Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 ptos)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).

2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x + 2t & si\ x \le 0 \\ (x+t)^3 - x & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en $x = 0$? (0.5 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

4. De la función $J(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor –2. Además, sabemos que tiene un punto de inflexión en (2, 0). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29% de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14% de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

b) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

6. El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1.2$ kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea $\mu = 5$ kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Opción B

1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.
El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.
a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 ptos)
c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 ptos)

2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+4)^2 & si\ x<-1\\ 4 & si\ -1\le x\le 1\\ (tx-6)^2 & si\ x>1\end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = 1$. (0.5 ptos)
b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función *f*. (1 pto)

4. Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función: $V(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{2}x^3$ donde *V(x)* está en Km/h y *x* en minutos, siendo $x\ge 0$ y $V(x)\ge 0$. Se pide:
a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 ptos).
b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 ptos).
c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 ptos).

5. Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.
a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 ptos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 ptos)
c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 ptos)

6. El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 7$ euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97% (1.25 ptos)

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

SOLUCIONES

Opción A

1. a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 ptos)

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).

a) Suponiendo que las matrices M y N son invertibles entonces podemos multiplicar por la inversa de dichas matrices y nos queda:

$$M \cdot X \cdot N = P \Rightarrow M^{-1} \cdot M \cdot X \cdot N \cdot N^{-1} = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow I \cdot X \cdot I = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1}}$$

b) Veamos si las matrices tienen inversa. Comprobamos que sus determinantes son no nulos.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 5 = 1 \neq 0$$

Calculamos sus inversas.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos lo obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}}$$

2. Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "x" al peso de la pesa más pesada, "y" a la intermedia, "z" a la menos pesada.

"*Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g*" → $8x+12y+20z=3800$

"*Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores*" → $y=\frac{x}{2}$

"*Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor*" → $4z=x$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 8x+12y+20z=3800 \\ y=\frac{x}{2} \\ 4z=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=950 \\ 2y=x \\ -x+4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=950 \\ -x+2y \qquad =0 \\ -x \qquad +4z=0 \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=950 \\ -x+2y \qquad =0 \\ -x \qquad +4z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y+5z=950 \\ -x+2y \qquad =0 \\ 4z=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8z+3y+5z=950 \\ -4z+2y \qquad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+13z=950 \\ -2z+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+13z=950 \\ y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow 6z+13z=950 \Rightarrow 19z=950 \Rightarrow \boxed{z=\frac{950}{19}=50} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{y=2\cdot 50=100} \\ \boxed{x=4\cdot 50=200} \end{array}\right.$$

Las pesas son de 200 gramos, 100 gramos y 50 gramos.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+2t & si\ x\leq 0 \\ (x+t)^3-x & si\ x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 0*? (0.5 ptos)
b) Para *t = 0*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)
c) Para *t = 0*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)

a) Para ser continúa en *x = 0* deben de ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0+2t=2t \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x+2t=2t \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} (x+t)^3-x=t^3 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow t^3=2t \Rightarrow t^3-2t=0 \Rightarrow t\left(t^2-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ o \\ t^2-2=0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

b) Para *t = 0* la función en el intervalo $(0,+\infty)$ tiene la expresión $f(x)=(x+0)^3-x=x^3-x$. Hallamos su derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

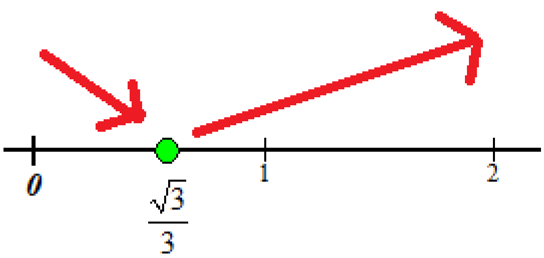
$$f(x)=x^3-x \Rightarrow f'(x)=3x^2-1$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

De estos dos valores solo pertenece al intervalo $(0,+\infty)$ el valor $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos *x = 0.1* y la derivada vale $f'(0.1)=3\cdot 0.1^2-1=-0.97<0$. La función decrece en $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- En $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=3\cdot 1^2-1=2>0$. La función crece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

La función sigue el siguiente esquema.



La función presenta un mínimo en $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Como $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{27}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ las coordenadas del mínimo son $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

c) Según el estudio realizado en el apartado anterior la función decrece en $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y crece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

4. De la función $J(x)=a\,x^4+b\,x^3+c\,x$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor –2. Además, sabemos que tiene un punto de inflexión en (2, 0). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)

Si en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor –2 significa que *J´(0) = –2*.

$$J(x)=a\,x^4+b\,x^3+c\,x \Rightarrow J\,'(x)=4a\,x^3+3b\,x^2+c$$
$$J\,'(0)=-2 \Rightarrow 4a\cdot 0^3+3b\cdot 0^2+c=-2 \Rightarrow \boxed{c=-2}$$

Con $c = -2$ la función queda $J(x)=a\,x^4+b\,x^3-2\,x$.

Si tiene un punto de inflexión en (2, 0) significa que *J´´(2) = 0*.

$$J\,'(x)=4a\,x^3+3b\,x^2-2 \Rightarrow J\,''(x)=12ax^2+6bx$$
$$J\,''(2)=0 \Rightarrow 12a\cdot 2^2+6b\cdot 2=0 \Rightarrow 48a+12b=0 \Rightarrow \boxed{4a+b=0}$$

Si tiene un punto de inflexión en (2, 0) significa que pasa por ese punto, es decir, *J(2) = 0*.

$$J(2)=0 \Rightarrow a\cdot 2^4+b\cdot 2^3-2\cdot 2=0 \Rightarrow 16a+8b=4 \Rightarrow \boxed{4a+2b=1}$$

Reunimos estas dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}4a+b=0\\4a+2b=1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=-4a\\4a+2b=1\end{array}\right\} \Rightarrow 4a+2(-4a)=1 \Rightarrow -4a=1 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{b=-4\frac{-1}{4}=1}$$

Los valores buscados son $a=-\frac{1}{4},\quad b=1 \quad y \quad c=-2$.

5. De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29% de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14% de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

b) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

a) Para simplificar la escritura llamamos A al suceso "superar los límites de alcohol en sangre" y D al suceso "tener presencia de drogas en sangre".

Como el 37% superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas entonces el restante 63% no supera los límites de alcohol ni tiene presencia de drogas en sangre.

Construimos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	D = Presencia de drogas en sangre	$\overline{D}$ = No presencia de drogas en sangre	
A = Supera los límites de alcohol en sangre	$A \cap D$	$A \cap \overline{D}$	**29**
$\overline{A}$ = No supera…	$\overline{A} \cap D$	**63** $\overline{A} \cap \overline{D}$	
	14		**100**

Completamos la tabla.

	D = Presencia de drogas en sangre	$\overline{D}$ = No presencia de drogas en sangre	
A = Supera los límites de alcohol en sangre	**6** $A \cap D$	**23** $A \cap \overline{D}$	**29**
$\overline{A}$ = No supera…	**8** $\overline{A} \cap D$	**63** $\overline{A} \cap \overline{D}$	**71**
	14	**86**	**100**

Nos piden calcular $P(A \cap D) = \frac{6}{100} = \boxed{0.06}$

b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A \cap D) = P(A)P(D)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(A \cap D) = 0.06 \\ P(A)P(D) = \frac{29}{100} \cdot \frac{14}{100} = 0.0406 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$$

No se cumple, por lo que tener presencia de drogas en sangre y superar los límites de alcohol en sangre no son independientes.

6. El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =1.2 kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea μ = 5 kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

X = Rendimiento por árbol de una especie de pistacho.

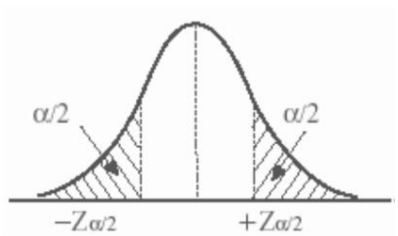
X = N(μ, 1.2)

Tamaño de muestra = n = 40 árboles. $Media\ muestral = \bar{x} = 6.7\ kilos$

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{40}} = 0.3719$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(6.7 - 0.3719, \quad 6.7 + 0.3719\right) = \left(6.3281, \quad 7.0719\right)$$

b) Cuando el nivel de confianza aumenta, también aumenta $z_{\alpha/2}$ luego crece la amplitud del intervalo; si el nivel de confianza disminuye, disminuye la amplitud del intervalo porque $z_{\alpha/2}$ disminuye. En la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se observa que el Error y $z_{\alpha/2}$ son proporcionales.

c) La media de 5 kilos no pertenece al intervalo calculado para un nivel de confianza del 95% $\left(6.3281, \quad 7.0719\right)$ y si disminuimos el nivel de confianza disminuiremos la amplitud del intervalo y la media de 5 kg seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza y seguirá siendo no admisible.

Opción B

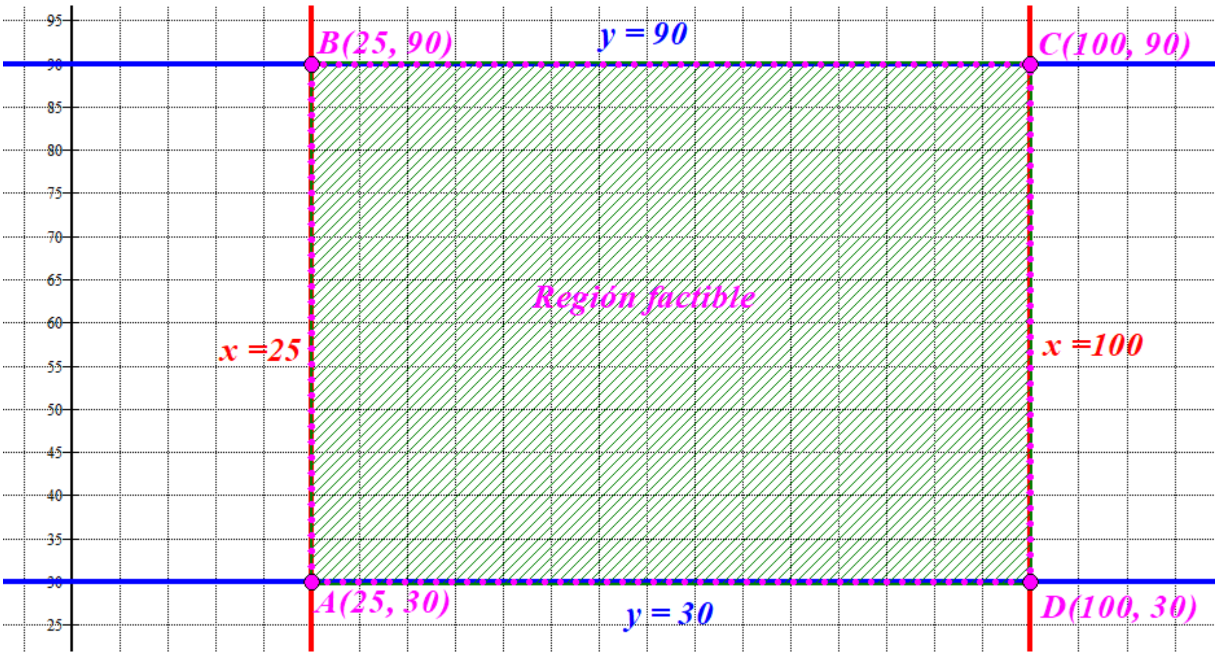
1. Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.
El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.
a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 ptos)
c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 ptos)

a) Llamamos "x" al número de sacos de cemento e "y" al número de sacos de yeso.

La función objetivo es el peso de todos los sacos. Y deseamos minimizarla.

$$P(x,y)=30x+20y$$

b) Las restricciones son:
"*El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100* " → $25 \le x \le 100$
"*El número de sacos de yeso estará entre 30 y 90*" → $30 \le y \le 90$
La región factible está entre las rectas verticales *x = 25* y *x = 100* y entre las líneas horizontales *y = 30* e *y = 90*.



c) Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

A(25, 30) → $P(25,30)=750+600=1350$

B(25, 90) → $P(25,90)=750+1800=2550$

C(100, 90) → $P(100,90)=3000+1800=4800$

D(100, 30) → $P(100,30)=3000+600=3600$

Se minimiza el peso en el punto A(25, 30). Significa transportar 25 sacos de cemento y 30 de yeso con un peso total de 1350 kilos.

2. A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "x" al precio de la entrada al estreno de cine, "y" al precio de la función teatral y "z" al precio de la entrada al concierto de música.

"*120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música han costado 6460 euros*" → $120x+50y+150z=6460$

"*El precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine*" → $2y=5x$

"*El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro*" → $2z=3y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 120x+50y+150z=6460 \\ 2y=5x \\ 2z=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x+5y+15z=646 \\ \frac{2}{5}y=x \\ z=\frac{3}{2}y \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos por sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} 12x+5y+15z=646 \\ \frac{2}{5}y=x \\ z=\frac{3}{2}y \end{array}\right\} \Rightarrow 12\cdot\frac{2}{5}y+5y+15\cdot\frac{3}{2}y=646 \Rightarrow \frac{24}{5}y+5y+\frac{45}{2}y=646 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48y+50y+225y=6460 \Rightarrow 323y=6460 \Rightarrow \boxed{y=\frac{6460}{323}=20} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=\frac{2}{5}\cdot 20=8} \\ \boxed{z=\frac{3}{2}\cdot 20=30} \end{array}\right.$$

Las soluciones son *x = 8*, *y = 20*, *z = 30*. Una entrada al estreno de cine cuesta 8 €, una a la función teatral vale 20 € y la entrada al concierto de música cuesta 30 €.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+4)^2 & si\ x<-1\\ 4 & si\ -1\le x\le 1\\ (tx-6)^2 & si\ x>1\end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en *x* = *1*. (0.5 ptos)
b) Para *t* = *2*, representa gráficamente la función *f*. (1 pto)

a) Para que sea continua en *x* = *1* deben de ser iguales el valor de la función y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=4\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 4=4\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(tx-6)^2=(t-6)^2\end{array}\right\}\Rightarrow (t-6)^2=4\Rightarrow\begin{cases}t-6=2\Rightarrow \boxed{t=8}\\ o\\ t-6=-2\Rightarrow \boxed{t=4}\end{cases}$$

La función es continua en *x* = *1* para *t* = *8* y también para *t* = *4*.

b) Para *t* = *2* la función queda $f(x)=\begin{cases}(x+4)^2 & si\ x<-1\\ 4 & si\ -1\le x\le 1\\ (2x-6)^2 & si\ x>1\end{cases}$.

Es una función definida a trozos. Hay un trozo de parábola, un trozo de recta horizontal y otro trozo de otra parábola. Hacemos una tabla de valores para poder representarla.

Si $x<1$

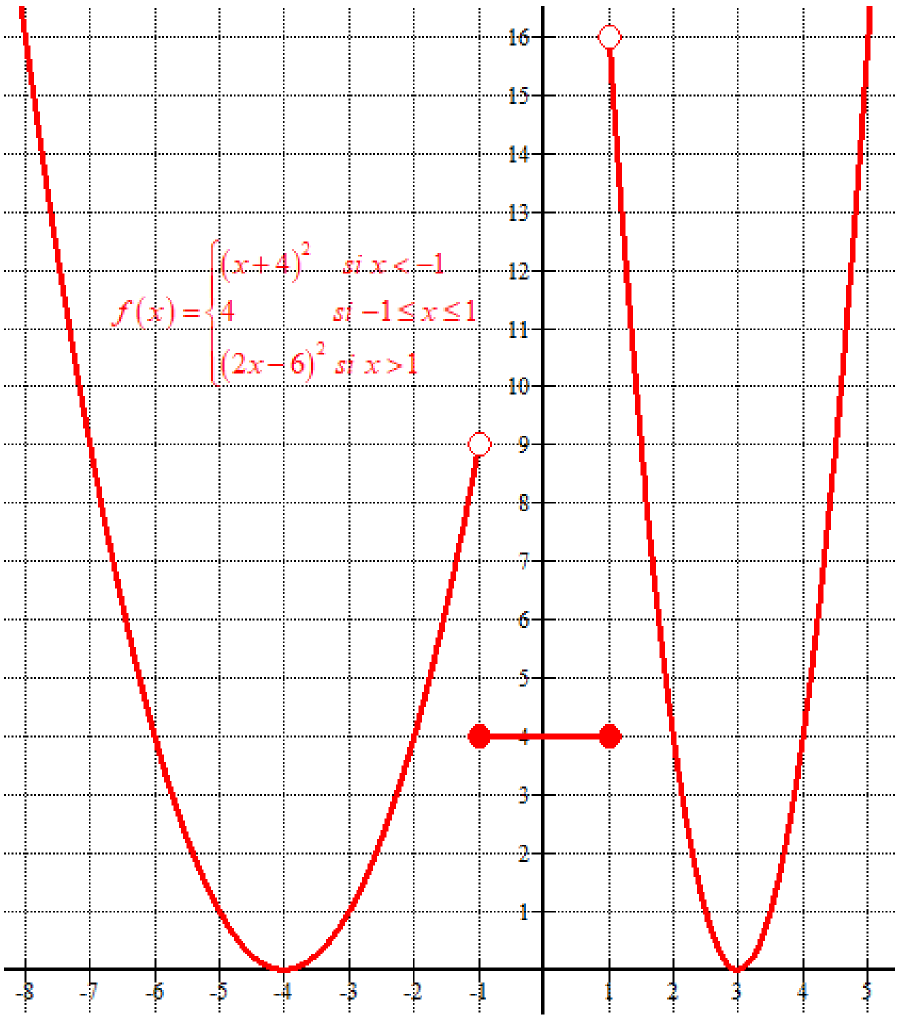
x	$y=(x+4)^2$
–4	0
–3	1
–2	4
0	16
1	25 No se incluye

Si $-1\le x\le 1$

x	$y=4$
–1	4
0	4
1	4

Si $x>1$

x	$y=(2x-6)^2$
1	16 No se incluye
2	4
3	0
4	16



4. Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función: $V(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{2}x^3$ donde *V(x)* está en Km/h y *x* en minutos, siendo $x\geq 0$ y $V(x)\geq 0$. Se pide:

a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 ptos).
b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 ptos).
c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 ptos).

a) Nos piden que averigüemos cuando la función V(x) se anula.

$$V(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{2}x^3=0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^3\left(-\frac{1}{10}x+1\right)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -\frac{1}{10}x+1=0 \Rightarrow -x+10=0 \Rightarrow x=10 \end{cases}$$

El ciclista tarda 10 minutos en pararse tras completar la primera vuelta.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$V(x)=-\frac{1}{20}x^4+\frac{1}{2}x^3 \Rightarrow V'(x)=-\frac{4}{20}x^3+\frac{3}{2}x^2=-\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

$$V'(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{2}x^2=0 \Rightarrow -2x^3+15x^2=0 \Rightarrow x^2(-2x+15)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -2x+15=0 \Rightarrow x=\frac{15}{2}=7.5 \end{cases}$$

Comprobamos el signo de la derivada entre 0 y 7.5, asi como después de 7.5.

- En $(0,7.5)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $V'(1)=-\frac{1}{5}1^3+\frac{3}{2}1^2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}=1.3>0$. La velocidad crece en $(0,7.5)$
- En $(7.5,10)$ tomamos *x = 8* y la derivada vale $V'(8)=-\frac{1}{5}8^3+\frac{3}{2}8^2=-6.4<0$. La velocidad decrece en $(7.5,10)$

La velocidad crece del principio (*x = 0*) hasta el minuto 7.5 y luego decrece hasta acabar la vuelta (10 minutos).

c) La velocidad máxima la alcanza en el minuto 7.5, pues en dicho momento deja de crecer la velocidad y empieza a disminuir hasta el final.

La velocidad máxima es de $V(7.5)=-\frac{1}{20}7.5^4+\frac{1}{2}7.5^3=52.73$. La velocidad máxima es de 52.73 km/h.

5. Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.

a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 ptos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 ptos)

a) P(Dos personas fumadoras padezcan cancer) = P(Padezca cáncer la 1ª) · P(Padezca cáncer la 2ª) =

$= 0.1 \cdot 0.1 = \boxed{0.01}$

b) P(al menos 1 persona padezca cáncer de 4 fumadores) = P(Padezca cáncer 1, 2, 3 o 4 de los 4 fumadores) = 1 – P(0 personas padezca cáncer de 4 fumadores) = $1 - 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = \boxed{0.3439}$

c) P(Una persona padezca cáncer de dos que fuman habitualmente) = P(Padezca cáncer la 1ª y no la 2ª) + P(Padezca cáncer la 2ª y no la 1ª) = $0.1 \cdot 0.9 + 0.1 \cdot 0.9 = \boxed{0.18}$

6. El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =7 euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97% (1.25 ptos)

b) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 ptos)

X = El gasto mensual en electricidad.
X = N(μ, 7)

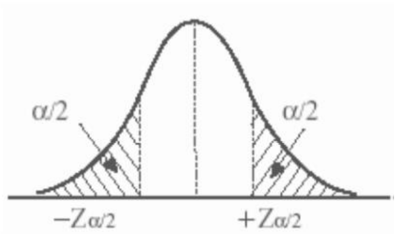
Tamaño de muestra = *n* = 10 hogares.

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{25+29+30+32+24+28+31+32+33+32}{10} = 29.6\ €$$

a) Nivel de confianza 97%

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	$\boxed{0.9850}$	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{7}{\sqrt{10}} = 4.803$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(29.6 - 4.803, \quad 29.6 + 4.803\right) = \left(24.797, \quad 34.403\right)$$

b) Con nivel de confianza 97% tenemos que $z_{\alpha/2}$ **= 2,17.**

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.17 \cdot \frac{7}{2} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(2.17 \cdot \frac{7}{2}\right)^2 = 57.68$$

Para que el error sea menor de 2 el tamaño de la muestra debe ser como mínimo de 58 hogares.