P4. (Análisis)

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases} 3x-1 & si\ x\le 2 \\ \dfrac{2x+71}{4x+7} & si\ x>2 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de *f(x)*.
b) Calcular el área limitada por la función *f*(*x*) y el eje de abscisas en el intervalo [0, 2], dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:
a) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y27 minutos.
b) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

P6. (Estadística y probabilidad)

Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la distribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 %y el 45 %. (**hasta 2 puntos**)

b) Calcular un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de opositores aprobados de la academia. (**hasta 1 punto**).

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales *AB* y *BA*.

C2. (Análisis)

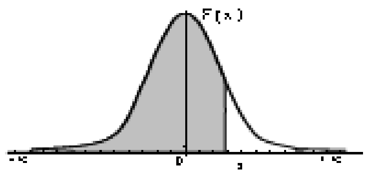
Calcular el área limitada por la función $y=x^2$ y el eje OX entre los puntos $x=-1$ y $x=2$.

C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal indica que se ha encuestado a 4450 individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de ±1.4 % fijada una confianza del 95 %.
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

P1. (Números y álgebra)

Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?

Llamamos "x" al número de camiones de agua potable e "y" al número de camiones de medicinas.

Expresamos las restricciones en forma de inecuaciones.

"*Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones*" → $x+y\leq 27$

"*Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones*" → $x\geq 12$

"*Para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua*" → $y\geq \frac{x}{2}$

"*Las cifras de camiones deben ser positivas*" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 27 \\ x\geq 12 \\ y\geq \frac{x}{2} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo es el coste, que deseamos minimizar:

"*Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros*" → $C(x,y)=9000x+6000y$

Dibujamos la región factible. Empiezo dibujando las rectas que delimitan la región.

$x+y=27$

x	$y=27-x$
0	27
18	9
27	0

$x=12$

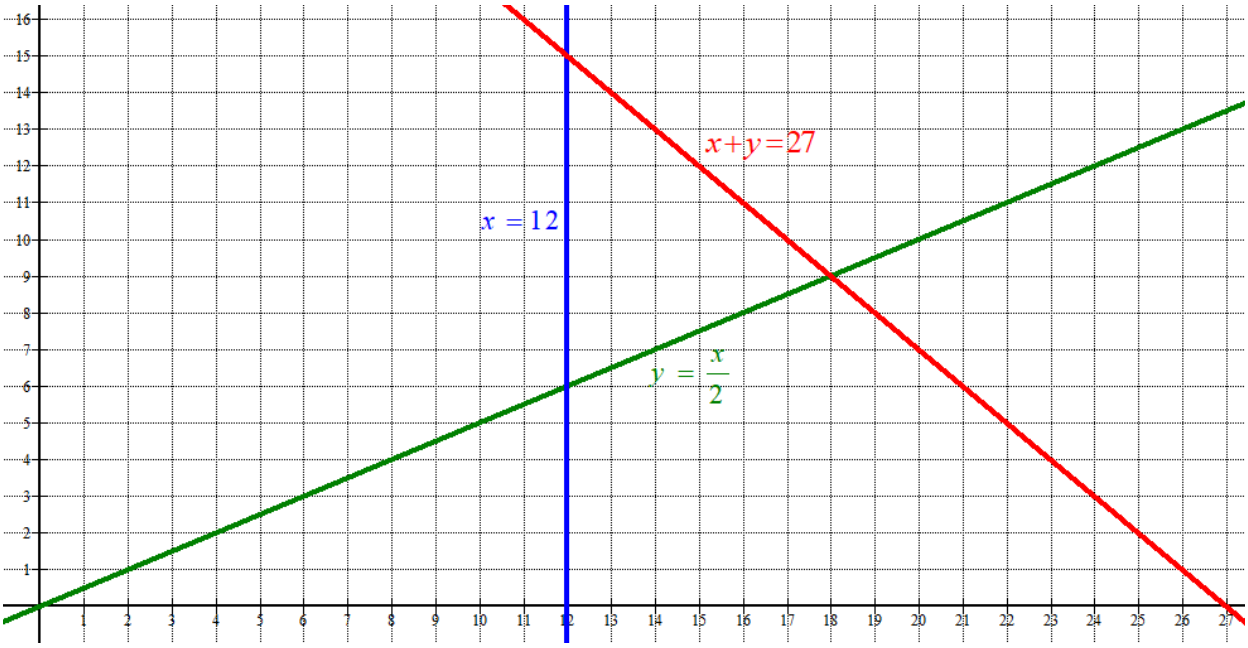
Recta vertical

$y=\frac{x}{2}$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
18	9
20	10

$x\geq 0;\ y\geq 0$

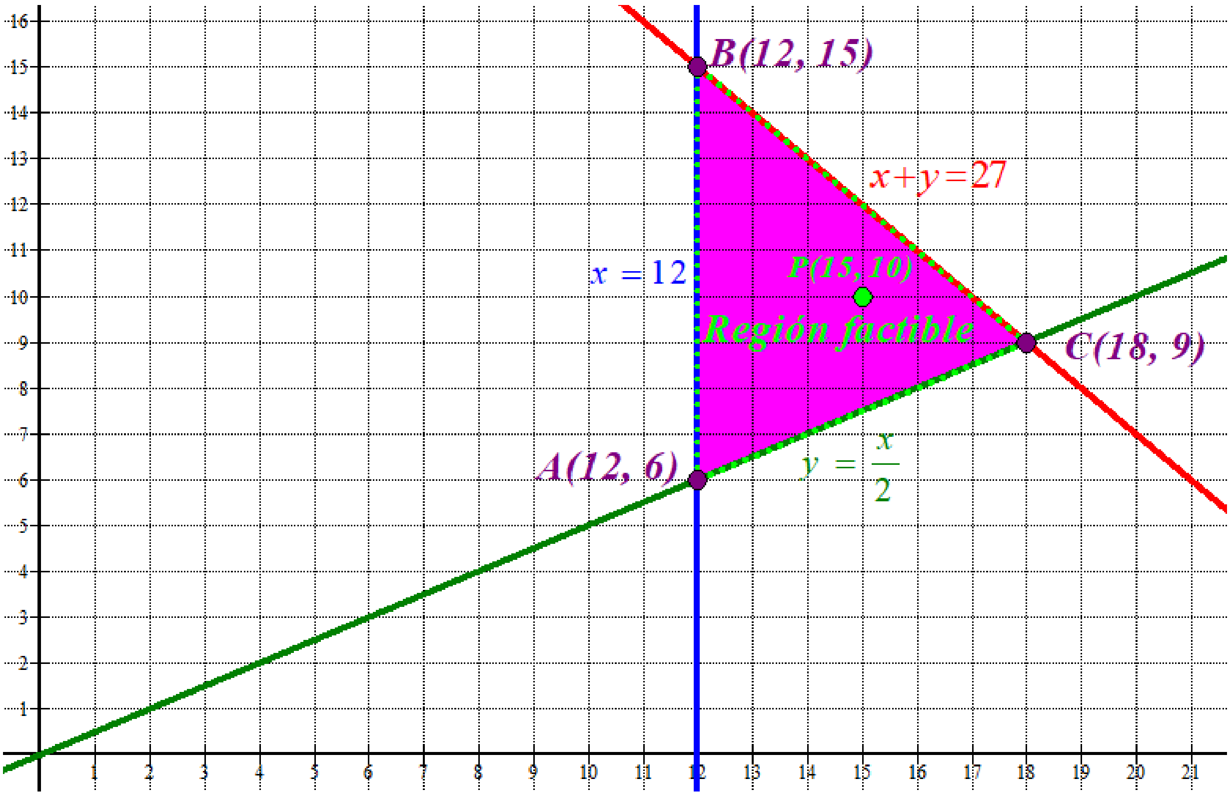
Primer cuadrante



Como las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 27 \\ x\geq 12 \\ y\geq \dfrac{x}{2} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$ La región factible está por debajo de la recta roja, a la derecha de la recta azul y por encima de la recta verde.

Coloreo de rosa la región factible, determino las coordenadas de sus vértices



Compruebo que el punto P(15, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 15+10 \leq 27 \\ 15 \geq 12 \\ 10 \geq \dfrac{15}{2} \\ 15 \geq 0; 10 \geq 0 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen todas las restricciones! La región factible es correcta.

Valoro la función en los tres vértices para determinar el mínimo de la función coste.

A(12, 6) → $C(12,6)=108000+36000=144000$

B(12, 15) → $C(12,15)=108000+90000=198000$

C(18, 6) → $C(18,6)=154000+36000=190000$

El menor coste se produce en el punto A(12, 6). Significa que se minimiza el coste con 12 camiones de agua y 6 de medicinas, cumpliendo todas las restricciones. Ese mínimo coste es de 144000 €.

P2. (Números y álgebra)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ ax+2y-z=3a \\ 2x+ay-z=6 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.
b) Resolver el sistema para $a = 2$.

a) Calculo el determinante de la matriz de coeficientes y la igualo a cero.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -1 \end{vmatrix}=-2-2-a^2+4+a+a=-a^2+2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+2a=0 \Rightarrow a(-a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ -a+2=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas del sistema.
El sistema tiene una solución única (COMPATIBLE DETERMINADO).

CASO 2. $a=2$

El sistema queda $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=6 \\ 2x+2y-z=6 \end{cases}$, tiene dos ecuaciones iguales, por lo que es equivalente al sistema que resulta de quitar la tercera ecuación. Lo resuelvo y compruebo el número de soluciones:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+2y-z=6 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2x & +2y & -z & =6 \\ -2x & -2y & +2z & =-4 \\ \hline & & z & =2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=2 \\ \boxed{z=2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y-2=2 \Rightarrow x+y=4 \Rightarrow x=4-y \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=4-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}}$$

El sistema tiene infinitas soluciones (COMPATIBLE INDETERMINADO)

CASO 3. $a=0$

El sistema queda $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2x \quad -z=6 \end{cases}$, utilizo el método de Gauss para reducir el sistema a otro equivalente triangular.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \\ 2x \quad -z=6 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ 2x & & -z & =6 \\ -2x & -2y & +2z & =0 \\ \hline & -2y & +z & =6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \\ -2y+z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \multicolumn{3}{l}{\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}}} \\ -2y & +z & =6 \\ 2y & -z & =0 \\ \hline & 0 & =6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2y-z=0 \\ 0=6 \end{cases} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema no tiene solución (INCOMPATIBLE)

b) Está resuelto en la discusión del sistema. Es un sistema con infinitas soluciones con la expresión: $\begin{cases} x=4-t \\ y=t \qquad \textit{Siendo } t \in \mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$

P3. (Análisis)

Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde t indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.
a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibujar la gráfica de la función S(t) para t comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.

a) Derivamos la función e igualamos a cero para localizar los puntos críticos.

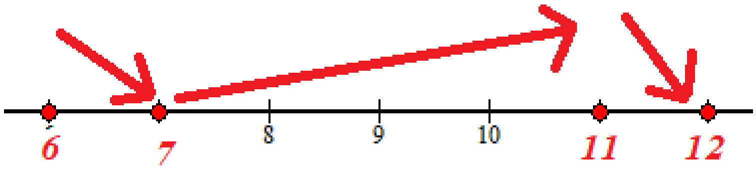
$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \Rightarrow S'(t) = -231 + 54t - 3t^2$$

$$S'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 54t - 231 = 0 \Rightarrow t = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4(-3)(-231)}}{-6} = \frac{-54 \pm 12}{-6} = \begin{cases} \frac{-54+12}{-6} = 7 \\ \frac{-54-12}{-6} = 11 \end{cases}$$

Vemos la evolución de la función antes, entre y después de $t = 7$ y $t = 11$.

- De 6 a 7 horas tomamos t = 6.5 y la derivada vale $S'(6.5) = -231 + 54 \cdot 6.5 - 3 \cdot 6.5^2 = -6.75 < 0$. La función decrece en (6, 7)
- De 7 a 11 horas tomamos t = 8 y la derivada vale $S'(8) = -231 + 54 \cdot 8 - 3 \cdot 8^2 = 9 > 0$. La función crece en (7, 11)
- De 11 a 12 horas tomamos t = 11,5 y la derivada vale $S'(11,5) = -231 + 54 \cdot 11,5 - 3 \cdot 11,5^2 = -6.75 < 0$. La función decrece en (11, 12)

La función S(t) sigue el siguiente esquema:



La función decrece en $(6,7) \cup (11,12)$ y crece en $(7,11)$

La mínima audiencia puede ser pasadas 7 horas o pasadas 12 horas. Valoramos la audiencia en esos dos momentos y decidimos.

$$\left. \begin{array}{l} S(7) = 660 - 231 \cdot 7 + 27 \cdot 7^2 - 7^3 = 23 \\ S(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48 \end{array} \right\}$$

El menor porcentaje de audiencia se produce pasadas 7 horas, es decir, a las 19 h. Siendo un porcentaje del 23%.

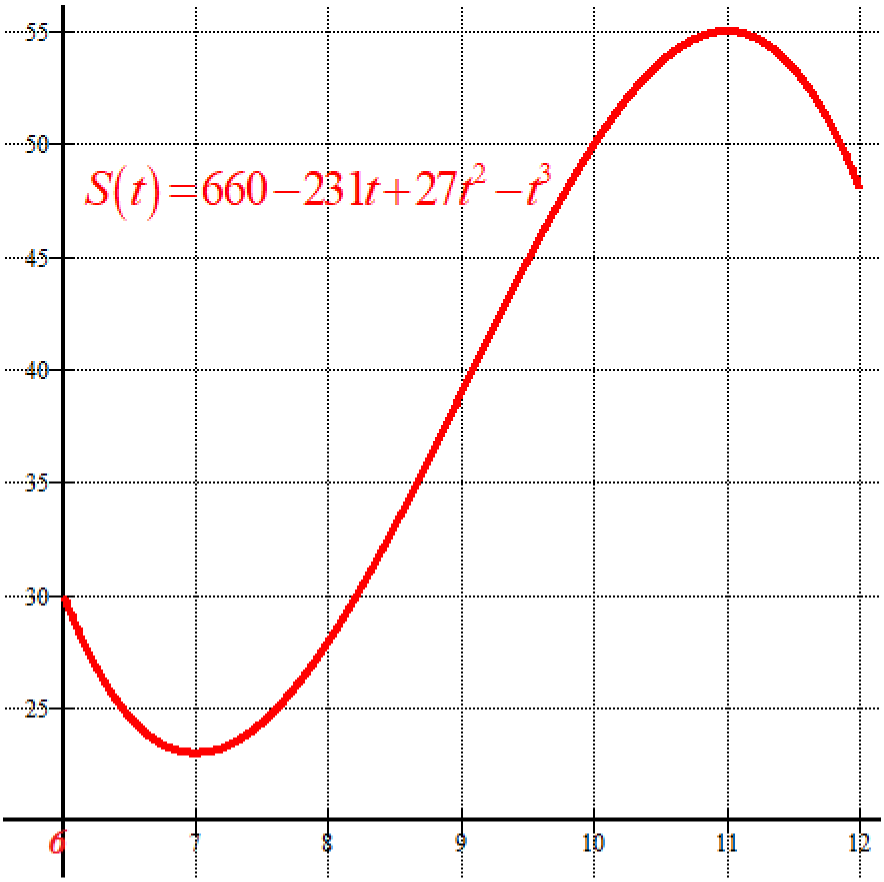
La máxima audiencia puede ser pasadas 6 horas o pasadas 11 horas. Valoramos la audiencia en esos dos momentos y decidimos.

$$\left. \begin{array}{l} S(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30 \\ S(11) = 660 - 231 \cdot 11 + 27 \cdot 11^2 - 11^3 = 55 \end{array} \right\}$$

El mayor porcentaje de audiencia se produce pasadas 11 horas, es decir, a las 23 h. Siendo un porcentaje del 55%.

b) Tenemos una tabla de valores y como crece o decrece la función, así como los máximos y los mínimos.

t	$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$
6	30
7	23 Mínimo
10	50
11	55 Máximo
12	48



P4. (Análisis)

Consideremos la función

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & si\ x\le 2\\ \dfrac{2x+71}{4x+7} & si\ x>2\end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de *f(x)*.
b) Calcular el área limitada por la función *f*(*x*) y el eje de abscisas en el intervalo [0, 2], dibujando el recinto correspondiente.

a) La función en el intervalo $(-\infty,2]$ es $f(x)=3x-1$ que es continua por ser un polinomio.

En el intervalo $(2,+\infty)$ es una función racional $f(x)=\dfrac{2x+71}{4x+7}$ cuyo único problema de continuidad es cuando se anule el denominador → $4x+7=0\Rightarrow x=-\dfrac{7}{4}=-1,75$ que no pertenece al intervalo $(2,+\infty)$. La función también es continua en el intervalo $(2,+\infty)$

Solo falta comprobar la continuidad en x = 2. Para que sea continua deben coincidir el valor de la función y el valor de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=6-1=5\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-1=5\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+71}{4x+7}=\dfrac{75}{15}=5\end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=5$$

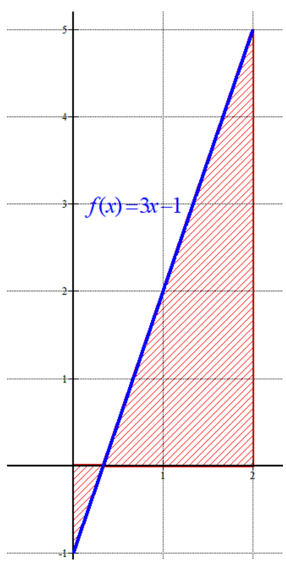
Al ser los tres valores iguales la función es continua en x = 2.

La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) En el intervalo [0, 2] la función es $f(x)=3x-1$.
Vemos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} y=0\\ f(x)=3x-1\end{array}\right\}\Rightarrow 0=3x-1\Rightarrow 3x=1\Rightarrow x=\frac{1}{3}\in[0,2]$$

El área es la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.



$$Área=\left|\int_0^{1/3}3x-1dx\right|+\left|\int_{1/3}^{2}3x-1dx\right|=\left|\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_0^{1/3}\right|+\left|\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_{1/3}^{2}\right|=$$

$$=\left|\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}0^2-0\right)\right|+\left|\left(\frac{3}{2}2^2-2\right)-\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right|+\left|6-2-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{6}+\frac{25}{6}=\boxed{\frac{13}{3}=4.33\,u^2}$$

P5. (Estadística y probabilidad)

El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta se ajusta a una distribución normal con media de 24 minutos y desviación típica de 8 minutos. Si cada día el autobús realiza 40 veces su ruta:

a) Calcular la probabilidad de que en un día el tiempo medio de las 40 rutas esté entre 22 y27 minutos.

b) Calcular la probabilidad de que el autobús emplee más de 1080 minutos en total cada día para realizar su ruta esas 40 veces.

X = "El tiempo que un autobús urbano tarda en realizar su ruta". X = N(24, 8)

La distribución de la media de las 40 rutas $\overline{X_{40}}$ sigue una distribución $\overline{X_{40}} = N\left(24, \frac{8}{\sqrt{40}}\right)$

a) Nos piden calcular $P\left(22 \leq \overline{X_{40}} \leq 27\right)$

$$P\left(22 \leq \overline{X_{40}} \leq 27\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{22-24}{8/\sqrt{40}} \leq \frac{\overline{X_{40}}-\mu}{\sigma} \leq \frac{27-24}{8/\sqrt{40}}\right) =$$

$$= P(-1.58 \leq Z \leq 2.37) = P(Z \leq 2.37) - P(Z \leq -1.58) = P(Z \leq 2.37) - P(Z \geq 1.58)$$

$$= P(Z \leq 2.37) - (1 - P(Z \leq 1.58)) = 0.911 - (1 - 0.9429) = \boxed{0.93}$$

b) Que la suma de los tiempos sea más de 1080 minutos es lo mismo que la media sea más de 1080/40 = 27 minutos.

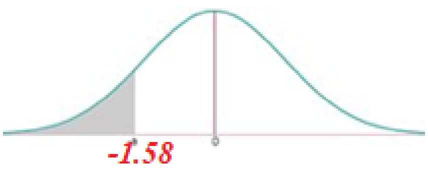
Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{40}} \geq 27\right)$

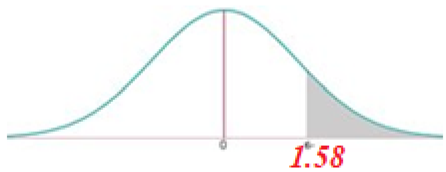
$$P\left(\overline{X_{40}} \geq 27\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{40}}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{27-24}{8/\sqrt{40}}\right) = P(Z \geq 2.37) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2.37) = 1 - 0.9911 = \boxed{0.0089}$$

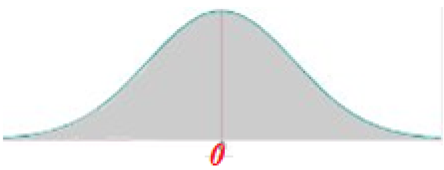
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]	0,9429

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	$\boxed{0,07}$
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5[illegible]79
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5[illegible]75
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6[illegible]64
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6[illegible]43
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6[illegible]08
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7[illegible]57
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7[illegible]86
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7[illegible]94
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8[illegible]78
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8[illegible]40
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8[illegible]77
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8[illegible]90
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8[illegible]80
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9[illegible]47
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9[illegible]92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9[illegible]18
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9[illegible]25
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9[illegible]16
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9[illegible]93
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9[illegible]56
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9[illegible]08
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9[illegible]50
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9[illegible]84
$\boxed{2,3}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9911
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932

$P(Z \le -1.58) =$ 

$=$ 

$=$

$=$ 

$-$ 

$= \mathbf{1} - P(Z \le 1.58)$

P6. (Estadística y probabilidad)

Una academia que prepara oposiciones está evaluando la calidad de sus resultados. Para ello toma una muestra de 50 opositores y comprueba que 20 han aprobado. Con esta información:

a) Determinar los parámetros media y desviación típica de la proporción muestral que estima la proporción de opositores aprobados. Calcular, utilizando la distribución normal asociada, la probabilidad de que la proporción muestral de aprobados esté entre el 35 %y el 45 %. (**hasta 2 puntos**)

b) Calcular un intervalo de confianza del 90% para la proporción de opositores aprobados de la academia. (**hasta 1 punto**).

a) El tamaño de la muestra es n = 50 opositores.

La proporción muestral de aprobados es $p = \frac{20}{50} = 0.4$

La media es la proporción $\mu = p = 0.4$

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.24}{50}} = 0.069$

La distribución de la proporción es p = N(0.4, 0.069)

Nos piden calcular $P(0.35 \leq p \leq 0.45)$

$$P(0.35 \leq p \leq 0.45) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{0.35-0.4}{0.069} \leq \frac{p-\mu}{\sigma} \leq \frac{0.45-0.4}{0.069}\right) =$$
$$= P(-0.72 \leq Z \leq 0.72) = P(Z \leq 0.72) - P(Z \leq -0.72) =$$
$$= P(Z \leq 0.72) - P(Z \geq 0.72) = P(Z \leq 0.72) - (1 - P(Z \leq 0.72)) =$$
$$= \{\text{miramos en la tabla N}(0,1)\} = 0.7642 - (1 - 0.7642) = \boxed{0.5284}$$

b) La distribución de la proporción es p = N(0.4, 0.069)

Para un nivel de confianza del 90%

$$1-\alpha = 0.90 \to \alpha = 0.10 \to \frac{\alpha}{2} = 0.05 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1.64+1.65}{2} = 1.645$$

El error es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.4 \cdot 0.6}{50}} = 0.114$

El intervalo de confianza es

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.4-0.114,\ 0.4+0.114) = (0.286,\ 0.514)$$

La proporción de aprobados está entre 28.6% y 51.4% para un nivel de confianza del 90%.

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]	[illegible]
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0,9495}$	$\boxed{0,9505}$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Cuestiones (a elegir una)

C1. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$. Calcular, cuando sea posible, los productos matriciales *AB* y *BA*.

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\6 & -3\end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{2\ \cdot\ 2}\times 1\longrightarrow 1\times 1 \qquad 2\times\boxed{1\ \cdot\ 1}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

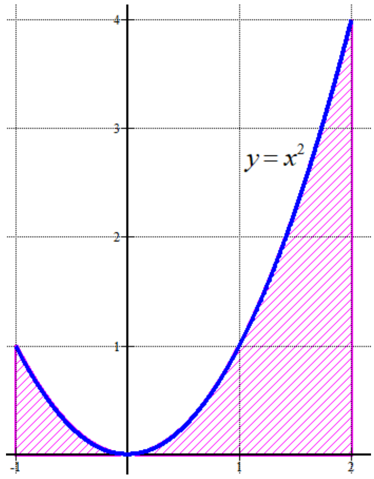
C2. (Análisis)

Calcular el área limitada por la función $y=x^2$ y el eje OX entre los puntos $x = -1$ y $x = 2$.

Es una integral definida con límites de integración –1 y 2.

$$\int_{-1}^{2} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}=3$$

El área es de 3 unidades cuadradas.



C3. (Estadística y probabilidad)

La ficha técnica del estudio social La vida en la Frontera con Portugal indica que se ha encuestado a 4450 individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal. La muestra se ha tomado de manera estratificada, con muestreo aleatorio simple en cada estrato. El error de estimación de la proporción de individuos de la población satisfechos con su zona de residencia es de ±1.4 % fijada una confianza del 95 %.
Para esta ficha técnica, identificar los siguientes elementos: Población, diseño muestral, tamaño muestral, parámetro estimado.

Población: Individuos mayores de 14 años, residentes en Castilla y León que viven a menos de 25 km de la frontera con Portugal
Diseño muestral: Muestra estratificada con muestreo aleatorio simple por estratos.
Tamaño muestral: 4450
Parámetro estudiado: Proporción de individuos satisfechos con su zona de residencia.