Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuantos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo. *(0.25 ptos)*

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. *(1 pto)*.

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. *(0.25 ptos)*

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+t & si\ x\le -3 \\ 4 & si\ -3<x<3 \\ (x-4)^2-5 & si\ x\ge 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = -3$. *(0.5 ptos)*

b) Para $t = 3$, representa gráficamente la función *f*. (*1 pto*)

4. Sabemos que la función $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un mínimo en el punto *(1,1)* y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a, b* y *c*. *(1.5 ptos)*

5. En una universidad el 40% de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.

a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? *(0.75 ptos)*

b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? *(0.75 ptos)*

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. *(0.75 ptos)*

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea $\mu = 2.3$ horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. *(0.5 ptos)*

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? *(0.75 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula $A{\cdot}B-C^T$. (0.75 ptos)

b) Comprueba que la matriz *C* no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2{\cdot}B$ no puede ser realizado. *(0.75 ptos)*

2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}-x-4 & si\ x<c\\ -3 & si\ c\le x\le 0\\ x^2-10x & si\ x>0\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *c* la función *f(x)* es continua en *x = c*? *(0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

4. Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x)=-x^3+45x^2-243x+500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $1\le x\le 27$

a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. *(1 pto)*

b) ¿A qué valor ascienden ambos? *(0.5 ptos)*

5. El 5% de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5% de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15% de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? *(0.75 ptos)*

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? *(0.75 ptos)*

6. El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 0.1 g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.

a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. *(0.25 ptos)*

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. *(0.75 ptos)*

c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. *(0.5 ptos)*

d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? *(0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Propuesta A

1. En una tienda de comida a granel tienen a la venta tres tipos de judías secas: blancas, canela y pintas. Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo, respectivamente. Ayer se vendieron 40 kilos en total por un valor de 111.5 euros. La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuantos kilogramos de judías de cada tipo se vendieron. *(1.5 ptos)*
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) Llamemos *b* al número de kilos de judías blancas vendidas, *c* al número de kilos de judías canela vendidas y *p* al número de kilos de judías pintas vendidas.

"*Se vendieron 40 kilos***"** → $b+c+p=40$

"*Estas se venden a 2.75, 3 y 2.50 euros el kilogramo. Se vendieron por un valor de 111.5 euros***"** → $2.75b+3c+2.5p=111.5$

"*La suma de los kilogramos de judías blancas y canela vendidas fueron el triple de las pintas***"** → $b+c=3p$

Juntamos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} b+c+p=40 \\ 2.75b+3c+2.5p=111.5 \\ b+c=3p \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} b+c+p=40 \\ 2.75b+3c+2.5p=111.5 \\ b+c=3p \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b+c+p=40 \\ 11b+12c+10p=446 \\ b=3p-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3p-c+c+p=40 \\ 11(3p-c)+12c+10p=446 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3p+p=40 \\ 33p-11c+12c+10p=446 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4p=40 \\ 43p+c=446 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{p=10} \\ 43p+c=446 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 430+c=446 \Rightarrow \boxed{c=16} \Rightarrow \boxed{b=30-16=14}$$

Se vendieron 14 kg de judías blancas, 16 kg de judías canela y 10 kg de judías pintas.

2. En un taller se confeccionan prendas vaqueras con dos tipos de tejidos de distinta calidad (T_1, T_2). Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. Hacen dos conjuntos: Uno con chaqueta y falda y otro con cazadora y pantalón. El primero utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2. El conjunto con falda cuesta 250 euros y el del pantalón 350 euros.

a) Expresa la función objetivo. *(0.25 ptos)*

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. *(1 pto)*.

c) Calcula el número de conjuntos de cada tipo que deben hacer para obtener máximas ganancias. *(0.25 ptos)*

a) Llamamos x = número de conjuntos chaqueta falda, y = número de conjuntos chaqueta pantalón.
El objetivo es obtener el mayor beneficio. Este se obtiene con la venta de cada conjunto con falda a 250 euros y el del pantalón a 350 euros.
Viene expresado con la función $B(x,y) = 250x + 350y$

b)

"*Disponen de 160 m^2 del tejido T_1 y 240 m^2 del tejido T_2. El conjunto chaqueta falda utiliza 2 m^2 de T_1 y 2 m^2 de T_2, el conjunto del pantalón utiliza 1 m^2 de T_1 y 3 m^2 de T_2*" → $2x + y \leq 160; \quad 2x + 3y \leq 240$

Para obtener estas inecuaciones nos podemos ayudar de una tabla donde se refleje la situación planteada.

	x = nº conjuntos chaqueta falda	y = nº conjuntos chaqueta pantalón	TOTALES
m^2 de tela T_1	$2x$	y	$2x + y$
m^2 de tela T_2	$2x$	$3y$	$2x + 3y$

Son cantidades positivas → $x \geq 0; \; y \geq 0$

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 160 \\ 2x + 3y \leq 240 \\ x \geq 0; \; y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Para dibujar el recinto que representan este conjunto de restricciones empezamos dibujando las rectas que delimitan la región.

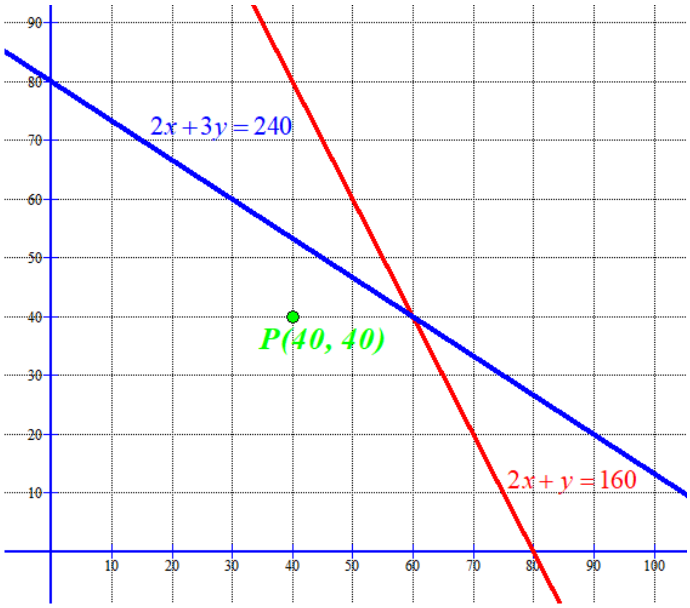
$2x + y = 160$

x	$y = 160 - 2x$
80	0
0	160
60	40

$2x + 3y = 240$

x	$y = \dfrac{240 - 2x}{3}$
120	0
0	80
60	40

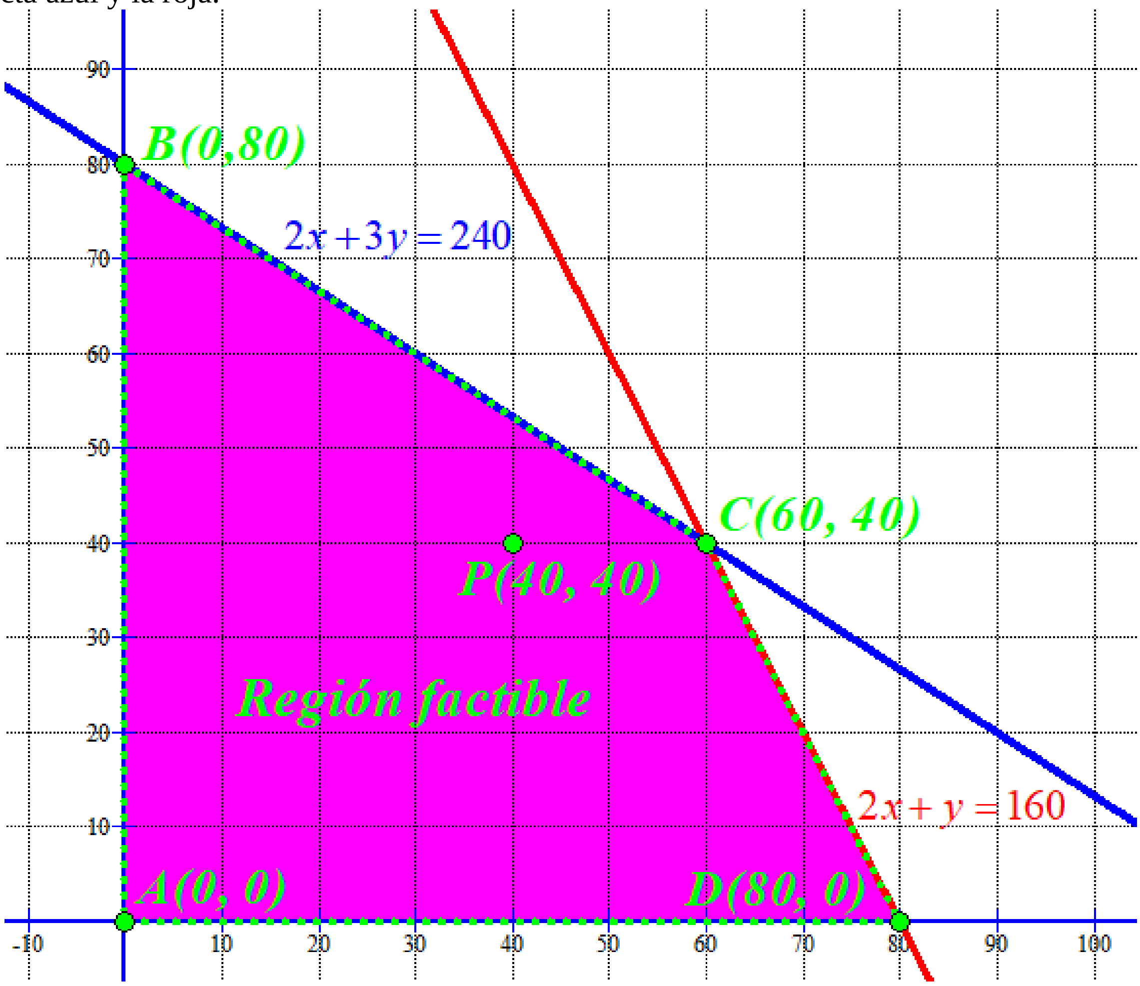
$x \geq 0;\ \ y \geq 0 \quad \Rightarrow$ Primer cuadrante



Comprobamos si el punto *P(40, 40)* cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} ¿\,2\cdot 40 + 40 \leq 160\,? \\ ¿\,2\cdot 40 + 3\cdot 40 \leq 240\,? \\ ¿\,40 \geq 0;\ \ 40 \geq 0\,? \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ¿\,120 \leq 160\,? \\ ¿\,200 \leq 240\,? \\ ¿\,40 \geq 0;\ \ 40 \geq 0\,? \end{array}\right\} \text{ ¡SE CUMPLEN!}$$

La región factible es la región pintada de rosa, delimitada por los ejes de coordenadas, la recta azul y la roja.



c) Determinamos el máximo valorando cada vértice en la función objetivo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 80) → $B(0,80)=350 \cdot 80=28000$

C(60, 40) → $B(60,40)=250 \cdot 60+350 \cdot 40=15000+14000=29000$

D(80, 0) → $B(80,0)=250 \cdot 80+0=20000$

El beneficio máximo es de 29000 € y se obtienen en el punto C(60, 40).
Se maximizan los beneficios (29000 €) con la venta de 60 conjuntos chaqueta falda y 40 conjuntos chaqueta pantalón.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+t & si\ x\leq -3 \\ 4 & si\ -3<x<3 \\ (x-4)^2-5 & si\ x\geq 3 \end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en *x* = *–3*. *(0.5 ptos)*

b) Para *t* = *3*, representa gráficamente la función *f*. (*1 pto*)

a) Para que la función sea continua en *x* = *–3* deben de coincidir los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-} x+t=-3+t \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} 4=4 \\ \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -3+t=4 \Rightarrow \boxed{t=7}$$

La función es continua en *x* = *–3* para *t* = *7* pues existe el límite y es igual al valor de la función en *x* = *–3.*

b) Para *t* = *3* la función queda $f(x)=\begin{cases} x+3 & si\ x\leq -3 \\ 4 & si\ -3<x<3 \\ (x-4)^2-5 & si\ x\geq 3 \end{cases}$

Es un trozo de recta, otro de recta horizontal y otro trozo de una parábola.

$f(x)=x+3$

$x\leq -3$

x	$y=x+3$
-5	-2
-4	-1
-3	0

$f(x)=4$

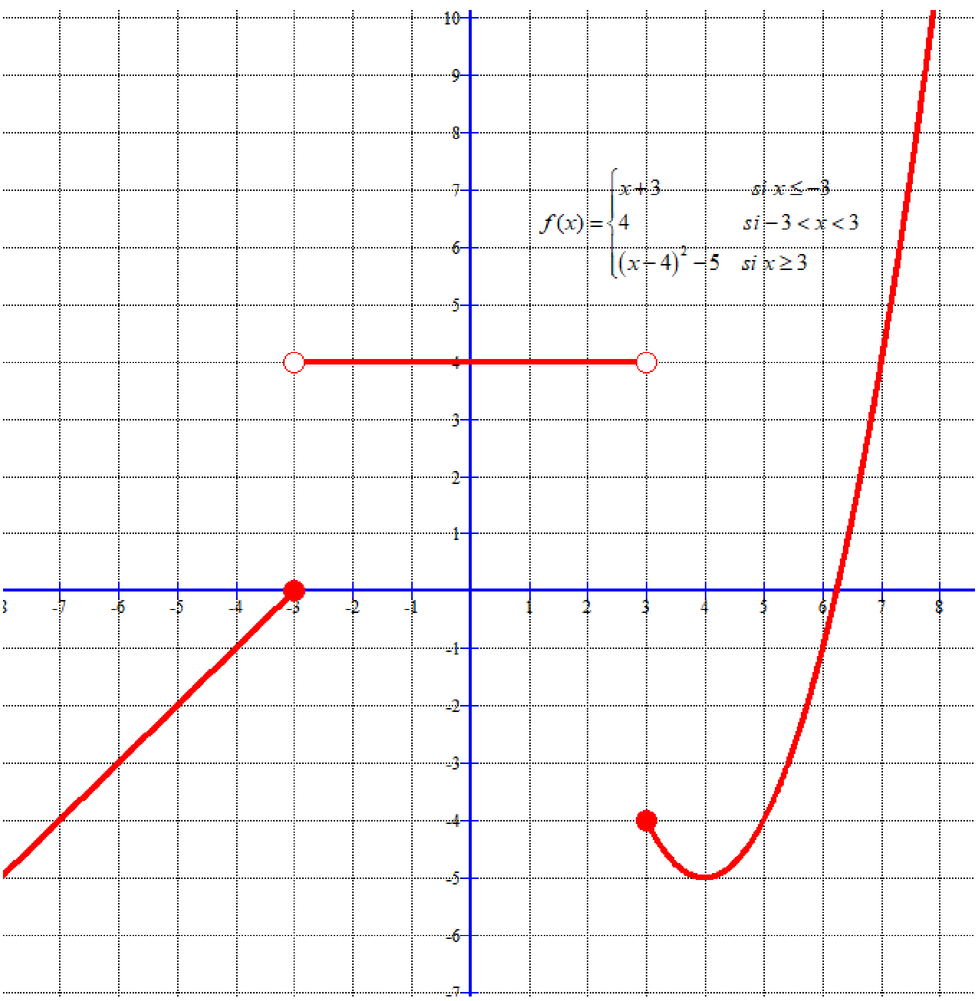
$-3<x<3$

x	$y=4$
-3	4 No incluido
0	4
3	4 No incluido

$f(x)=(x-4)^2-5$

$x\geq 3$

x	$y=(x-4)^2-5$
3	-4
4	-5
5	-4



4. Sabemos que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un mínimo en el punto *(1,1)* y corta al eje de ordenadas en 4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a, b* y *c*. *(1.5 ptos)*

La gráfica pasa por el punto (1, 1) por lo que se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = a + b + c$$

La función tiene un mínimo en *x = 1* por lo que su derivada se anula para *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f\,'(x) = 2ax + b \\ f\,'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2a + b$$

Corta al eje de ordenadas en 4 significa que pasa por el punto (0,4).

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^2 + bx + c \\ \text{Pasa por } (0,4) \rightarrow f(0) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1 = a + b + c \\ 0 = 2a + b \\ \boxed{c = 4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = a + b + 4 \\ 0 = 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -3 - a \\ 0 = 2a + b \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2a - 3 - a \Rightarrow \boxed{a = 3} \Rightarrow \boxed{b = -3 - 3 = -6}$$

Los valores buscados son *a = 3*, *b = –6*, *c = 4*. La función es $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$.

5. En una universidad el 40% de los estudiantes son aficionados a la lectura, el 50% al cine, y al 70% les gusta el cine o la lectura o ambas cosas.
a) Se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la lectura y el cine? *(0.75 ptos)*
b) Si elegimos un estudiante al azar y le gusta la lectura, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el cine? *(0.75 ptos)*

Si al 70% le gusta el cine o la lectura o ambas cosas tendremos que al 30% restante no le gusta ni el cine ni la lectura.
Realizamos una tabla de contingencia de este grupo de alumnos.

	Le gusta el cine	**No le gusta el cine**	
Le gusta la lectura			**40**
No le gusta la lectura		**30**	
	50		**100**

Completamos la tabla teniendo en cuenta que la suma de los dos primeros valores de cada línea debe sumar lo que aparece al final de ella.

	Le gusta el cine	**No le gusta el cine**	
Le gusta la lectura	**20**	**20**	**40**
No le gusta la lectura	**30**	**30**	**60**
	50	**50**	**100**

A partir de estos datos respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

a) Como de un total de 100 alumnos a solo 20 le gustan la lectura y el cine, tenemos que:

$$P\left(\text{Le guste la lectura y el cine}\right)=\frac{\text{N}^{\text{o}}\text{ casos favorables}}{\text{N}^{\text{o}}\text{ casos posibles}}=\frac{20}{100}=\boxed{0.2}$$

b) Miramos los datos que aparecen en la primera fila de la tabla.

$$P\left(\text{Le guste el cine / Le gusta la lectura}\right)=\frac{\text{N}^{\text{o}}\text{ casos favorables}}{\text{N}^{\text{o}}\text{ casos posibles}}=\frac{20}{40}=\boxed{0.5}$$

6. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.
a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. *(0.75 ptos)*
b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 2.3 horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podría aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. *(0.5 ptos)*
c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? *(0.75 ptos)*

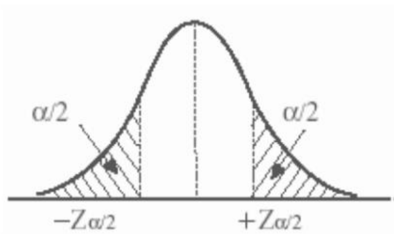
X = Tiempo de uso de móvil por día en minutos.
X = N(μ, 20)

$Media\ muestral = \bar{x} = 2\ h = 120 \text{ minutos}$. Tamaño muestra = n = 36

a) Con un nivel de confianza del 95%

$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{36}} = 6.5333$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (120 - 6.5333, 120 + 6.5333) = (113.4667, 126.5333)$$

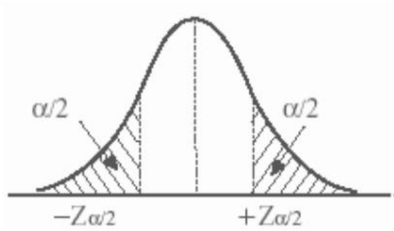
b) 2.3 horas son 2.3 · 60 = 138 minutos.
Esta media de 138 minutos no pertenece al intervalo hallado para el nivel de confianza de 95%. No se puede admitir esta media.
Se puede aumentar la amplitud del intervalo disminuyendo el nivel de confianza (o disminuyendo el tamaño de la muestra). Y de forma reciproca se disminuye la amplitud del intervalo tomando un nivel de confianza mayor (o aumentando el tamaño de la muestra)
La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

c)

Con un nivel de confianza del 94,64%

$1 - \propto = 0{,}9464 \rightarrow \propto = 0{,}0536 \rightarrow \propto/2 = 0'0268 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}93}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3.86$$

Con un tamaño de muestra 100 y un nivel de confianza del 94,64% el máximo error es de 3,86 minutos.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot B-C^T$. (0.75 ptos)

b) Comprueba que la matriz C no tiene inversa y explica la razón por la que el producto $D^2\cdot B$ no puede ser realizado. *(0.75 ptos)*

a)

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B-C^T=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & 15\\4 & 2 & 10\\8 & 4 & 20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 2\\2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}7 & 3 & 15\\4 & 3 & 8\\6 & 6 & 16\end{pmatrix}}$$

$$3\times\boxed{1\cdot 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

b)

$$|C|=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & -1 & -2\\0 & 2 & 4\end{vmatrix}=4+0+0-0-0-4=0$$

Al ser su determinante nulo la matriz C no tiene matriz inversa.

¿Se puede realizar $D^2\cdot B$? Para poderse realizar el número de columnas de D^2 debe ser igual que el número de filas de B.

$D^2=\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -5\\-3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16+15 & -20-20\\-12-12 & 15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}31 & -30\\-24 & 31\end{pmatrix}$ es una matriz 2x2. Tiene 2 columnas.

$B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ es una matriz 1x3. Tiene 1 fila.

No coinciden los valores de columnas de D^2 y de filas de B.

No es posible realizar $D^2\cdot B=\begin{pmatrix}31 & -30\\-24 & 31\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}$ ¡NO ES POSIBLE!

$$2\times\boxed{2\ \cdot\ 1}\times 3\longrightarrow ¡NO!$$

2. Los precios de un gimnasio son diferentes según la franja horaria dispuesta en tres turnos: mañana, mediodía y tarde. Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros. La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía y al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el precio de cada franja horaria. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) Llamamos x = precio de una sesión por la mañana, y = precio de una sesión al mediodía, z = precio de una sesión por la tarde.

"*Este mes han acudido 150 personas por la mañana, 30 en la franja del mediodía y 270 por la tarde y el gimnasio ha ingresado un total de 15900 euros*" → $150x+30y+270z=15900$

"*La diferencia entre el precio de la tarde y la mañana equivale a la mitad del precio para el mediodía*" → $z-x=\dfrac{y}{2}$

"*Al sumar los precios del mediodía y la tarde obtenemos el doble del precio de la mañana*" → $y+z=2x$

Reuniendo todas las ecuaciones se forma el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 150x+30y+270z=15900 \\ z-x=\dfrac{y}{2} \\ y+z=2x \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} 150x+30y+270z=15900 \\ z-x=\dfrac{y}{2} \\ y+z=2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y+9z=530 \\ 2z-2x=y \\ -2x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y+9z=530 \\ -2x-y+2z=\ \ 0 \\ -2x+y+\ z=\ \ 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{5\cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ -10x & -5y & +10z & =0 & \\ 10x & +2y & +18z & =1060 & \\ \hline & -3y & +28z & =1060 & \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{5\cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}}} \\ -10x & +5y & +5z & =0 & \\ 10x & +2y & +18z & =1060 & \\ \hline & 7y & +23z & =1060 & \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y\ \ +\ 9z=530 \\ -3y+28z=1060 \\ 7y+23z=1060 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{3\cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 7\cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}}} \\ 21y & +69z & =3180 & \\ -21y & 196z & =7420 & \\ \hline & 265z & =10600 & \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y\ \ +\ 9z=530 \\ -3y+28z=1060 \\ 265z=10600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y\quad+\ 9z=530 \\ -3y+28z=1060 \\ \boxed{z=\dfrac{10600}{265}=40} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y+360=530 \\ -3y+1120=1060 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y=170 \\ -3y=-60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+y=170 \\ \boxed{y=20} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+20=170 \Rightarrow 5x=150 \Rightarrow \boxed{x=30}$$

Los precios de las sesiones son 30 € por la mañana, 20 € por la tarde y 40 € por la tarde

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -x-4 & si\ x<c \\ -3 & si\ c\le x\le 0 \\ x^2-10x & si\ x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función *f(x)* es continua en $x = c$? *(0.5 ptos)*

b) Calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(0,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(0,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

a) Para que sea continua deben de coincidir sus límites laterales.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} -x-4=-c-4 \\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} -3=-3 \\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -3=-4-c \Rightarrow \boxed{c=-1}$$

Para $c = -1$ existe el límite de la función y coincide con el valor de la función en $x = -1$.

b) En el intervalo $(0,+\infty)$ la función es $f(x)=x^2-10x$. Es una parábola, determinamos su extremo relativo usando la derivada.

$$f(x)=x^2-10x \Rightarrow f\,'(x)=2x-10$$
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 2x-10=0 \Rightarrow \boxed{x=5}$$

$$f\,'(x)=2x-10 \Rightarrow f\,''(x)=2 \Rightarrow f\,''(5)=2>0$$

La función presenta un mínimo relativo en $x = 5$.

c) En el intervalo $(0,+\infty)$ la función es $f(x)=x^2-10x$. Es una parábola y hemos determinado su vértice, el mínimo en $x = 5$.
La función decrece en (0, 5) y crece en $(5,+\infty)$.

- En (0, 5) tomamos $x = 2$ y $f\,'(2)=4-10=-6<0$. La función decrece en (0, 5).
- En $(5,+\infty)$ tomamos $x = 10$ y $f\,'(10)=20-10=10>0$. La función crece en $(5,+\infty)$

4. Los costes de fabricación de un modelo de vehículo $C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500$ (en miles de euros) en función del número de vehículos (en cientos) fabricados $1 \le x \le 27$

a) Determina la cantidad de vehículos que dan el coste máximo y mínimo. *(1 pto)*

b) ¿A qué valor ascienden ambos? *(0.5 ptos)*

a) Utilizamos la deriva primera de la función coste.

$$C(x) = -x^3 + 45x^2 - 243x + 500 \Rightarrow C'(x) = -3x^2 + 90x - 243$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 90x - 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 324}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{576}}{2} = \begin{cases} \dfrac{30+24}{2} = 27 = x \\ \dfrac{30-24}{2} = 3 = x \end{cases}$$

Los puntos críticos son *x = 3* y *x = 27*. Determinamos si son máximos o mínimos con la segunda derivada.

$$C'(x) = -3x^2 + 90x - 243 \Rightarrow C''(x) = -6x + 90 \Rightarrow \begin{cases} C''(3) = -18 + 90 = 72 > 0 \\ C''(27) = -162 + 90 = -72 < 0 \end{cases}$$

La función costes tiene un mínimo en *x = 3*. Con la fabricación de 300 vehículos.
La función costes tiene un máximo en *x = 27*. Con la fabricación de 2700 vehículos.

b) La función costes tiene un mínimo en *x = 3*.

$$C(3) = -3^3 + 45 \cdot 3^2 - 243 \cdot 3 + 500 = 149$$

Con la fabricación de 300 vehículos se tiene un coste mínimo de 149000 €.

La función costes tiene un máximo en *x = 27*,

$$C(27) = -27^3 + 45 \cdot 27^2 - 243 \cdot 27 + 500 = 7061$$

Con la fabricación de 2700 vehículos se tiene un coste máximo de 7061000 €.

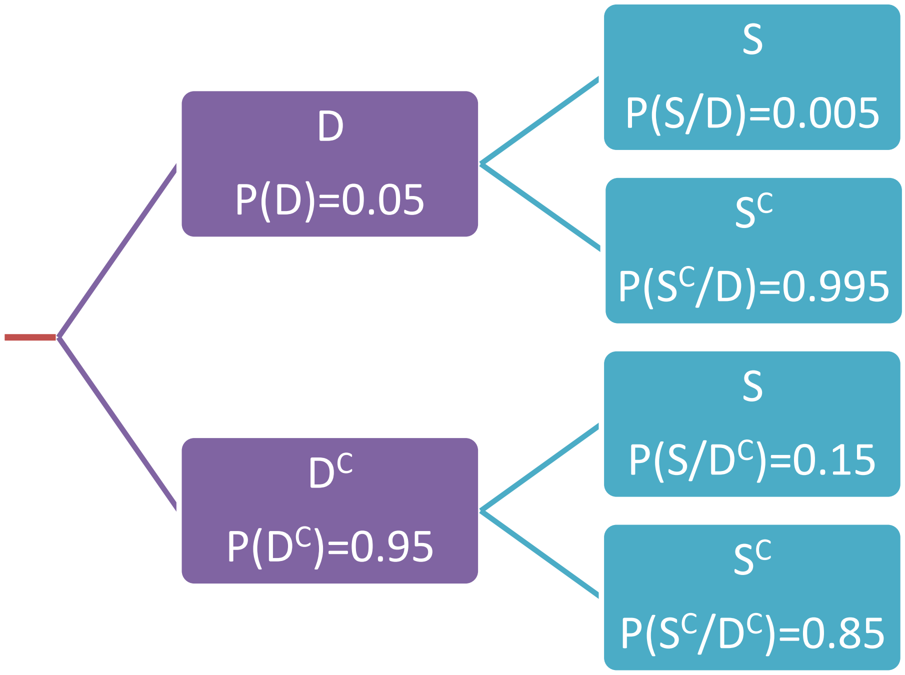
5. El 5% de los estudiantes matriculados en una determinada asignatura de bachillerato son deportistas aficionados. El 0.5% de estos alumnos deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso en dicha asignatura. Mientras que el 15% de los alumnos no deportistas aficionados obtienen una calificación de suspenso.

a) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido un suspenso en la citada asignatura? *(0.75 ptos)*

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar ha obtenido un suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea deportista aficionado? *(0.75 ptos)*

Llamamos S al suceso "Estar suspenso en una asignatura de bachillerato" y D al suceso "Ser deportista aficionado"

Construyamos un diagrama de árbol con los datos del ejercicio.



a) $P(S)=P(D)P(S/D)+P(D^C)P(S/D^C)=0.05\cdot 0.005+0.95\cdot 0.15=\boxed{0.14275}$

b)

$$P(D/S)=\frac{P(D\cap S)}{P(S)}=\frac{P(D)P(S/D)}{P(S)}=\frac{0.05\cdot 0.005}{0.14275}=\frac{25}{14275}=\boxed{\frac{1}{571}=0.0017}$$

6. El contenido en grasas saturadas por litro de leche sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 0.1 g/l. Se tomó una muestra aleatoria de 100 litros de leche obteniéndose el intervalo de confianza (0.682, 0.718) para el contenido medio de grasas saturadas en la muestra.
a) Calcula el contenido medio de grasas saturadas para los 100 litros de leche de la muestra. *(0.25 ptos)*
b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo. *(0.75 ptos)*
c) Halla un intervalo de confianza para la el contenido medio de grasas saturadas con un nivel de confianza del 95 %. *(0.5 ptos)*
d) ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con un nivel de confianza del 95 %, el error máximo admisible sea menor que 0.01 g/l? *(0.5 ptos)*

a)

X = Contenido en grasas saturadas por litro de leche.
X = N(μ, 0.1)
Tamaño de la muestra = *n = 100*
La media muestral está en el centro del intervalo de confianza, por lo que:

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{0.682+0.718}{2} = 0.7\ gramos/l$$

El contenido medio de grasas en los 100 litros de la muestra es 0.7 gramos por litro.

b) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{0.718-0.682}{2} = 0.018$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.018 = z_{\alpha/2}\cdot\frac{0.1}{\sqrt{100}} \Rightarrow 0.018 = z_{\alpha/2}\cdot 0.01 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.018}{0.010} = 1.8$$

Buscamos en la tabla.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

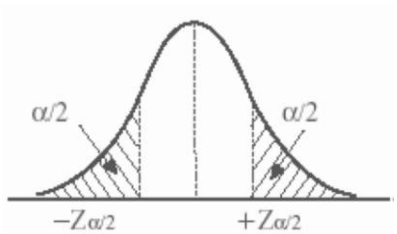
$z_{\alpha/2}$ **= 1,8** → 1 – ∝/2 = 0,9641 → ∝/2 = 0,0359 → ∝ = 0.0718 → 1 – ∝ = 0.9282

El nivel de confianza es del 92.82 %

c) Con un nivel de confianza del 95%

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0'025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{100}} = 0.0196$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(0.7 - 0.0196, \quad 0.7 + 0.0196\right) = \left(0.6804, \quad 0.7196\right)$$

d) Con un nivel de confianza del 95%

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

$$\left.\begin{array}{r} Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \dfrac{0.1}{\sqrt{n}} \\ Error < 0.01 \end{array}\right\} \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{0.1}{\sqrt{n}} < 0.01 \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{0.196}{0.01} = 19.6 \Rightarrow \boxed{n > 19.6^2 = 384.16}$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 litros de leche.