Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2018

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.
El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:
a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)
c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 ptos)

2. Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:
Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.
Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4x-t & si\ x\leq 1 \\ (x-2)^2+t & si\ x>1 \end{cases}$
a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en $x = 1$? (0.5 ptos)
b) Para $t = 0$, representa gráficamente la función *f*. (1 pto)

4. De la función $G(x)=ax^3+bx^2+cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en (2, - 44) y un mínimo relativo en el punto de abscisa ($x=6$). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c (1.5 ptos).

5. En un municipio el 40% de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.
a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)
b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 ptos)

6. Se desea investigar la resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ

=15 Kg/cm^2. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de 110 Kg/cm^2.
a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
b) Explica razonadamente el efecto que tendrá sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)
c) ¿Se puede admitir que la media de resistencia μ del material pueda ser de 111 kg/cm^2 con una confianza del 95%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Propuesta B

1. a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$. (0.75 ptos)
b) Calcula A^3 y A^4. (0.75 ptos)

2. Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x|+5t & si\ x \le 0 \\ (x+t)^2 - 10x & si\ x > 0 \end{cases}$
a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x=0*? (0.5 ptos)
b) Para *t = 2*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)
c) Para *t = 2*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)

4. Cierto club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función: $S(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - 54x + 180$
Donde *x* está en años, con $0 \le x \le 25$, y S(x) está en cientos de socios. Se pide:
a) Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio (*x = 0*) y cuántos en este momento (*x = 25*). (0.5 ptos)
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años. (0.5 ptos)
c) Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos. (0.5 ptos)

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.
a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta? (0.75 ptos)

6. Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 4$ días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.
a) Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)
c) ¿Crees que la media poblacional μ del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Propuesta A

1. En una nave industrial se realiza el montaje de dos tipos de bicicletas: de paseo y de montaña. Para cada jornada de trabajo tenemos las siguientes restricciones: El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2. El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6. Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9.
El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas. Pretendemos cumplir todas las condiciones expuestas en un tiempo mínimo. Para ello se pide:
a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.5 ptos)
c) Halla el número de bicicletas de cada clase que se deben montar para que se cumplan todas las condiciones en un tiempo mínimo, y calcula cuál será ese tiempo mínimo. (0.75 ptos)

a) Llamamos "x" al número de bicicletas de paseo montadas e "y" al número de bicicletas de montaña montadas.

"El montaje de una bicicleta de paseo precisa una hora, mientras que el de una bicicleta de montaña necesita dos horas" → $T(x,y)=x+2y$

El objetivo es minimizar el tiempo necesario para fabricar las bicicletas. Buscamos minimizar la función $T(x,y)=x+2y$.

b) Las restricciones son:

"*El número de bicicletas de paseo montadas debe estar entre 1 y 2*" → $1\le x\le 2$
"*El número de bicicletas de montaña montadas debe estar entre 3 y 6*" → $3\le y\le 6$
"*Si al triple de bicicletas de paseo montadas sumamos el número de bicicletas de montaña montadas, el resultado debe ser al menos 9*" → $3x+y\ge 9$

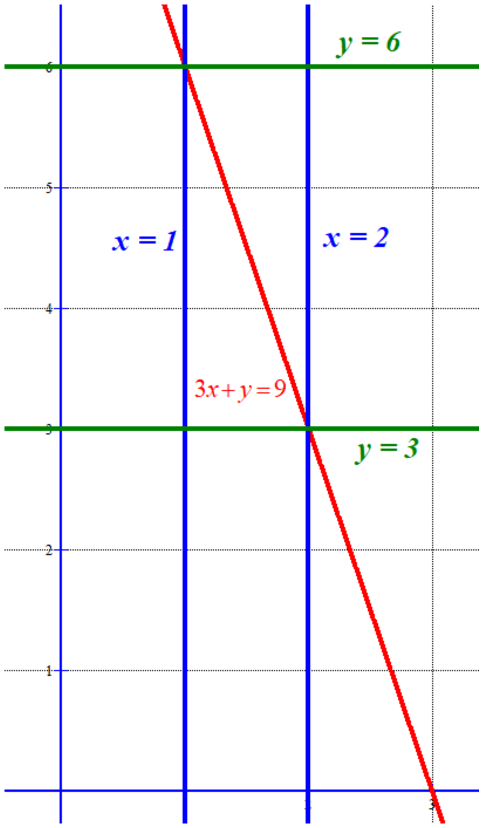
Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 1\le x\le 2 \\ 3\le y\le 6 \\ 3x+y\ge 9 \end{array}\right\}$$

Dibujamos cada una de las rectas que limitan la región factible o región que cumple todas las inecuaciones.

$x=1;\ x=2$ Rectas verticales

$y=3;\ y=6$ Rectas horizontales

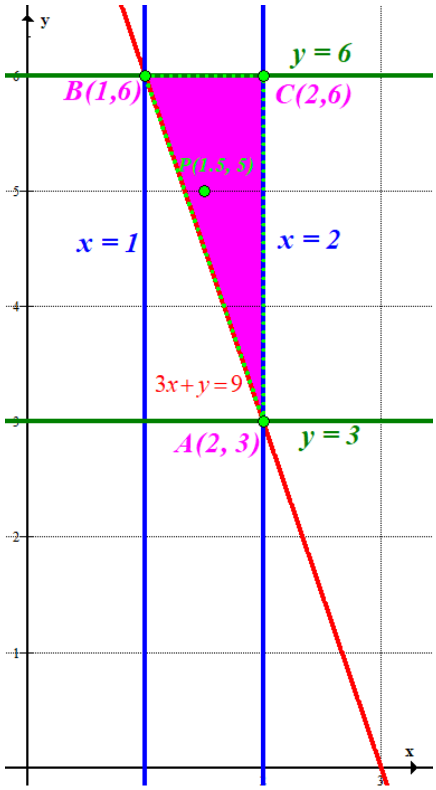


$3x+y=9$

x	$y=9-3x$
0	9
1	6
2	3

Como la región está en el rectángulo encerrado entre las líneas azules y verdes y además está por encima de la recta roja, la región factible es el triángulo que coloreo de rosa en el siguiente dibujo.

$$\left.\begin{array}{l} 1\le x\le 2 \\ 3\le y\le 6 \\ 3x+y\ge 9 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$



c) Valoramos la función $T(x,y)=x+2y$ en cada uno de los vértices, en busca del valor mínimo del tiempo de montaje de las bicicletas cumpliendo las restricciones pedidas.

A(2,3) → $T(2,3)=2+6=8$

B(1,6) → $T(1,6)=1+12=13$

C(2,6) → $T(2,6)=2+12=14$

El tiempo mínimo son 8 horas que se alcanzan en el punto A(2,3) que significa montar 2 bicicletas de paseo y 3 de montaña.

2. Las acciones de tres empresas, A, B y C, tienen los siguientes valores:
Empresa A: 20 euros por acción; Empresa B: 25 euros por acción; Empresa C: 40 euros por acción.
Hemos gastado 7000 euros en comprar acciones de estas tres empresas. Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C. En total hemos comprado 255 acciones, exclusivamente de estas tres empresas.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas acciones hemos comprado de cada empresa. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "a" al número de acciones de la empresa A, "b" a las de B y "c" a las de C.

"*En total hemos comprado 255 acciones*" → $a+b+c=255$

"*Las acciones compradas de la empresa A son la mitad de la suma de las compradas de B y C*" → $a=\dfrac{b+c}{2}$

"*Ha gastado 7000 € y una acción de la empresa A cuesta 20 €, una de B cuesta 25 € y una de C cuesta 40 €*" → $7000=20a+25b+40c$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=255 \\ a=\dfrac{b+c}{2} \\ 7000=20a+25b+40c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=255 \\ 2a=b+c \\ 20a+25b+40c=7000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=255 \\ 2a-b-c=0 \\ 4a+5b+8c=1400 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=255 \\ 2a-b-c=0 \\ 4a+5b+8c=1400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2a & -b & -c & =0 \\ -2a & -2b & -2c & =-510 \\ \hline & -3b & -3c & =-510 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 4 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 4a & +5b & +8c & =1400 \\ -4a & -4b & -4c & =-1020 \\ \hline & b & +4c & =380 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +b \ +c=255 \\ -3b-3c=-510 \\ b+4c=380 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 \cdot \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrr} 3b & +12c & = & 1140 \\ -3b & -3c & = & -510 \\ \hline & 9c & = & 630 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +b \ +c=255 \\ -3b-3c=-510 \\ 9c=630 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +b \ +c=255 \\ -3b-3c=-510 \\ \boxed{c=70} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +b \ +70=255 \\ -3b-210=-510 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a \quad +b=185 \\ -3b=-300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b=185 \\ \boxed{b=100} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+100=185 \Rightarrow \boxed{a=85}$$

Hemos comprado 85 acciones de A, 100 de B y 70 de C.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}4x-t & si\ x\le 1\\ (x-2)^2+t & si\ x>1\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 ptos)
b) Para *t = 0*, representa gráficamente la función *f*. (1 pto)

a) Para que la función *f(x)* sea continua en *x = 1* debe cumplirse que los límites laterales coincidan con el valor de la función en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=4-t \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 4x-t=4-t \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} (x-2)^2+t=1+t \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 4-t=1+t \Rightarrow 3=2t \Rightarrow \boxed{t=\frac{3}{2}}$$

El valor buscado es $t=\frac{3}{2}$

b) Para *t = 0* la función no es continua y queda $f(x)=\begin{cases}4x & si\ x\le 1\\ (x-2)^2 & si\ x>1\end{cases}$

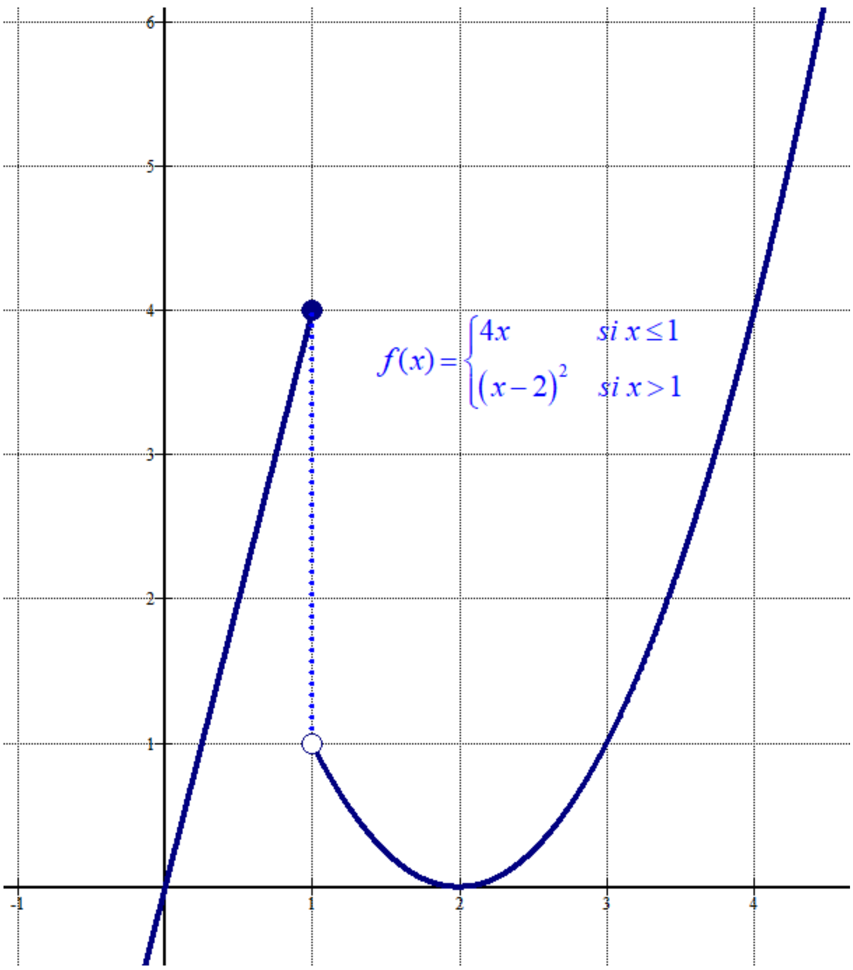
Es un trozo de parábola y un trozo de recta.

$f(x)=4x \quad (x\le 1)$

x	$y=4x$
-1	-4
0	0
1	4 Si se incluye

$f(x)=(x-2)^2 \quad (x>1)$

x	$y=(x-2)^2$
1	1 No se incluye
2	0
3	1
4	4



4. De la función $G(x)=ax^3+bx^2+cx$ sabemos que tiene un punto de inflexión en (2, - 44) y un mínimo relativo en el punto de abscisa ($x=6$). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c (1.5 ptos).

La función $G(x)=ax^3+bx^2+cx$ pasa por el punto (2, - 44) y por tanto se cumple:

$$G(2)=-44 \Rightarrow a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2=-44 \Leftarrow 8a+4b+2c=-44 \Rightarrow \boxed{4a+2b+c=-22}$$

La función $G(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$ por lo que se anula la derivada segunda.

$$G(x)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow G'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow G''(x)=6ax+2b$$

$$\left.\begin{array}{l} G''(x)=6ax+2b \\ G''(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=12a+2b \Rightarrow 6a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=-6a}$$

En $x = 6$ la función tiene un mínimo relativo, por lo que la derivada primera se anula en $x = 6$.

$$G(x)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow G'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\left.\begin{array}{l} G'(x)=3ax^2+2bx+c \\ G'(6)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3a\cdot 6^2+2b\cdot 6+c \Rightarrow \boxed{108a+12b+c=0}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2b+c=-22 \\ b=-6a \\ 108a+12b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+2(-6a)+c=-22 \\ 108a+12(-6a)+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a-12a+c=-22 \\ 108a-72a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -8a+c=-22 \\ 36a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=8a-22 \\ 36a+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 36a+8a-22=0 \Rightarrow 44a-22=0 \Rightarrow \boxed{a=\frac{22}{44}=\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=8\cdot\frac{1}{2}-22=-18 \\ b=-6\frac{1}{2}=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \\ c=-18 \end{array}\right. \Rightarrow G(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2-18x}$$

5. En un municipio el 40% de los habitantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.
a) Se elige un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? (0.75 ptos)
b) Si elegimos un habitante al azar y le gusta el cine, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura? (0.75 ptos)

Realizamos una tabla de contingencia. Como al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas entonces al 30% restante no le gusta ni el cine ni la lectura.

	Aficionado a la lectura (L)	No aficionado a la lectura ($\overline{L}$)	
Aficionado al cine (C)	$C\cap L$	$C\cap\overline{L}$	**50**
No aficionado al cine ($\overline{C}$)	$\overline{C}\cap L$	**30** $\overline{C}\cap\overline{L}$	
	40		**100**

Completamos los valores que faltan en la tabla, teniendo en cuenta que la suma de los dos primeros elementos de cada fila o columna debe darnos el tercer elemento de la fila o columna.

	Aficionado a la lectura (L)	No aficionado a la lectura ($\overline{L}$)	
Aficionado al cine (C)	***20*** $C\cap L$	***30*** $C\cap\overline{L}$	**50**
No aficionado al cine ($\overline{C}$)	***20*** $\overline{C}\cap L$	**30** $\overline{C}\cap\overline{L}$	***50***
	40	***60***	**100**

Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de las probabilidades pedidas.

a) $P(\text{Le gusta el cine y la lectura})=\frac{20}{100}=\boxed{0,2}$

b) $P(\text{Le guste la lectura / Le gusta el cine})=\frac{\text{Nº de aficionados al cine y la lectura}}{\text{Nº de aficionados al cine}}=\frac{20}{50}=\boxed{0,4}$

6. Se desea investigar la resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor, se sabe que esa resistencia sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =15 Kg/cm^2. Se tomó una muestra aleatoria de 400 elementos de ese material y se comprobó que la resistencia media de dicha muestra era de 110 Kg/cm^2.
a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la resistencia de ese material, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
b) Explica razonadamente el efecto que tendrá sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)
c) ¿Se puede admitir que la media de resistencia μ del material pueda ser de 111 kg/cm^2 con una confianza del 95%? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

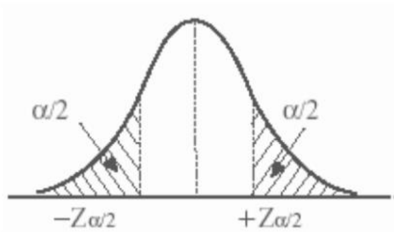
X = Resistencia en Kg/cm^2 de cierto material suministrado por un proveedor.
X = N(μ, 15)

Tamaño de muestra = n = 400 elementos. $Media\ muestral = \bar{x} = 110\ kg/cm^2$

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}} = 1.47$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(110 - 1.47,\quad 110 + 1.47\right) = \left(108.53,\quad 111.47\right)$$

b) Cuando el nivel de confianza aumenta, también aumenta $z_{\alpha/2}$ luego crece la amplitud del intervalo; si el nivel de confianza disminuye, disminuye la amplitud del intervalo porque $z_{\alpha/2}$ disminuye. En la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ se observa que el Error y $z_{\alpha/2}$ son proporcionales.

c) Se puede admitir que la media sea 111 Kg/cm^2 porque ese valor pertenece al intervalo calculado $\left(108.53,\quad 111.47\right)$.

Propuesta B

1. a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ se pide que compruebes que su cuadrado coincide con su inversa, es decir: $A^2 = A^{-1}$. (0.75 ptos)

b) Calcula A^3 y A^4. (0.75 ptos)

a) Calculamos su cuadrado y su inversa y los comparamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-7 & 14-21 \\ -2+3 & -7+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-6+7=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=A^{-1}}$$

b)

$$A^2=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6+7 & -21+21 \\ 2-2 & 7-6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=A$$

2. Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C. El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A. El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor de una acción de cada una de las empresas mencionadas. (1.5 ptos)
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

a) Llamamos "a" al valor de una acción de la empresa A, "b" al de la empresa B y "c" al de C.

"*Hemos gastado 7000 euros en comprar 85 acciones de la empresa A, 100 acciones de la empresa B y 70 acciones de la empresa C*" → $85a+100b+70c=7000$

"*El valor de una acción de la empresa C es el doble que el de una acción de la empresa A*" → $c=2a$

"*El valor de una acción de la empresa B supera en 5 euros al de una acción de la empresa A*" → $b=5+a$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 85a+100b+70c=7000 \\ c=2a \\ b=5+a \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema por sustitución.

$$\left.\begin{array}{l} 85a+100b+70c=7000 \\ c=2a \\ b=5+a \end{array}\right\} \Rightarrow 85a+100(5+a)+70\cdot 2a=7000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 85a+500+100a+140a=7000 \Rightarrow 325a=6500 \Rightarrow \boxed{a=20} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=40} \\ \boxed{b=5+20=25} \end{cases}$$

Las acciones de la empresa A valen 20 € cada una, 25 € cada una de B y 40 € cada una de C.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x|+5t & si\ x\leq 0 \\ (x+t)^2-10x & si\ x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x=0*? (0.5 ptos)
b) Para *t = 2*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)
c) Para *t = 2*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$. (0.5 ptos)

a) Para que sea continua deben de coincidir los límites laterales y el valor de la función en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=5t \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x|+5t=|0|+5t=5t \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+t)^2-10x=t^2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow 5t=t^2 \Rightarrow t^2-5t=0 \Rightarrow t(t-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ o \\ t=5 \end{cases}$$

La función es continua para *t = 0* y para *t = 5*.

b) Para *t = 2* la función queda $f(x)=\begin{cases} |x|+10 & si\ x\leq 0 \\ (x+2)^2-10x=x^2+4x+4-10x=x^2-6x+4 & si\ x>0 \end{cases}$

En el intervalo $(0,+\infty)$ la función se reduce a $f(x)=x^2-6x+4$. Es una parábola. Tendrá un máximo o un mínimo, lo investigamos haciendo uso de la derivada.

$$f(x)=x^2-6x+4 \Rightarrow f'(x)=2x-6$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow \boxed{x=3}$$

x = 3 es un máximo o mínimo relativo, lo averiguamos usando la segunda derivada.

$$f'(x)=2x-6 \Rightarrow f''(x)=2$$
$$f''(3)=2>0 \Rightarrow x=3 \text{ es un mínimo relativo}$$

c) Para *t = 2* y en el intervalo $(0,+\infty)$ la función queda $f(x)=x^2-6x+4$. De esta función ya hemos encontrado un mínimo relativo en *x = 3*.
Por ello la función decrece en $(0,3)$ y crece en $(3,+\infty)$

4. Cierto club de fútbol acaba de cumplir 25 años de existencia. A lo largo de este tiempo su número de socios se ha ajustado a la función: $S(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{21}{2}x^2-54x+180$

Donde x está en años, con $0\leq x\leq 25$, y S(x) está en cientos de socios. Se pide:

a) Calcula cuántos socios tiene el club en su inicio (*x = 0*) y cuántos en este momento (*x = 25*). (0.5 ptos)

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento del número de socios a lo largo de estos 25 años. (0.5 ptos)

c) Determina cuándo ha tenido el club su número máximo de socios y su número mínimo de socios, y cuántos socios tuvo en cada uno de esos momentos. (0.5 ptos)

a) $S(0)=-\frac{1}{3}0^3+\frac{21}{2}0^2-54\cdot 0+180=180 \Rightarrow 18000$ socios

$S(25)=-\frac{1}{3}25^3+\frac{21}{2}25^2-54\cdot 25+180=184.166....\Rightarrow 18417$ socios

b)

$$S(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{21}{2}x^2-54x+180 \Rightarrow S'(x)=-x^2+21x-54$$

$$S'(x)=0\Rightarrow -x^2+21x-54=0\Rightarrow x=\frac{-21\pm\sqrt{21^2-4(-1)(-54)}}{-2}$$

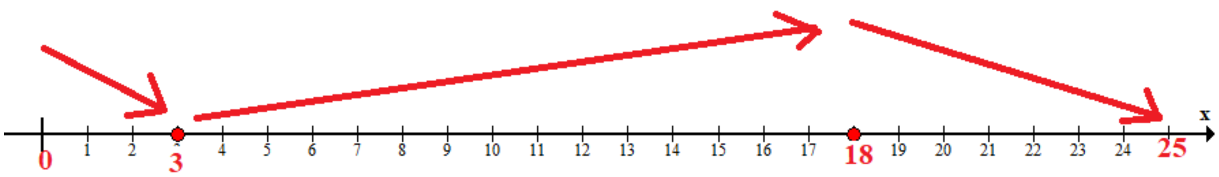
$$x=\frac{-21\pm 15}{-2}=\begin{cases}\frac{-21+15}{-2}=3\\ \frac{-21-15}{-2}=18\end{cases}$$

Los puntos críticos del número de socios están en *x = 3* y en *x = 18*.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores.

- En (0, 3) tomamos *x = 2* y la derivada vale $S'(2)=-2^2+21\cdot 2-54=-16<0$. La función decrece en (0, 3).
- En (3, 18) tomamos *x = 10* y la derivada vale $S'(10)=-10^2+210-54=56>0$. La función crece en (3, 18).
- En (18, 25) tomamos *x = 20* y la derivada vale $S'(20)=-20^2+420-54=-34<0$. La función decrece en (18, 25).

La variación del crecimiento y decrecimiento de la función sigue el esquema siguiente:



La función *S(x)* decrece en $(0,3)\cup(18,25)$ y crece en $(3,18)$

c) Observando el esquema anterior *S(x)* tiene un mínimo en *x = 3* y un máximo en *x = 18*. Como

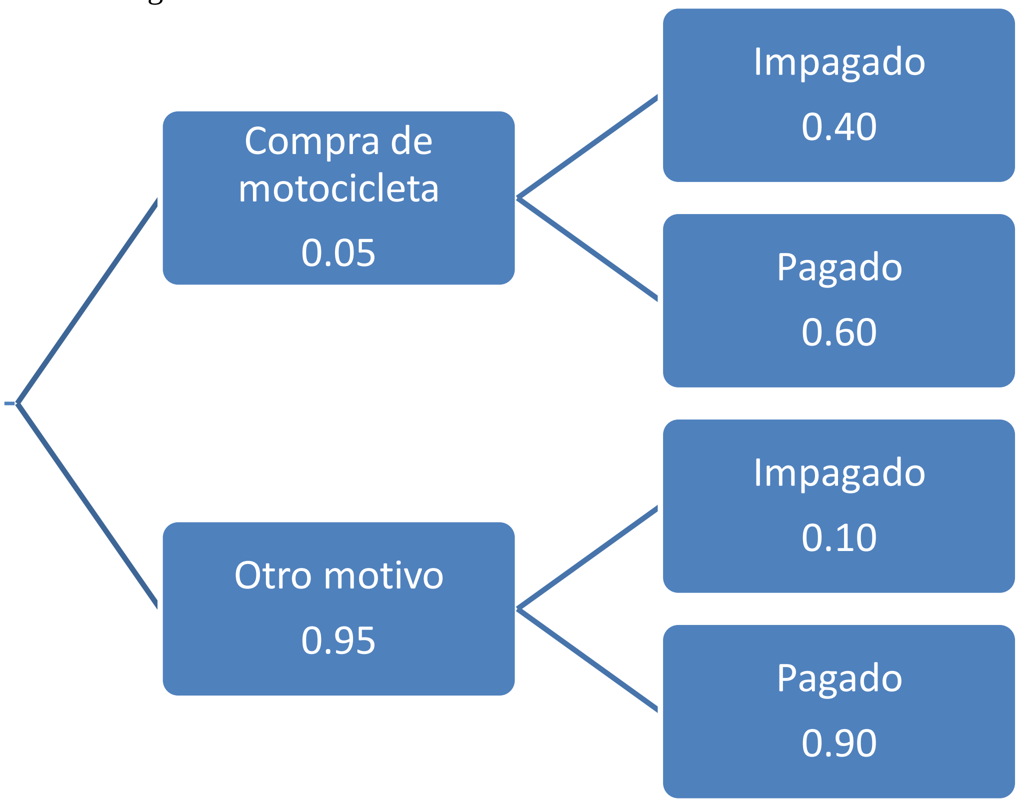
$$S(3) = -\frac{1}{3}3^3 + \frac{21}{2}3^2 - 54 \cdot 3 + 180 = 103.5 \Rightarrow 10350 \ socios$$

$$S(18) = -\frac{1}{3}18^3 + \frac{21}{2}18^2 - 54 \cdot 18 + 180 = 666 \Rightarrow 66600 \text{ socios}$$

A los 3 años se produce un número mínimo de socios (10350 socios) y a los 18 años se produce un número máximo de socios (66600 socios).

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una motocicleta. De los créditos concedidos para la compra de una motocicleta, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una motocicleta, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.
a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. (0.75 ptos)
b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una motocicleta? (0.75 ptos)

Construimos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Impagado}) = P(\text{Crédito moto})P(\text{Impagado / Crédito moto}) +$$
$$+P(\text{Otro crédito})P(\text{Impagado / Otro crédito}) =$$
$$= 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = \boxed{0.115}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Crédito moto / Pagado}) = \frac{P(\text{Crédito moto} \cap \text{Pagado})}{P(\text{Pagado})} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.6}{1 - 0.115} = \frac{0.030}{0.885} = \frac{30}{885} = \boxed{\frac{2}{59} = 0.0339}$$

6. Una empresa quiere estudiar cada cuánto tiempo los clientes vuelven a comprar ropa de su marca, sabe que el tiempo entre compras se distribuye según una normal de media desconocida y desviación típica σ = 4 días. Se tomó una muestra aleatoria de 10 clientes y se comprobó que el tiempo hasta la siguiente compra fue de 50, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 68 y 71 días respectivamente.
a) Halla el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo entre compras de esta marca, con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)
b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza. (0.5 ptos)
c) ¿Crees que la media poblacional μ del tiempo entre compras puede ser 64 días con una probabilidad del 99 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

X = Días que tarda un cliente en comprar de nuevo ropa de cierta marca.
X = N(μ, 4)

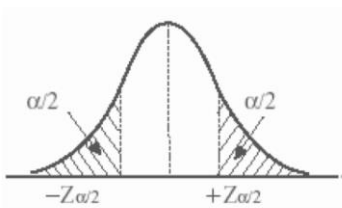
Tamaño de muestra = *n* = 10 clientes.

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{50+58+59+60+62+63+64+65+68+71}{10} = 62\ días$$

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
$\boxed{1.9}$	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = 2.48$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(62 - 2.48, \quad 62 + 2.48\right) = \left(59.52, \quad 64.48\right)$$

b) Para disminuir la amplitud del intervalo de confianza, con el mismo nivel de confianza debemos de disminuir el error y en su fórmula solo aparecen 3 conceptos: $z_{\alpha/2}$ que depende del nivel de confianza, la desviación típica que no puede cambiar y "n" el tamaño de la muestra.
Aumentando el tamaño de la muestra disminuye la amplitud del intervalo de confianza, pues "n" está en el denominador de la fórmula del error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c) La media de 64 días pertenece al intervalo de confianza calculado con un nivel de confianza del 95%, si aumentamos el nivel de confianza a 99% aumentaremos la amplitud del intervalo y 64 días seguirá estando en el intervalo de confianza.