Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2018
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:
Minimizar la función $F=-x+6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$x+7y\le 58 \quad ; \quad 4x+5y\ge 48 \quad ; \quad 3x-2y\le 13$$

a) Dibuja la región factible. *(1 pto)*
b) Determina los vértices de la región factible. *(0.25 ptos)*
c) Indica la solución óptima del problema y su valor. *(0.25 ptos)*

2. En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. *(1.5 ptos)*
b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x+2|+t & si\ x\le 0\\ (x-t)^2 & si\ x>0\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 0*? *(0.5 ptos)*
b) Calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$ con *t = 3*. *(0.5 ptos)*
c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$ con *t = 3*. *(0.5 ptos)*

4. Dada la función $f(x)=ax^5+bx^3+c$ se pide que calcules los parámetros *a*, *b* y *c* sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: (0,0) y (1,7). *(1.5 ptos)*

5. El 10% de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 97% de los casos de personas con la enfermedad, pero también da positivo en el 1% de personas que no padecen la enfermedad.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona obtenga un diagnóstico positivo? *(0.75 ptos)*
b) Si una persona obtiene negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? *(0.75 ptos)*

6. Para hacer un estudio del uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas semanales que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas diarias de uso de NT" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:
a) Halla el intervalo de confianza para el número medio diario de horas que hacen uso de las nuevas tecnologías los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97 %. *(1 pto)*
b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. *(0.5 ptos)*
c) ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas es 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta.*(0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuales pueden realizarse y cuáles no:
A · B ; A · C ; A · D ; C · D. *(0.5 ptos)*

b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada. *(1 pto)*

2. Cierto concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada tipo. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+t & si\ x<-1\\ 4 & si\ -1\le x\le 1\\ (x-4)^2-5 & si\ x>1\end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en *x = –1*? *(0.5 ptos)*

b) Para *t = 3*, representa gráficamente la función *f*. *(0.5 ptos)*

4. Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+40$ donde *f(x)* está en mg/litro y *x* en horas, con $0\le x\le 9$.

a) Determina cuales son los valores inicial (*x = 0*) y final (*x = 9*) de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente. *(0.5 ptos)*

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración. *(0.5 ptos)*

c) Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos. *(0.5 ptos)*

5. En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). *(0.75 ptos)*

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? *(0.75 ptos)*

6. El tiempo de conexión a internet por semana de los alumnos de una universidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =1 hora. Se eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos y se observó que la media de tiempo en internet para esa muestra era de 5 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de conexión a internet con un nivel de confianza del 95 %. *(0.75 ptos)*

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 4$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. *(0.5 ptos)*

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? *(0.75 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Propuesta A

1. Considera el siguiente problema de programación lineal:

Minimizar la función $F = -x + 6y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$x + 7y \leq 58 \quad ; \quad 4x + 5y \geq 48 \quad ; \quad 3x - 2y \leq 13$$

a) Dibuja la región factible. *(1 pto)*

b) Determina los vértices de la región factible. *(0.25 ptos)*

c) Indica la solución óptima del problema y su valor. *(0.25 ptos)*

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región.

$x + 7y = 58$

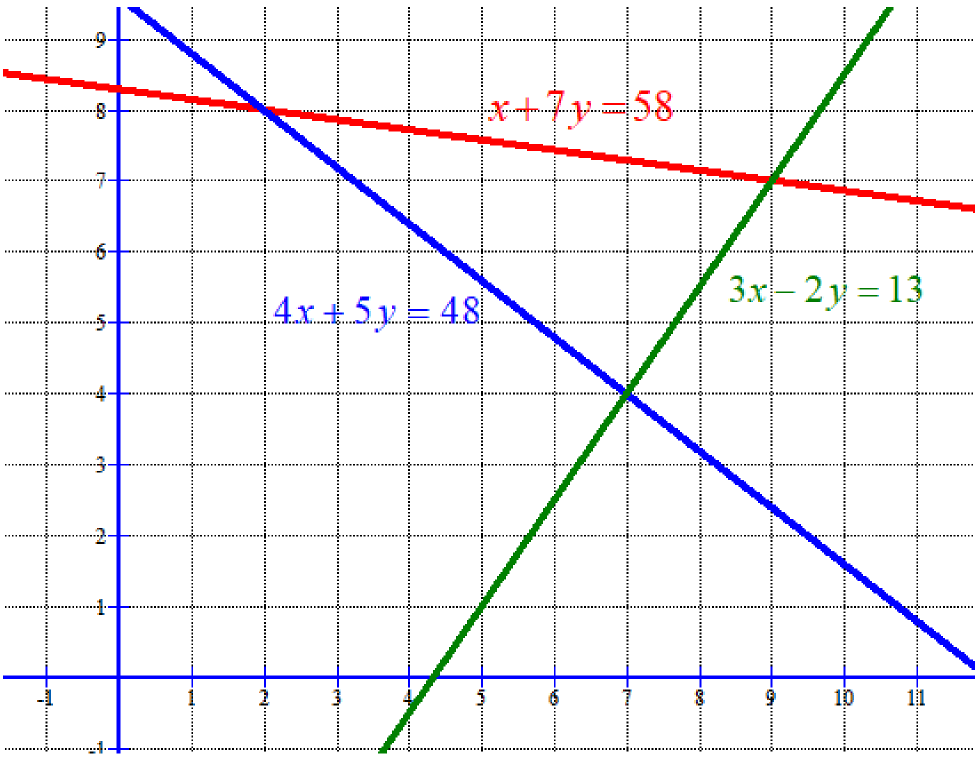
x	$y = \frac{58 - x}{7}$
2	8
58	0
9	7

$4x + 5y = 48$

x	$y = \frac{48 - 4x}{5}$
2	8
12	0
7	4

$3x - 2y = 13$

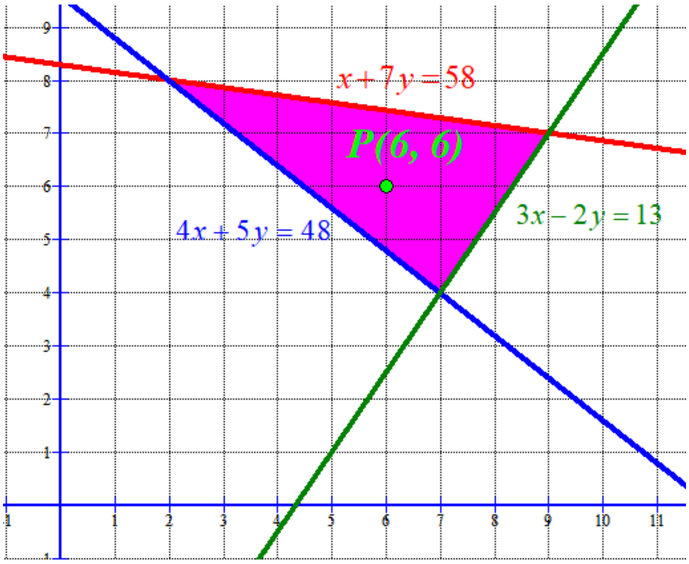
x	$y = \frac{3x - 13}{2}$
5	1
7	4
9	7



Como las restricciones son $x + 7y \leq 58$; $4x + 5y \geq 48$; $3x - 2y \leq 13$ colocamos la "y" positiva y localizamos la región del plano que cumple todas las restricciones.

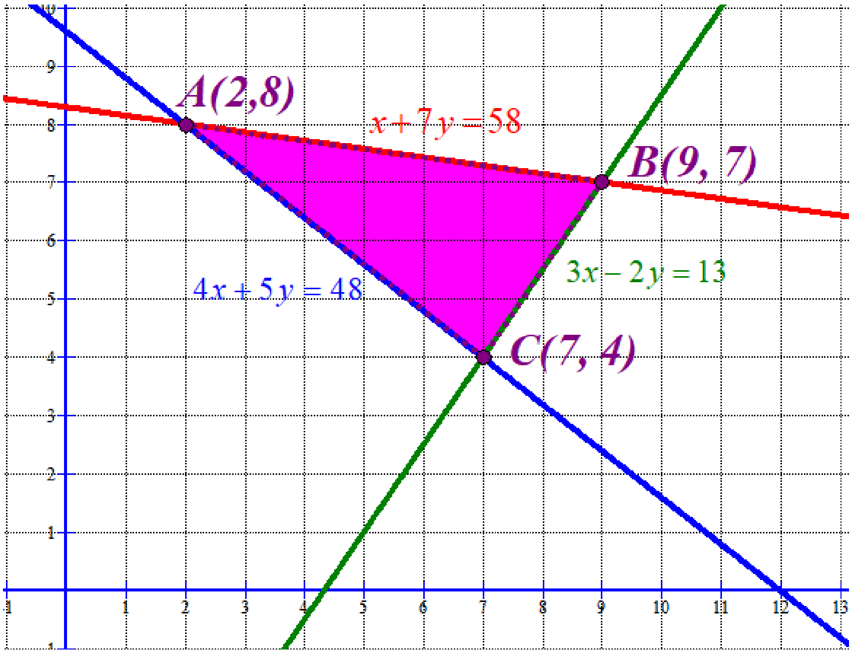
$$7y \leq 58 - x \quad ; \quad 5y \geq 48 - 4x \quad ; \quad 3x - 13 \leq 2y$$

La región está por debajo de la línea roja, por encima de la azul y por encima de la verde. Marcamos de rosa la región factible y lo comprobamos en un punto cualquiera de la misma.



$$\left.\begin{array}{l} x+7y\le 58 \\ 4x+5y\ge 48 \\ 3x-2y\le 13 \\ P(6,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 6+42\le 58 \\ 24+30\ge 48 \\ 18-12\le 13 \end{array}\right\} \text{¡SE CUMPLEN!}$$

b) Los vértices los obtengo resolviendo los sistemas formados por las ecuaciones de las rectas que se cortan.



$$\left.\begin{array}{l} x+7y=58 \\ 4x+5y=48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=58-7y \\ 4x+5y=48 \end{array}\right\} \Rightarrow 4(58-7y)+5y=48 \Rightarrow 232-28y+5y=48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23y=-184 \Rightarrow y=8 \Rightarrow x=58-56=2 \Rightarrow \boxed{A(2,8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+7y=58 \\ 3x-2y=13 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=58-7y \\ 3x-2y=13 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(58-7y)-2y=13 \Rightarrow 174-21y-2y=13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23y=-161 \Rightarrow y=7 \Rightarrow x=58-49=9 \Rightarrow \boxed{B(9,7)}$$

$$\left.\begin{array}{l}4x+5y=48\\3x-2y=13\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{48-5y}{4}\\3x-2y=13\end{array}\right\}\Rightarrow 3\frac{48-5y}{4}-2y=13\Rightarrow 144-15y-8y=52\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -23y=-92\Rightarrow y=4\Rightarrow x=\frac{48-20}{4}=7\Rightarrow\boxed{C(7,4)}$$

Los vértices tienen coordenadas A(2,8), B(9,7) y C(7,4)

c) Valoramos la función $F=-x+6y$ en cada vértice y localizamos el valor mínimo.

- A(2,8) → $F=-2+48=46$
- B(9,7) → $F=-9+42=33$
- C(7,4) → $F=-7+24=17$

El valor mínimo de la función F se alcanza en el punto C(7,4)

2. En la bodega de Antonio hay botellas de vino blanco, de vino tinto y de vino rosado. Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado. La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco. Además sabemos que Antonio tiene en su bodega 280 botellas.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botellas hay de cada tipo de vino. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) Llamaremos *b* al número de botellas de blanco, *t* al número de botellas de tinto y *r* al número de botellas de rosado, que hay en la bodega.

"*Si sumamos las botellas de vino blanco con las de tinto obtenemos el triple de las botellas de rosado***"** → $b+t=3r$

"*La suma de las botellas de tinto con las de rosado supera en 40 unidades a las botellas de blanco***"** → $t+r=b+40$

"*Antonio tiene en su bodega 280 botellas***"** → $r+b+t=280$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} b+t=3r \\ t+r=b+40 \\ r+b+t=280 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b+t-3r=0 \\ -b+t+r=40 \\ b+t+r=280 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} b+t-3r=0 \\ -b+t+r=40 \\ b+t+r=280 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} -b & +t & +r & =40 \\ b & +t & -3r & =0 \\ \hline & 2t & -2r & =40 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} b & +t & +r & =280 \\ -b & -t & +3r & =0 \\ \hline & & 4r & =280 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b+t-3r=0 \\ 2t-2r=40 \\ 4r=280 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b+t-3r=0 \\ t-r=20 \\ \boxed{r=70} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} b+t-210=0 \\ t-70=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b+t=210 \\ \boxed{t=90} \end{array}\right\} \Rightarrow b+90=210 \Rightarrow \boxed{b=120}$$

Antonio tiene en su bodega 70 botellas de vino rosado, 120 de vino blanco y 90 de vino tinto.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x+2|+t & si\ x\le 0\\ (x-t)^2 & si\ x>0\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 0*? *(0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$ con *t = 3*. *(0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$ con *t = 3*. *(0.5 ptos)*

a) Para que la función sea continua en *x = 0* deben de coincidir sus límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}|x+2|+t=2+t\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-t)^2=t^2\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow t^2=2+t\Rightarrow t^2-t-2=0\Rightarrow$$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+3}{2}=2=t\\ \dfrac{1-3}{2}=-1=t\end{cases}$$

Los valores buscados son *t = –1* y *t = 2*.

b) Para *t = 3* la función queda $f(x)=\begin{cases}|x+2|+3 & si\ x\le 0\\ (x-3)^2 & si\ x>0\end{cases}$ y en el intervalo $(0,+\infty)$ se reduce a la expresión $f(x)=(x-3)^2$. Su gráfica es un trozo de parábola.

$$f(x)=(x-3)^2\Rightarrow f'(x)=2(x-3)$$
$$f'(x)=0\Rightarrow 2(x-3)=0\Rightarrow x=3$$

En *x = 3* hay un punto crítico de la función, utilizamos la segunda derivada para comprobar de que tipo es.

$$f'(x)=2(x-3)\Rightarrow f''(x)=2\Rightarrow f''(3)=2>0$$

En *x = 3* hay un mínimo relativo de la función.

Como $f(3)=(3-3)^2=0$ las coordenadas del mínimo son (3, 0).

c) Como hemos encontrado el mínimo relativo de la función en (3, 0), antes de *x = 3* la función debe decrecer y después de *x = 3* la función debe crecer.

En (0, 3) la función decrece y en $(3,+\infty)$ la función crece.

4. Dada la función $f(x)=ax^5+bx^3+c$ se pide que calcules los parámetros *a*, *b* y *c* sabiendo que dos de los puntos de inflexión de esta función son: (0,0) y (1,7). *(1.5 ptos)*

En los puntos de inflexión se anula la derivada segunda.

$$f(x)=ax^5+bx^3+c \Rightarrow f'(x)=5ax^4+3bx^2 \Rightarrow f''(x)=20ax^3+6bx$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=20ax^3+6bx \\ f''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Se cumple!}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=20ax^3+6bx \\ f''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 20a+6b=0 \Rightarrow 10a+3b=0$$

Además, la función pasa por (0,0) y (1,7).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^5+bx^3+c \\ \text{Pasa por } (0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^5+bx^3+c \\ \text{Pasa por } (1,7) \end{array}\right\} \Rightarrow 7=a+b+c \Rightarrow 7=a+b$$

Reunimos las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 10a+3b=0 \\ 7=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10a+3b=0 \\ 7-b=a \end{array}\right\} \Rightarrow 10(7-b)+3b=0 \Rightarrow 70-10b+3b=0 \Rightarrow 70=7b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=10} \Rightarrow \boxed{a=7-10=-3}$$

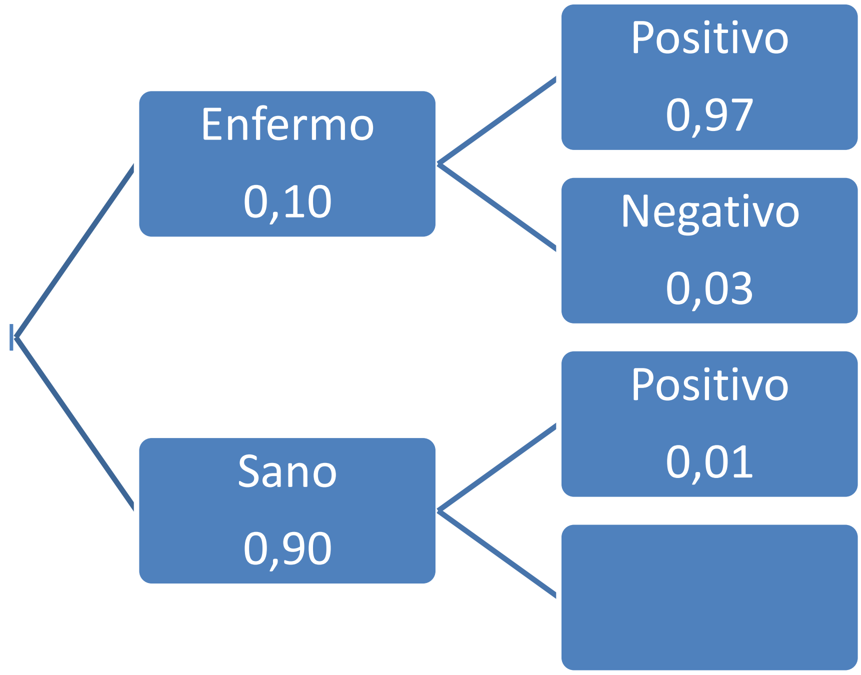
Los valores buscados son *a = –3, b = 10, c = 0*. La función queda $f(x)=-3x^5+10x^3$

5. El 10% de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. Para diagnosticar la misma, se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 97% de los casos de personas con la enfermedad, pero también da positivo en el 1% de personas que no padecen la enfermedad.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona obtenga un diagnóstico positivo? *(0.75 ptos)*

b) Si una persona obtiene negativo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad? *(0.75 ptos)*

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Positivo}) = P(\text{Enfermo})P(\text{Positivo / Enfermo}) + P(\text{Sano})P(\text{Positivo / Sano}) =$$

$$= 0,1\cdot 0,97 + 0,9\cdot 0,01 = 0,097 + 0,009 = \boxed{0,106}$$

b)

$$P(\text{Enfermo / Da negativo}) = \frac{P(\text{Enfermo } \cap \text{ Da negativo})}{P(\text{Da negativo})} =$$

$$= \frac{P(\text{Enfermo})P(\text{Da negativo / Enfermo})}{P(\text{Da negativo})} = \frac{0.1\cdot 0.03}{1-0.106} = \frac{0.003}{0.894} = \boxed{\frac{1}{298} = 0.003}$$

6. Para hacer un estudio del uso de las nuevas tecnologías (NT) por parte de los jóvenes de un centro escolar, se tomó una muestra aleatoria de 10 menores, siendo el número de horas semanales que hacían uso de las nuevas tecnologías: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable “número de horas diarias de uso de NT" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio diario de horas que hacen uso de las nuevas tecnologías los alumnos de dicho centro con un nivel de confianza del 97 %. *(1 pto)*

b) Explica razonadamente, cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. *(0.5 ptos)*

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número medio de horas es 4 horas con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta.*(0.5 ptos)*

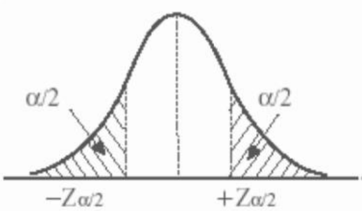
X = Número de horas semanales que hace uso de las nuevas tecnologías un joven.
X = N(μ, 2.1)

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{4.2+4.6+5+5.7+5.8+5.9+6.1+6.2+6.5+7.3}{10} = 5.73$$

a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{10}} = 1.441$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(5.73 - 1.441, \quad 5.73 + 1.441\right) = \left(4.289, \quad 7.171\right)$$

b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (*n* está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ aumentando el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(4.289, \quad 7.171\right)$. La media 4 no pertenece a este intervalo.

Si disminuimos el nivel de confianza al 90% la amplitud del intervalo de confianza aumenta y la media 4 puede pertenecer al intervalo de confianza.

Calculamos el nuevo intervalo de confianza.

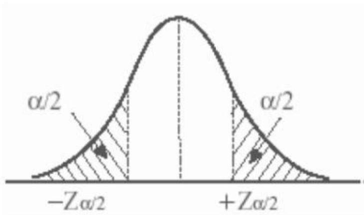
X = Número de horas semanales que hace uso de las nuevas tecnologías un joven.

X = N(μ, 2.1) $\quad Media\ muestral = \overline{x} = 5.73$

Con un nivel de confianza del 90%

$1 - \propto = 0{,}90 \rightarrow \propto = 0{,}10 \rightarrow \propto/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.1}{\sqrt{10}} = 1.71$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(5.73 - 1.71, \quad 5.73 + 1.71\right) = \left(4.02, \quad 7.44\right)$$

Disminuyendo el nivel de confianza al 90% el intervalo de confianza aumenta de amplitud, pero la media poblacional de 4 horas sigue sin estar en el intervalo de confianza.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}$

a) De los siguientes productos, explica razonadamente cuales pueden realizarse y cuáles no: A · B ; A · C ; A · D ; C · D. *(0.5 ptos)*

b) De los productos anteriores, realiza correctamente aquellos que den como resultado una matriz cuadrada. *(1 pto)*

a) Para poderse realizar un producto de dos matrices el número de columnas del primer factor del producto debe de coincidir con el número de filas del segundo factor.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}=\text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 1\longrightarrow 2\times 1$$

$$A\cdot D=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\text{¡NO ES POSIBLE!}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 1}\times 3\longrightarrow \text{NO ES POSIBLE}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\text{¡SI ES POSIBLE!}$$

$$3\times\boxed{1\quad\cdot\quad 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

b)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ -5 & 0\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+10 & -2\\ 6-3 & 6-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\text{ Es una matriz cuadrada.}$$

$$C\cdot D=\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 12\\ 0 & 4 & -12\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}\text{ Es una matriz cuadrada.}$$

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -4\\ 1\end{pmatrix}=\text{¡NO ES CUADRADA!}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 1\longrightarrow 2\times 1$$

2. Cierto concesionario de automóviles posee una nave industrial en la que guardan 100 automóviles dispuestos para su venta inmediata. Los coches guardados en la nave son de tres tipos: gasolina, diésel e híbridos. Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos. Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel.

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos coches hay de cada tipo. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) x = número de coches gasolina, y = número de coches diésel, z = número de coches híbridos.

"*Guardan 100 automóviles*" → $x+y+z=100$

"*Los más numerosos son los coches diésel, y la diferencia entre los diésel y los de gasolina es igual a la mitad del número de híbridos*" → $y-x=\frac{z}{2}$

"*Los menos numerosos son los híbridos, y la diferencia entre los de gasolina y los híbridos es igual a la tercera parte de los diésel*" → $x-z=\frac{y}{3}$

Reunimos las 3 ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ y-x=\dfrac{z}{2} \\ x-z=\dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 2y-2x=z \\ 3x-3z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ -2x+2y-z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{array}\right\}$$

b) Utilizamos el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ -2x+2y-z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª + 2 · Ecuación 1ª} \\ -2x \quad +2y \quad -z \quad =0 \\ \underline{\;2x \quad +2y \quad +2z \quad =200\;} \\ \qquad 4y \quad +z \quad =200 \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ 3x \quad -y \quad -3z \quad =0 \\ \underline{-3x \quad -3y \quad -3z \quad =-300} \\ \qquad -4y \quad -6z \quad =-300 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ -4y-6z=-300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ -4y \quad -6z \quad =-300 \\ \underline{\;4y \quad +z \quad =200\;} \\ \qquad -5z \quad =-100 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ -5z=-100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ \boxed{z=20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+20=100 \\ 4y+20=200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ 4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ \boxed{y=45} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+45=80 \Rightarrow \boxed{x=35}$$

Tienen guardados 35 coches gasolina, 45 diésel y 20 híbridos.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+t & si\ x<-1 \\ 4 & si\ -1\le x\le 1 \\ (x-4)^2-5 & si\ x>1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = -1$? *(0.5 ptos)*

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función f. *(0.5 ptos)*

a) Para que la función sea continua en $x = -1$ deben de coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=4 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x+t=-1+t \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 4 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -1+t=4 \Rightarrow \boxed{t=5}$$

b) Para $t = 3$ la función es $f(x)=\begin{cases} x+3 & si\ x<-1 \\ 4 & si\ -1\le x\le 1 \\ (x-4)^2-5 & si\ x>1 \end{cases}$

La gráfica es un trozo de recta oblicua, otro de recta horizontal y un trozo de parábola.

$f(x)=x+3 \quad (x<-1)$

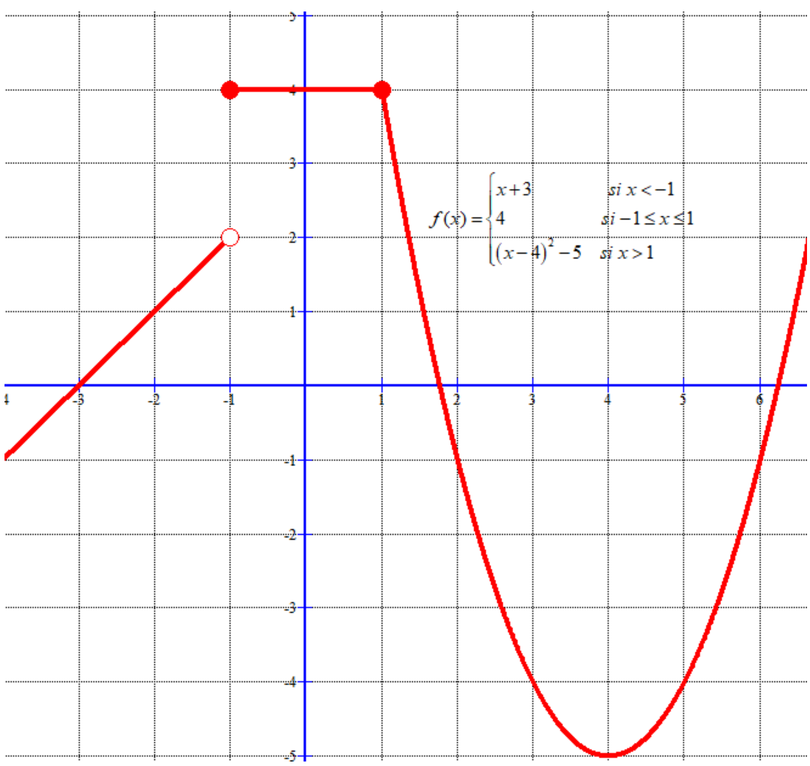
x	$y=x+3$
-3	0
-2	1
-1	2 No se incluye

$f(x)=4 \quad (-1\le x\le 1)$

x	$y=4$
-1	4
0	4
1	4

$f(x)=(x-4)^2-5 \quad (x>1)$

x	$y=(x-4)^2-5$
1	4 No se incluye
2	-1
4	-5
6	-1



4. Un paciente está siendo sometido a un tratamiento experimental y para ello estudiamos entre las 0 y las 9 horas de un día su concentración en sangre de cierta proteína, en mg/litro. Esa concentración se ajusta a la función:

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+40$ donde *f(x)* está en mg/litro y *x* en horas, con $0\le x\le 9$.

a) Determina cuales son los valores inicial (*x = 0*) y final (*x = 9*) de la concentración de esa proteína en la sangre del paciente. *(0.5 ptos)*

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la concentración. *(0.5 ptos)*

c) Determina en qué horas se alcanzan los valores máximo y mínimo respectivamente de la concentración de la proteína, y qué valores son esos. *(0.5 ptos)*

a) $f(0)=\frac{1}{3}0^3-4\,0^2+7\,0+40=40$. El valor inicial es 40 mg/litro.

$f(9)=\frac{1}{3}9^3-4\cdot 9^2+7\cdot 9+40=22$. El valor final es 22 mg/litro.

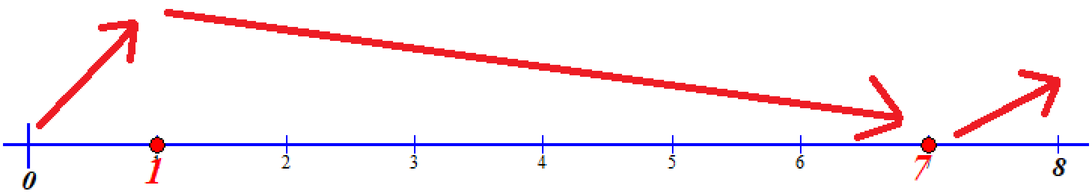
b) Buscamos los puntos críticos hallando la derivada e igualando a cero.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+40 \Rightarrow f'(x)=x^2-8x+7$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x^2-8x+7=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-28}}{2}=\begin{cases}\frac{8+6}{2}=7\\ \frac{8-6}{2}=1\end{cases}$$

Vemos como es el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $[0,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=0^2-8\cdot 0+7=7>0$, la función crece en $[0,1)$.
- En $(1,7)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=2^2-8\cdot 2+7=-5<0$, la función decrece en $(1,7)$.
- En $(7,8]$ tomamos *x = 8* y la derivada vale $f'(8)=8^2-8\cdot 8+7=7>0$, la función crece en $(7,8]$.



La concentración crece en $[0,1)\cup(7,8]$ y decrece en $(1,7)$.

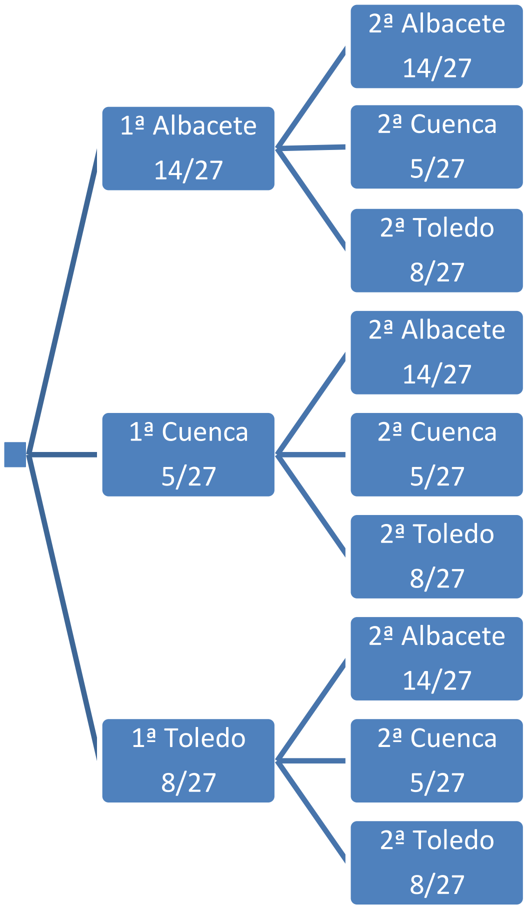
c) Mirando el análisis anterior hay un máximo a las 1 horas siendo este valor máximo de $f(1)=\frac{1}{3}1^3-4\,1^2+7\,1+40=43,33\ mg/litro$ y un mínimo a las 7 horas siendo este de $f(7)=\frac{1}{3}\cdot 7^3-4\cdot 7^2+7\cdot 7+40=7,33\ mg/litro$

5. En una clase de 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). *(0.75 ptos)*

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? *(0.75 ptos)*

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Las dos entradas a alumnos que no son de Albacete}) =$$

$$= P(CC) + P(CT) + P(TC) + P(TT) =$$

$$= \frac{5}{27}\cdot\frac{5}{27} + \frac{5}{27}\cdot\frac{8}{27} + \frac{8}{27}\cdot\frac{5}{27} + \frac{8}{27}\cdot\frac{8}{27} = \frac{25+40+40+64}{27\cdot 27} = \boxed{\frac{169}{729} = 0.2318}$$

b) Para que les toque a los cinco alumnos de Cuenca en los cinco sorteos debe tocarle en el primer sorteo la primera entrada, con probabilidad 5/27. Le debe tocar el segundo sorteo con probabilidad 4/26, pues un alumno de Cuenca ya no se incluye en el segundo sorteo.

En el tercero con probabilidad 3/25, el cuarto con probabilidad 2/24 y en el quinto con probabilidad 1/23.

La probabilidad de que ocurra todo esto es el producto de las probabilidades.

$$P(\text{5 entradas a los 5 alumnos de Cuenca}) = \frac{5}{27}\cdot\frac{4}{26}\cdot\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{1}{23} = \boxed{\frac{1}{80730} = 0.0000123}$$

6. El tiempo de conexión a internet por semana de los alumnos de una universidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 1$ hora. Se eligió una muestra aleatoria de 100 alumnos y se observó que la media de tiempo en internet para esa muestra era de 5 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de conexión a internet con un nivel de confianza del 95 %. *(0.75 ptos)*

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 4$ horas con un nivel de confianza del 95 %? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. *(0.5 ptos)*

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? *(0.75 ptos)*

X = Tiempo de conexión a internet por semana de un alumno.

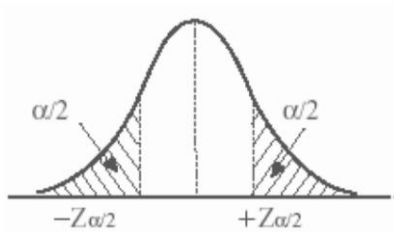
X = N(μ, 1)

Tamaño de muestra = n = 100 alumnos. $Media\ muestral = \bar{x} = 5\,h$

a) Nivel de confianza 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.196$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

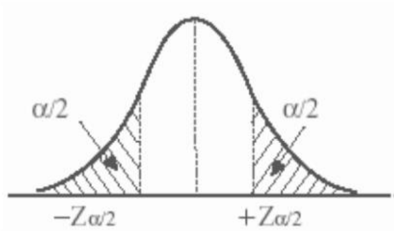
$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(5 - 0.196,\quad 5 + 0.196\right) = \left(4.804,\quad 5.196\right)$$

b) La media poblacional 4 horas queda fuera del intervalo de confianza calculado en el apartado anterior, por lo que no se puede admitir esa media poblacional.
Si tomamos una muestra más pequeña la amplitud del intervalo de confianza aumentará.

c) Con un nivel de confianza del 94,64% calculamos el nuevo intervalo de confianza.

$$1 - \alpha = 0{,}9464 \rightarrow \alpha = 0{,}0536 \rightarrow \alpha/2 = 0'0268 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}93}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{1}{\sqrt{100}} = 0.193$$

El error máximo es de 0.193 horas.