Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ (siendo M^t la matriz transpuesta de M). (0.5 ptos)

b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P \cdot X = M \cdot M^t$. (0.5 ptos)

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior. (0.5 ptos)

2. A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & si\ x \le 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 ptos)

b) Para *t = 0*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

c) Para *t = 0*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(-\infty, 1)$. (0.5 ptos)

4. De la función $H(x) = ax^3 + bx + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto (4, 6). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)

5. En un instituto el 45% de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35% son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10% de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20% de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25% de los de la modalidad de Arte.

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 ptos)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 ptos)

6. Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =10 minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95% (1.25 ptos)

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Opción B

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

a) Dibuja la región factible (1 pto).
b) Determina los vértices de la región factible (0.25 ptos).
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 ptos).

2. Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = 1$. (0.5 ptos)
b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función *f*. (1 pto)

4. En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:
$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36x + 150$ donde $0 \leq x \leq 16$ está en semanas y F(x) es la recaudación en cientos de euros. Se pide:
a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno ($x=0$) y cuál es la recaudación al final ($x=16$). (0.5 ptos)
b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 ptos)
c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 ptos)

5. En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80% de los empleados y el resto en la B. El 10% de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.
a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)
b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

6. El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).
a) Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)
b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONES

Opción A

1. Dada la matriz $M=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ se pide:

a) Realiza el producto $M\cdot M^t$ (siendo M^t la matriz transpuesta de M). (0.5 ptos)

b) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $P\cdot X=M\cdot M^t$. (0.5 ptos)

c) Si $P=\begin{pmatrix}-2&-3\\3&4\end{pmatrix}$, obtén la expresión de la matriz X del apartado anterior. (0.5 ptos)

a) $M=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow M^\tau=\begin{pmatrix}-2&-1\end{pmatrix}$

$$M\cdot M^t=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

b) Para despejar suponemos que P tiene inversa.

$$P\cdot X=M\cdot M^t\Rightarrow P^{-1}\cdot P\cdot X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t\Rightarrow \boxed{X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t}$$

c) Si $P=\begin{pmatrix}-2&-3\\3&4\end{pmatrix}$ comprobemos que tiene inversa.

$|P|=\begin{vmatrix}-2&-3\\3&4\end{vmatrix}=-8+9=1\neq 0$ Tiene inversa. La calculamos.

$$P=\begin{pmatrix}-2&-3\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow P^t=\begin{pmatrix}-2&3\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^t\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2&3\\-3&4\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}4&3\\-3&-2\end{pmatrix}$$

Aplicando la expresión obtenida en el apartado anterior.

$$X=P^{-1}\cdot M\cdot M^t$$

$$X=\begin{pmatrix}4&3\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\-3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+6&8+3\\-12-4&-6-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&11\\-16&-8\end{pmatrix}$$

2. A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "x" al número de entradas al estreno de cine, "y" al número de entradas a la función teatral y "z" al número de entradas al concierto de música.

"*Han vendido hoy 320 entradas para tres eventos*" → $x+y+z=320$

"*El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros*" → $8x+20y+30z=6460$

"*El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro*" → $z=3y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=320 \\ 8x+20y+30z=6460 \\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=320 \\ 4x+10y+15z=3230 \\ z=3y \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=320 \\ 4x+10y+15z=3230 \\ z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+3y=320 \\ 4x+10y+45y=3230 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+4y=320 \\ 4x+55y=3230 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=320-4y \\ 4x+55y=3230 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(320-4y)+55y=3230 \Rightarrow 1280-16y+55y=3230 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 39y=1950 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1950}{39}=50} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=320-200=120} \\ \boxed{z=3\cdot 50=150} \end{cases}$$

Las soluciones son *x = 120*, *y = 50*, *z = 150.*

El número de entradas vendidas son 120 para el cine, 50 para el teatro y 150 para el concierto musical.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x-3 & si\ x\leq 1 \\ x+t & si\ x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 ptos)

b) Para *t = 0*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(-\infty,1)$. (0.5 ptos)

c) Para *t = 0*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(-\infty,1)$. (0.5 ptos)

a) Para que la función sea continua en *x = 1* el valor de la función y los límites laterales deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2+1-3=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x-3=1+1-3=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x+t=1+t \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow -1=1+t\Rightarrow \boxed{t=-2}$$

Para que sea continua el valor de *t* debe ser –2.

b) La función *f(x)* en el intervalo $(-\infty,1)$ tiene la expresión $f(x)=x^2+x-3$.

Para calcular los extremos relativos estudio el signo de la derivada.

$$f(x)=x^2+x-3\Rightarrow f'(x)=2x+1$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow 2x=-1\Rightarrow x=\frac{-1}{2}$$

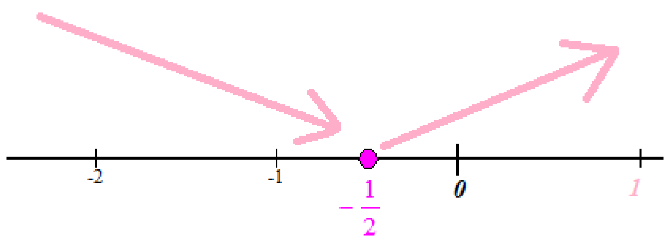
Estudiamos el signo antes y después del valor $x=\frac{-1}{2}$.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ tomamos el valor *x = –2* y la derivada vale

  $f'(-2)=2(-2)+1=-4+1=-3<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ tomamos el valor *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=1>0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-\frac{1}{2}$.

Como $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-3=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-3=\frac{1-2-12}{4}=\frac{-13}{4}$ las coordenadas del mínimo relativo son $\left(\frac{-1}{2},\frac{-13}{4}\right)$

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento los obtenemos del esquema del apartado anterior. La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, y crece en $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

4. De la función $H(x)=ax^3+bx+c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ y un máximo relativo en el punto (4, 6). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)

Como la función pasa por el punto de inflexión $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ y el máximo relativo (4, 6) se cumple:

$$\left.\begin{array}{r} H(0)=\frac{2}{3}\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0+c=\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{c=\frac{2}{3}} \\ H(4)=6\Rightarrow a\cdot 4^3+b\cdot 4+c=6\Rightarrow 64a+4b+c=6 \end{array}\right\}\Rightarrow 64a+4b+\frac{2}{3}=6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 192a+12b+2=18\Rightarrow 192a+12b=16\Rightarrow 96a+6b=8\Rightarrow \boxed{48a+3b=4}$$

Al ser (4, 6) un máximo relativo se anula la derivada para *x = 4*.

$$\left.\begin{array}{r} H(x)=ax^3+bx+c\Rightarrow H'(x)=3ax^2+b \\ H'(4)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a\cdot 4^2+b=0\Rightarrow 48a+b=0\Rightarrow \boxed{b=-48a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 48a+3b=4 \\ b=-48a \end{array}\right\}\Rightarrow 48a-144a=4\Rightarrow -96a=4\Rightarrow \boxed{a=\frac{-4}{96}=-\frac{1}{24}}\Rightarrow b=-48\left(-\frac{1}{24}\right)=2$$

Los valores buscados son $a=-\frac{1}{24}$, b = 2 y $c=\frac{2}{3}$.

Al tener un punto de inflexión en x = 0 debe cumplirse que la derivada segunda se anule para *x = 0* y la derivada tercera sea no nula.

$$H(x)=-\frac{1}{24}x^3+2x+\frac{2}{3}\Rightarrow H'(x)=\frac{-3}{24}x^2+2\Rightarrow H''(x)=\frac{-6}{24}x\Rightarrow H'''(x)=\frac{-6}{24}$$

$$H''(0)=\frac{-6}{24}\cdot 0=0 \quad y \quad H'''(0)=\frac{-6}{24}\neq 0\Rightarrow \text{ En x = 0 hay punto de inflexión}$$

Al tener un máximo relativo en x = 4 debe cumplirse que la derivada segunda debe ser negativa.

$$H'(4)=0 \quad y \quad H''(4)=\frac{-6}{24}\cdot 4=-1<0\Rightarrow \text{ En x = 4 hay un un máximo relativo}$$

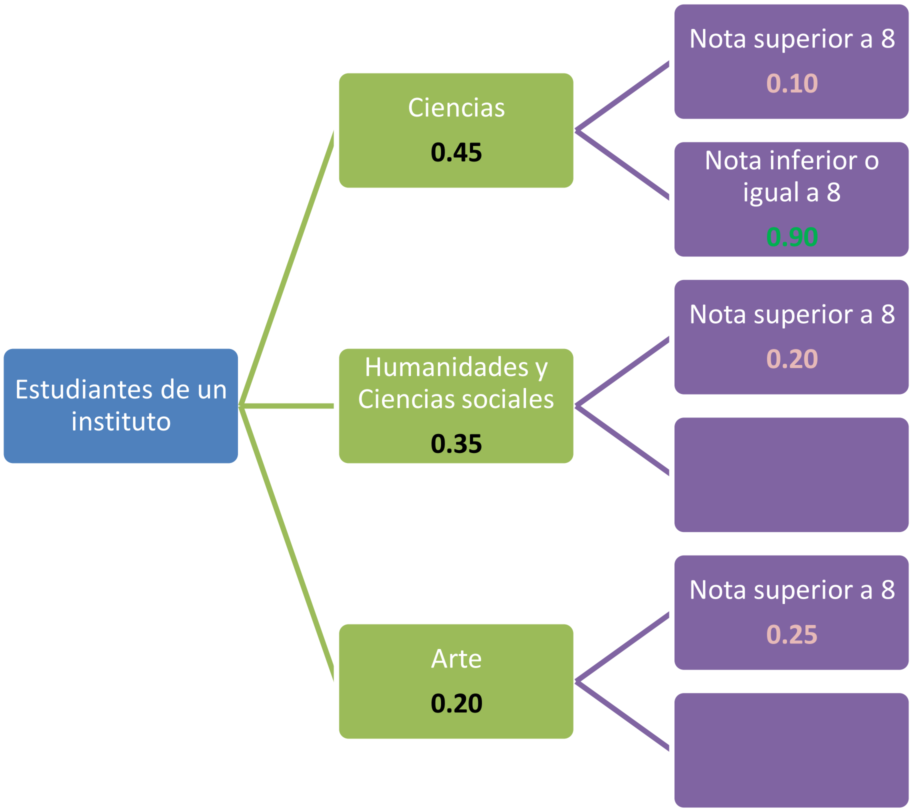
Se cumplen el resto de condiciones para que haya un máximo en x = 4 y un punto de inflexión en x = 0.

5. En un instituto el 45% de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35% son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10% de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20% de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25% de los de la modalidad de Arte.

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 ptos)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 ptos)

Realizamos un diagrama de árbol.
Los alumnos de la modalidad de Arte son 100 – 45 – 35 = 20 % del total de alumnos.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Nota superior a 8}) =$$
$$= P(\text{Ciencias})P(\text{Nota superior a 8 / Ciencias}) +$$
$$+P(\text{Humanidades})P(\text{Nota superior a 8 / Humanidades}) +$$
$$+P(\text{Arte})P(\text{Nota superior a 8 / Arte}) =$$
$$= 0.45 \cdot 0.10 + 0.35 \cdot 0.20 + 0.20 \cdot 0.25 = 0.0450 + 0.0700 + 0.0500 = \boxed{0.1650}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Ciencias / Nota menor o igual a 8}) = \frac{P(\text{Ciencias } \cap \text{ Nota menor o igual a 8})}{P(\text{Nota menor o igual a 8})} =$$
$$= \frac{P(\text{Ciencias})P(\text{Nota menor o igual a 8 / Ciencias})}{1 - P(\text{Nota superior a 8})} = \frac{0.45 \cdot 0.9}{1 - 0.165} = \frac{0.405}{0.835} = \boxed{0.485}$$

6. Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =10 minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95% (1.25 ptos)

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

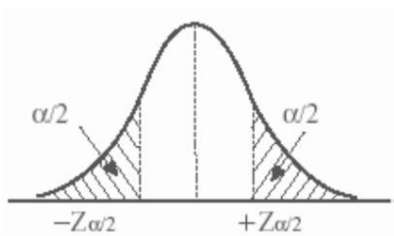
X = El tiempo que tarda un corredor en recorrer 6 kms.
X = N(μ, 10)
Tamaño de muestra = *n* = 10 corredores.

La media muestral es $\bar{x} = \frac{15+19+20+22+24+25+27+28+30+32}{10} = 24.2$

a) Nivel de confianza 95%

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.198$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(24.2 - 6.198, \quad 24.2 + 6.198\right) = \left(18.002, \quad 30.398\right)$$

b) Utilizando la fórmula del error y sabiendo que $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 19.6 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (19.6)^2 = 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra es 385 corredores.

Opción B

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar la función $F = 5x + 3y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 2y \leq 16 \quad ; \quad 5x + 4y \geq 38 \quad ; \quad 4y - x \geq 2$$

a) Dibuja la región factible (1 pto).
b) Determina los vértices de la región factible (0.25 ptos).
c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 ptos).

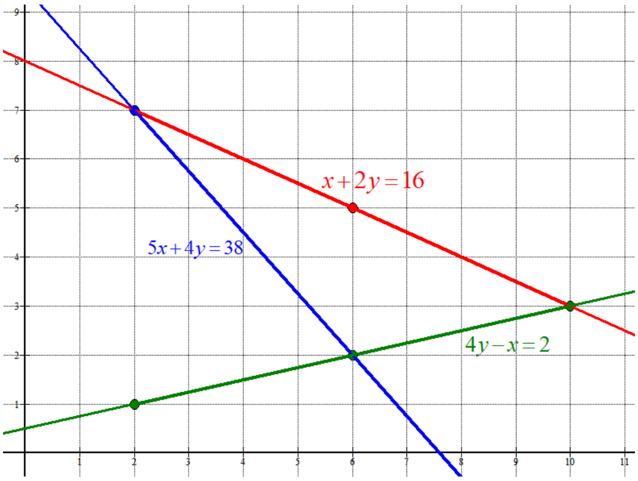
a) Para dibujar la región factible dibujamos las rectas que la delimitan y que proceden de convertir en igualdad las inecuaciones.

$x + 2y = 16$; $5x + 4y = 38$; $4y - x = 2$

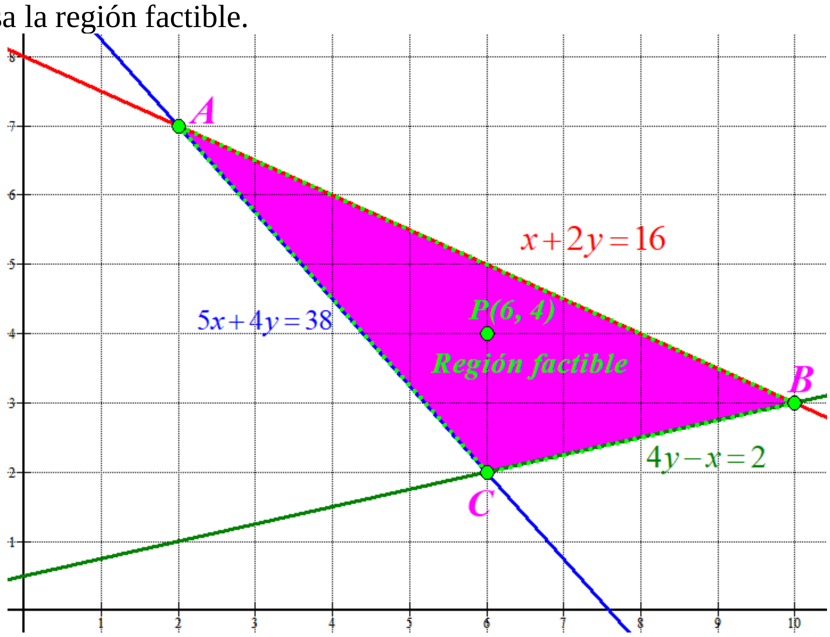
x	$y = \frac{16-x}{2}$
2	7
6	5
10	3

x	$y = \frac{38-5x}{4}$
2	7
6	2
10	–3

x	$y = \frac{2+x}{4}$
2	1
6	2
10	3



Como las restricciones son $x + \boxed{2y \leq} 16$; $5x + \boxed{4y \geq} 38$; $\boxed{4y} - x \boxed{\geq} 2$ la región factible está por debajo de la recta roja y por encima de la azul y la verde.
Coloreo de rosa la región factible.



Se puede comprobar que el punto P(6, 4) cumple todas las restricciones:
$6+8\leq 16$; $30+16\geq 38$; $24-4\geq 2$ Se cumplen y la región factible es correcta.

b) Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y C resolviendo los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas.

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=16 \\ 5x+4y=38 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=16-2y \\ 5x+4y=38 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5(16-2y)+4y=38 \Rightarrow 80-10y+4y=38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6y=-42 \Rightarrow \boxed{y=7} \Rightarrow \boxed{x=16-14=2} \Rightarrow \boxed{A(2,7)}$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=16 \\ 4y-x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=16-2y \\ 4y-x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4y-16+2y=2 \Rightarrow 6y=18 \Rightarrow \boxed{y=\frac{18}{6}=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=16-6=10} \Rightarrow \boxed{B(10,3)}$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+4y=38 \\ 4y-x=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+4y=38 \\ 4y-2=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5(4y-2)+4y=38 \Rightarrow 20y-10+4y=38 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 24y=48 \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{x=8-2=6} \Rightarrow \boxed{C(6,2)}$$

c) Averiguamos el mínimo de la función $F=5x+3y$ valorándola en cada uno de los vértices.

A(2,7) → $F(2,7)=5\cdot 2+3\cdot 7=31$
B(10,3) → $F(10,3)=5\cdot 10+3\cdot 3=59$
C(6,2) → $F(6,2)=5\cdot 6+3\cdot 2=36$

El valor mínimo de la función es 31 y se alcanza en el punto A de coordenadas (2,7).

2. Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "x" al número de pesas de 200 g, "y" al número de pesas de 100 g, "z" al número de pesas de 50 g.

"*Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas*" → $x+y+z=40$

"*El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g*" → $z=x+y+8$

"*Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g*" → $200x+100y+50z=3400$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ z=x+y+8 \\ 200x+100y+50z=3400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ -x-y+z=8 \\ 4x+2y+z=68 \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos por Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=40 \\ -x-y+z=8 \\ 4x+2y+z=68 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} -x & -y & +z & =8 \\ x & +y & +z & =40 \\ \hline & & 2z & =48 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 4 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 4x & +2y & +z & =68 \\ -4x & -4y & -4z & =-160 \\ \hline & -2y & -3z & =-92 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=40 \\ 2z=48 \\ -2y-3z=-92 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=40 \\ \boxed{z=\frac{48}{2}=24} \\ -2y-3z=-92 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+24=40 \\ -2y-3\cdot 24=-92 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=40-24=16 \\ -2y=-92+72=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=16 \\ \boxed{y=\frac{-20}{-2}=10} \end{array}\right\} \Rightarrow x+10=16 \Rightarrow \boxed{x=16-10=6}$$

Son 6 pesas de 200 gramos, 10 pesas de 100 g y 24 pesas de 50 gramos.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\leq 1\\ (x-2)^2+t & si\ x>1\end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 1$. (0.5 ptos)
b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función f. (1 pto)

a) Para que f sea continua en $x = 1$ deben ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=(1+2)^2=9 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x+2)^2=9 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-2)^2+t=(1-2)^2+t=1+t \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow 1+t=9\Rightarrow \boxed{t=8}$$

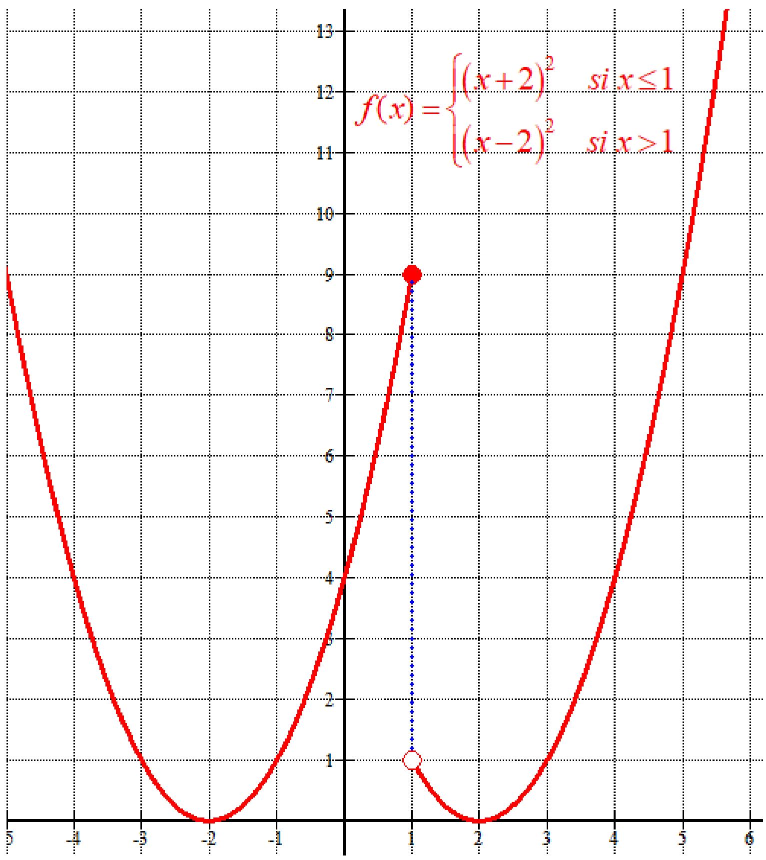
Para que sea continua en $x = 1$ el valor de t debe ser 8.

b) Para $t = 0$ la función queda $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x\leq 1\\ (x-2)^2 & si\ x>1\end{cases}$. Su gráfica son dos trozos de parábola.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica sabiendo que va a ser discontinua en $x = 1$.

$x\leq 1$	$y=(x+2)^2$
-2	0
-1	1
0	1
1	4

$x>1$	$y=(x-2)^2$
1	1 No se incluye
2	0
3	1
4	4



4. En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+36x+150$ donde $0\le x\le 16$ está en semanas y F(x) es la recaudación en cientos de euros. Se pide:

a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno (*x=0*) y cuál es la recaudación al final (*x=16*). (0.5 ptos)

b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 ptos)

c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 ptos)

a) Nos piden calcular F(0).

$F(0)=\frac{1}{3}0^3-\frac{15}{2}0^2+36\cdot 0+150=150$. La recaudación es de 15000 €.

b) Utilizamos la derivada y su signo.

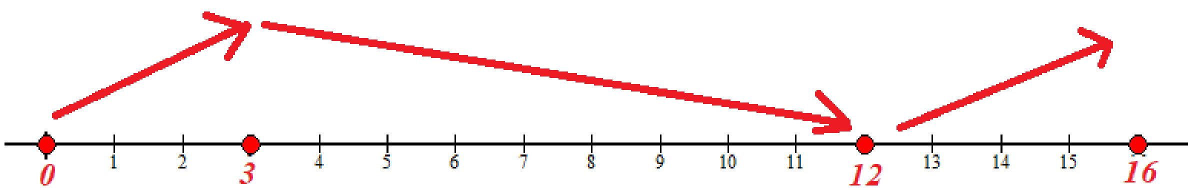
$$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{15}{2}x^2+36x+150 \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{3}3x^2-\frac{15}{2}2x+36=x^2-15x+36$$

$$F'(x)=0\Rightarrow x^2-15x+36=0\Rightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{(-15)^2-4(1)(36)}}{2}=\frac{15\pm 9}{2}=\begin{cases}\frac{15+9}{2}=12\\ \frac{15-9}{2}=3\end{cases}$$

Los dos valores obtenidos están en el intervalo $0\le x\le 16$ y son puntos críticos de la función. Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores.

- En el intervalo (0, 3) tomamos *x = 2* y la derivada vale $F'(2)=2^2-30+36=10>0$. La función crece en (0, 3).
- En el intervalo (3, 12) tomamos *x = 4* y la derivada vale $F'(4)=4^2-60+36=-8<0$. La función decrece en (3, 12).
- En el intervalo (12, 16) tomamos *x = 14* y la derivada vale $F'(14)=14^2-15\cdot 14+36=22>0$. La función crece en (12, 16).

La función F(x) sigue el siguiente esquema.



La función crece en $(0,3)\cup(12,16)$ y decrece en $(3,12)$.

c) Como se aprecia en el esquema la función alcanza un máximo relativo en *x = 3*, pero también alcanza una recaudación alta en *x = 16*. Estas recaudaciones son de:

$$\left.\begin{array}{l} F(3)=\frac{1}{3}3^3-\frac{15}{2}3^2+36\cdot 3+150=199.5 \\ F(16)=\frac{1}{3}16^3-\frac{15}{2}16^2+36\cdot 16+150=171.33 \end{array}\right\}$$ La recaudación máxima se produce a las 3 semanas y es de 19950 €.

La recaudación mínima se alcanza en el mínimo relativo $x = 12$ o en $x = 0$. Valoramos en cada punto.

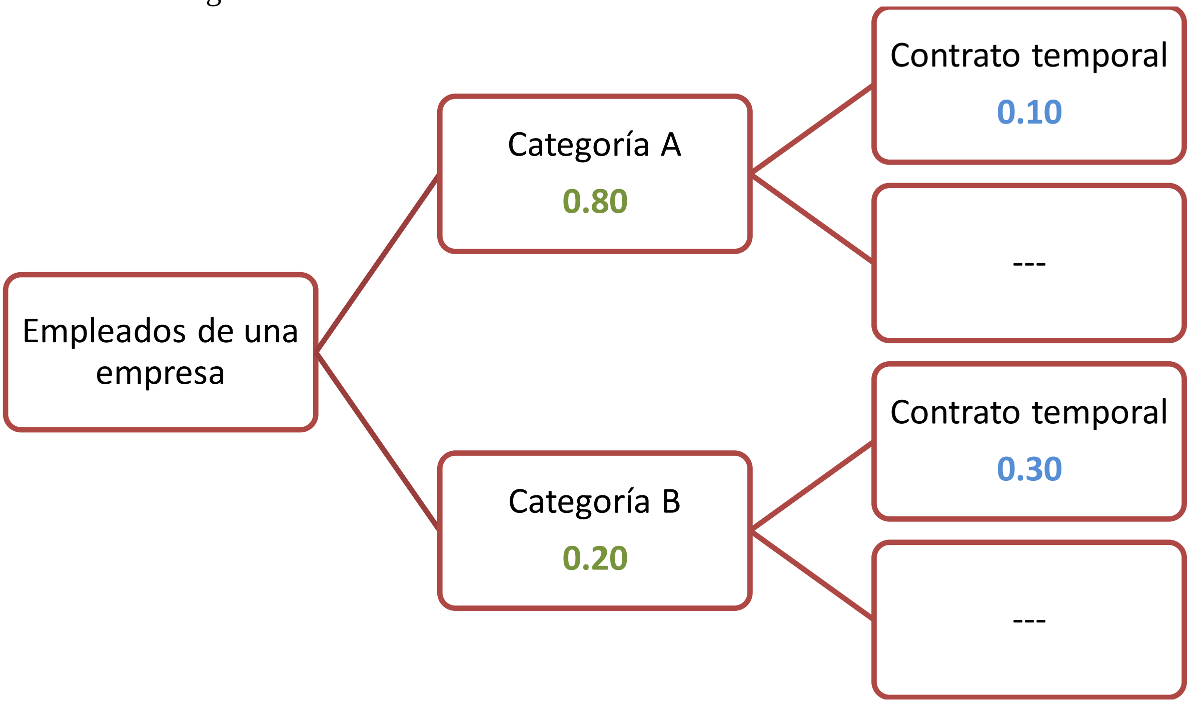
$$\left.\begin{array}{l} F(0)=\frac{1}{3}0^3-\frac{15}{2}0^2+36\cdot 0+150=150 \\ F(12)=\frac{1}{3}12^3-\frac{15}{2}12^2+36\cdot 12+150=78 \end{array}\right\}$$ La recaudación mínima se produce a las 12 semanas y es de 7800 €.

5. En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80% de los empleados y el resto en la B. El 10% de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.

a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)

b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

Hacemos un diagrama de árbol.



Con estos datos y utilizando el teorema de la probabilidad total y de Bayes respondemos a las preguntas.

a) Teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Contrato temporal}) =$$
$$= P(\text{Cat. A})P(\text{Contrato temporal / Cat. A}) + P(\text{Cat. B})P(\text{Contrato temporal / Cat. B}) =$$
$$= 0.80 \cdot 0.10 + 0.20 \cdot 0.30 = \boxed{0.14}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos teorema de Bayes.

$$P(\text{Cat. B / Contrato temporal}) = \frac{P(\text{Cat. B} \cap \text{Contrato temporal})}{P(\text{Contrato temporal})} = \frac{0.20 \cdot 0.30}{0.14} = \boxed{\frac{3}{7} = 0.42}$$

6. El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).

a) Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 ptos)

X = El gasto en teléfonos móviles e internet.
X = N(μ, 30)
Tamaño de muestra = *n* = 9 hogares.

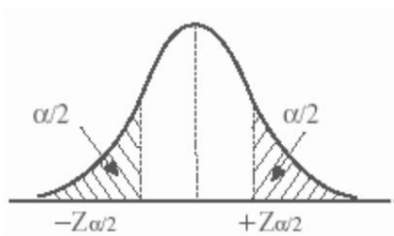
a) Como el intervalo de confianza sigue esta fórmula $\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right)=\left(128.3,\quad 171.7\right)$ podemos deducir que la media muestral es el valor central del intervalo.

$$\bar{x}=\frac{128.3+171.7}{2}=\frac{300}{2}=150\ €$$

También podemos deducir que el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error=\frac{171.7-128.3}{2}=\frac{43.4}{2}=21.7$$

La fórmula del error nos permitirá determinar el valor de $z_{\alpha/2}$



$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow 21.7=z_{\alpha/2}\cdot\frac{30}{\sqrt{9}}\Rightarrow 21.7=z_{\alpha/2}\cdot 10\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{21.7}{10}=2.17$$

Averiguamos el nivel de confianza.

$z_{\alpha/2}$ **= 2,17** → 1 – α/2 = 0,985 → …

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	$\boxed{0.9850}$	0.9854	0.9857

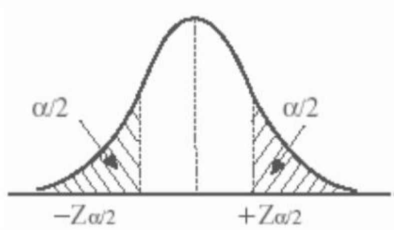
---→ α /2 = 0’015 → α = 0,03 →1 – α = 0,97

El nivel de confianza es del 97 %

b) Con una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 % averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ y del error.

1 – α = 0,966 → α = 0,034 → α /2 = 0’017 →1 – α /2 = 0,983 → $z_{\alpha/2}$ = **2.12**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	$\boxed{0.9830}$	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857



Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.12 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 6.36$$

El máximo error es de 6.36 €