Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande.
Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos. Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco *(1.5 ptos)*
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:
$x + y \geq 2 \quad ; \quad x \leq y \quad ; \quad 0 \leq y \leq 2 \quad ; \quad x \geq 0$

a) Dibuja la región factible. *(1 pto)*
b) Determina los vértices de la región factible. *(0.25 ptos)*
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. *(0.25 ptos)*

3. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 4x - (3/2) & si\ x \leq c \\ (x-2)^2 + 3/2 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *c* la función *f(x)* es continua en $x = c$? *(0.5 ptos)*
b) Para $c = 1$, representa gráficamente la función *f*. (*1 pto*)

4. La función $v(t) = 48t^2 - 2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo *t* el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus

a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. *(0.5 ptos)*
b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. *(0.5 ptos)*
c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? *(0.5 ptos)*

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.

a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. *(0.75 ptos)*
b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? *(0.75 ptos)*

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica $\sigma = 10$ gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup. *(1 pto)*
b) Razona y explica qué se podrá hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza *(0.5 ptos)*

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. *(0.5 ptos)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\ a & b\end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros *a* y *b* para que las matrices conmuten. *(1.5 ptos)*

2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca.
Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2:

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. *(1.5 ptos)*

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x+2|+t & si\ x\le -1\\ (x-t)^2 & si\ x>-1\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en $x=-1$? *(0.5 ptos)*

b) Para $t=3$, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(-1,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

c) Para $t=3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(-1,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

4. Sea la función $f(x)=ax^4+bx^3+cx+1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=0$, un máximo en $x=1$ y la pendiente de la recta tangente en $x=-1$ es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a, b* y *c. (1.5 ptos)*

5. En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). *(0.75 ptos)*

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? *(0.75 ptos)*

6. El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 2 minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. *(1 pto)*

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? *(1 pto)*

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

1. Un cliente hace un pedido a una fábrica de harinas que ofrece 3 tamaños distintos de sacos: pequeño, mediano y grande.
Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos.
Si el peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes y el peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño.
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar el peso de cada tipo de saco *(1.5 ptos)*
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) Llamamos *x = Peso de un saco pequeño, y = Peso de un saco mediano, z = Peso de un saco grande*.

Ha pedido 20 sacos pequeños, 14 medianos y 6 grandes y el peso total de su pedido es 1800 kilogramos → $20x+14y+6z=1800$

El peso de dos sacos pequeños y tres medianos es el mismo que el de dos sacos grandes → $2x+3y=2z$

El peso de un saco grande es cuatro veces el peso de un saco pequeño → $z=4x$

Reunimos todas las ecuaciones obtenidas en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 20x+14y+6z=1800 \\ 2x+3y=2z \\ z=4x \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 20x+14y+6z=1800 \\ 2x+3y=2z \\ z=4x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x+14y+6(4x)=1800 \\ 2x+3y=2(4x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 20x+14y+24x=1800 \\ 2x+3y=8x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 44x+14y=1800 \\ -6x+3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 22x+7y=900 \\ -2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 22x+7y=900 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 22x+7(2x)=900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x+14x=900 \Rightarrow 36x=900 \Rightarrow \boxed{x=\frac{900}{36}=25} \Rightarrow \boxed{y=2\cdot 25=50} \Rightarrow \boxed{z=4\cdot 25=100}$$

El saco pequeño pesa 25 kilos, el mediano 50 kilos y el grande 100 kilos.

2. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,\ y)=3x+4y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x+y\geq 2 \quad ; \quad x\leq y \quad ; \quad 0\leq y\leq 2 \quad ; \quad x\geq 0$

a) Dibuja la región factible. *(1 pto)*
b) Determina los vértices de la región factible. *(0.25 ptos)*
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. *(0.25 ptos)*

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=2$

x	$y=2-x$
0	2
1	1
2	0

$y=x$

x	$y=x$
0	0
1	1
2	2

$y=0$

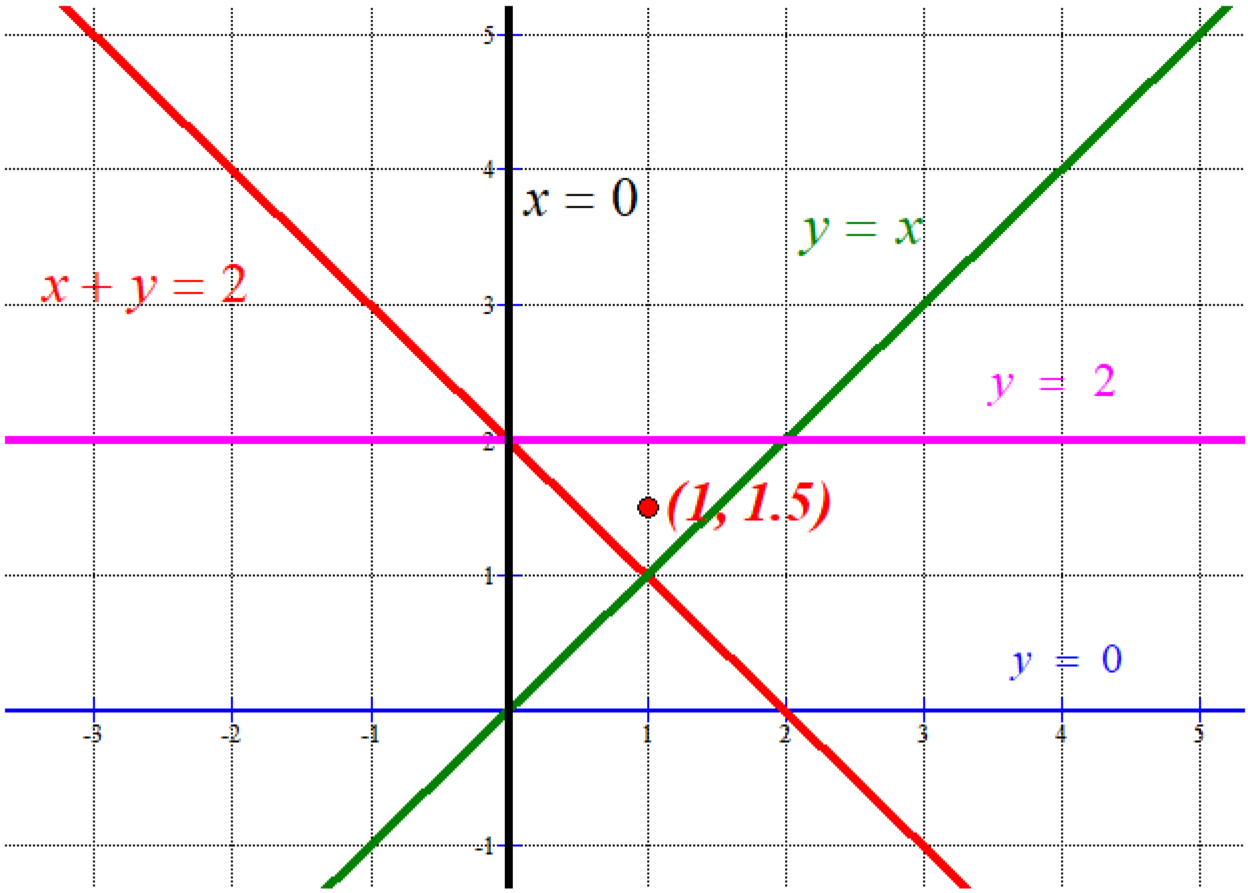
x	$y=0$
0	0
1	0
2	0

$y=2$

x	$y=2$
0	2
1	2
2	2

$x=0$

Eje OY

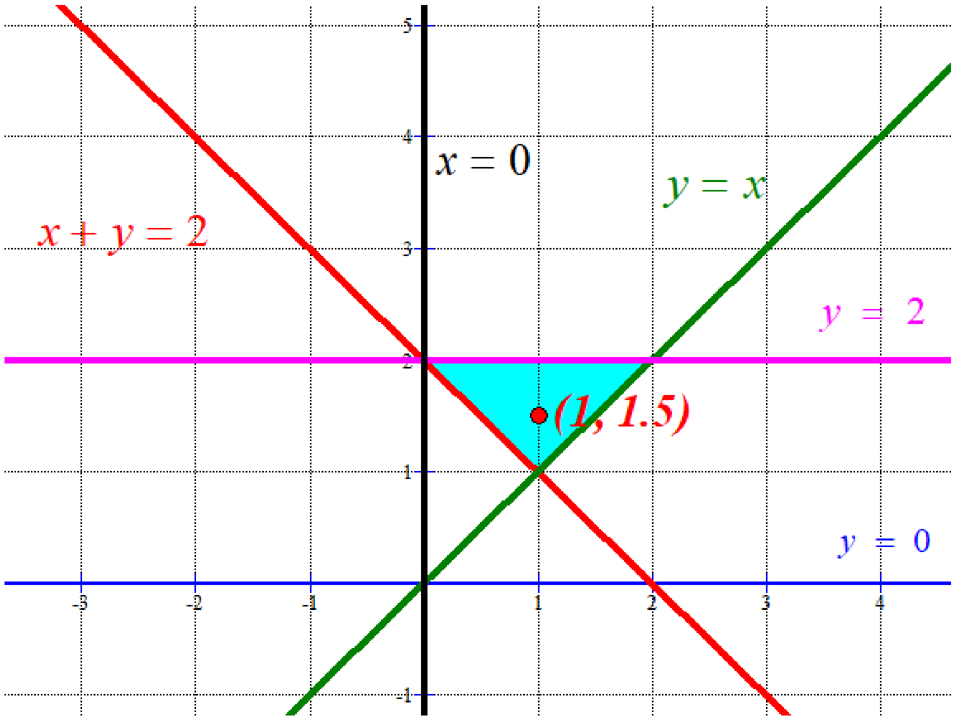


Comprobamos que el punto de coordenadas (1, 1.5) cumple todas las condiciones de la región buscada

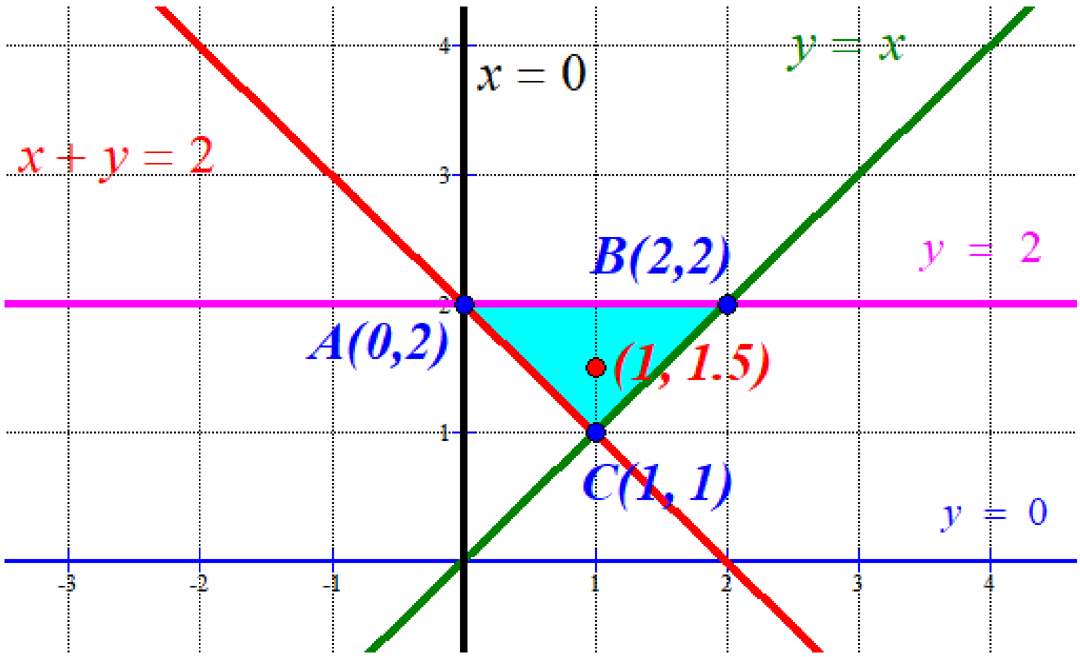
$$\left.\begin{array}{r} x+y\geq 2 \quad ; \quad x\leq y \quad ; \quad 0\leq y\leq 2 \quad ; \quad x\geq 0 \\ (1,1.5) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿1+1.5\geq 2; \quad 1\leq 1.5; \quad 0\leq 1.5\leq 2; \quad 1\geq 0?$$

¡SE CUMPLEN TODAS!

La región la coloreo de azul.



b) Los vértices de la región factible se observan en el dibujo que son A(0, 2), B(2, 2) y C(1, 1).



c) El máximo y mínimo de la función estará localizado en uno de los vértices. Valoramos la función en cada uno de ellos.

$$A(0,2) \to f(0,2) = 3\cdot 0 + 4\cdot 2 = 8$$

$$B(2,2) \to f(2,2) = 3\cdot 2 + 4\cdot 2 = 14 \to \text{Valor máximo}$$

$$C(1,1) \to f(1,1) = 3\cdot 1 + 4\cdot 1 = 7 \to \text{Valor mínimo}$$

El máximo valor de la función es 14 y se alcanza en el punto B(2, 2).
El mínimo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto C(1, 1)

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}4x-(3/2) & si\ x\le c\\ (x-2)^2+3/2 & si\ x>c\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *c* la función *f(x)* es continua en *x* = *c*? *(0.5 ptos)*

b) Para *c* = *1*, representa gráficamente la función *f*. (*1 pto*)

a) Para que la función sea continua debe serlo en *x* = *c*. Para ello deben coincidir los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^-} 4x-(3/2)=4c-\frac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to c^+} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} (x-2)^2+3/2=(c-2)^2+\frac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to c^-} f(x)=\lim\limits_{x\to c^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow 4c-\frac{3}{2}=(c-2)^2+\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4c-\frac{3}{2}=c^2-4c+4+\frac{3}{2}\Rightarrow 0=c^2-8c+7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-28}}{2}=\begin{cases}\frac{8+6}{2}=7\\ \frac{8-6}{2}=1\end{cases}$$

f(x) es continua si *c* = *7* o *c* = *1*.

b) Para *c* = *1* la función queda $f(x)=\begin{cases}4x-\frac{3}{2} & si\ x\le 1\\ (x-2)^2+\frac{3}{2} & si\ x>1\end{cases}$

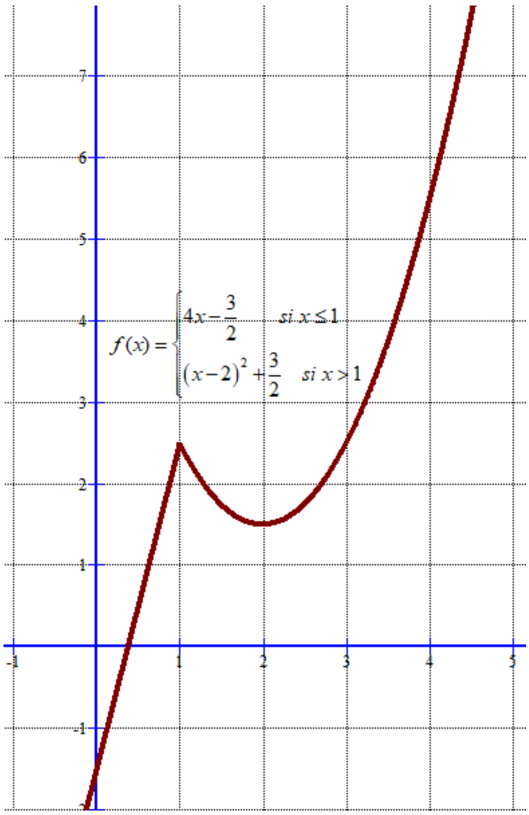
Es un trozo de recta y otro de una parábola.

$$f(x)=4x-\frac{3}{2}\quad si\ x\le 1$$

x	$y=4x-\frac{3}{2}$
–2	$-19/2$
–1	$-11/2$
0	$-3/2$
1	$5/2$

$$f(x)=(x-2)^2+\frac{3}{2}\quad si\ x>1$$

x	$y=(x-2)^2+\frac{3}{2}$
1	$5/2$
2	$3/2$
3	$5/2$
4	$11/2$



4. La función $v(t)=48t^2-2t^3$ nos da el número de ordenadores afectado por un virus informático, siendo *t* el tiempo (en horas) desde que se localizó el primer ordenador con virus
a) Averigua, si existe, el momento en el que el virus dejará de propagarse. *(0.5 ptos)*
b) Estudia cuando aumenta y cuando disminuye la propagación del virus. *(0.5 ptos)*
c) ¿En qué momento se produce el número máximo de ordenadores afectados? ¿cuántos ordenadores? *(0.5 ptos)*

a) El virus deja de propagarse cuando los ordenadores contagiados son 0.

$$v(t)=0\Rightarrow 48t^2-2t^3=0\Rightarrow 2t^2(24-t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ o\\ 24-t=0\Rightarrow t=24\end{cases}$$

El virus tiene 0 contagios en el momento *t = 0* y a las 24 horas.

b) Estudiamos el crecimiento y decrecimiento de *v(t)*.

$$v(t)=48t^2-2t^3\Rightarrow v'(t)=96t-6t^2$$
$$v'(t)=0\Rightarrow 96t-6t^2=0\Rightarrow 6t(16-t)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ 16-t=0\Rightarrow t=16\end{cases}$$

Los puntos críticos son *t = 0* y *t = 16*. Vemos que pasa entre estos valores y después de ellos.

- En $(0,16)$ tomamos *t = 10* y la derivada vale $v'(10)=960-600=360>0$. *v(t)* es creciente de 0 a 16 horas.
- En $(16,+\infty)$ tomamos *t = 20* y la derivada vale $v'(20)=1920-2400=-480<0$. *v(t)* es decreciente a partir de las 16 horas.

De 0 a 16 horas el número de ordenadores afectados aumenta y a partir de las 16 horas el número de ordenadores afectados disminuye.

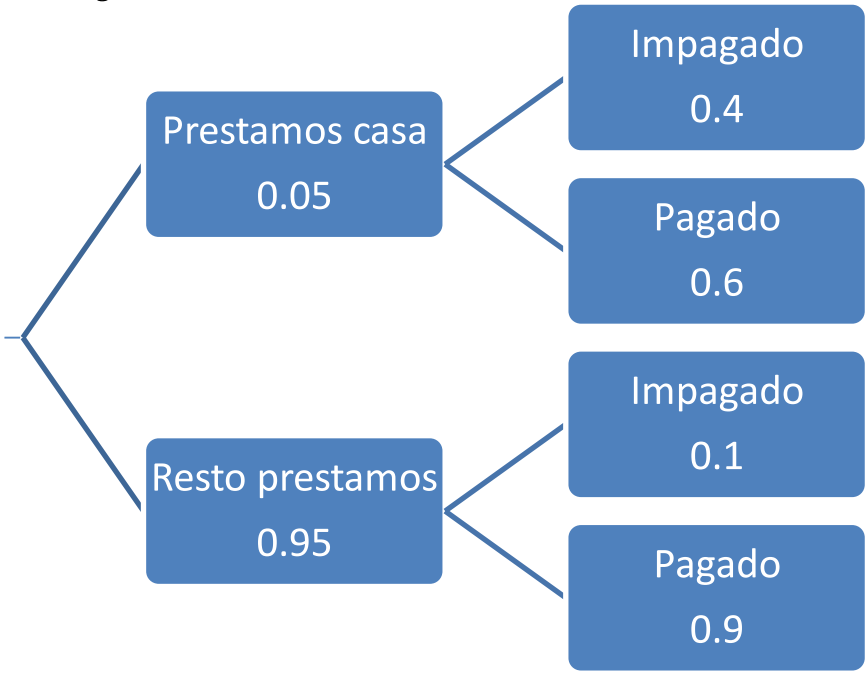
c) Hemos visto que a las 16 horas hay un máximo de la función v(t). Este número de ordenadores afectados lo obtenemos hallando el valor de *v(16)*.

$$v(16)=48\cdot 16^2-2\cdot 16^3=4096$$

El número máximo de ordenadores afectados es 4096 y se produce a las 16 horas.

5. En un cierto banco el 5% de los créditos concedidos son para la compra de una casa. De los créditos concedidos para la compra de una casa, el 40% resultan impagados. Del resto de créditos concedidos que no son para la compra de una casa, se sabe que el 10% de ellos resultan impagados.
a) Calcula la probabilidad de que elegido un crédito al azar sea de los impagados. *(0.75 ptos)*
b) Sabiendo que un crédito se ha pagado, ¿cuál es la probabilidad de que el crédito fuera para una casa? *(0.75 ptos)*

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Impagado}) = P(\text{Casa})P(\text{Impagado / Casa}) + P(\text{Resto})P(\text{Impagado / Resto}) =$$

$$= 0.05 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.1 = 0.020 + 0.095 = \boxed{0.115}$$

b)

$$P(\text{Casa / Pagado}) = \frac{P(\text{Casa} \cap \text{Pagado})}{P(\text{Pagado})} = \frac{P(\text{Casa})P(\text{Pagado / Casa})}{1 - P(\text{Impagado})} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot 0.6}{1 - 0.115} = \frac{30}{885} = \boxed{\frac{2}{59} = 0.0339}$$

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar en frascos de 500 gramos de kétchup en una muestra de 10 frascos y ha resultado ser: 60, 80, 120, 95, 65, 70, 75, 85, 100 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos del kétchup se distribuye según una ley normal de desviación típica σ = 10 gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en un frasco de 500 gramos de kétchup. *(1 pto)*

b) Razona y explica qué se podrá hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza *(0.5 ptos)*

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 85 gramos con una probabilidad del 98.5 %? Razona tu respuesta. *(0.5 ptos)*

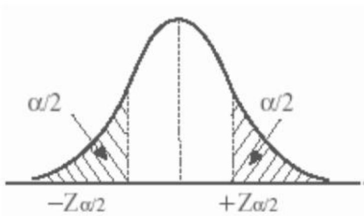
X = Gramos de azúcar en frascos de 500 gramos.
X = N(μ, 10)

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{60+80+120+95+65+70+75+85+100+90}{10} = 84$$

a) Con un nivel de confianza del 97%

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0’015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,17**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850	0.9854	0.9857



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.86$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(84 - 6.86, \quad 84 + 6.86\right) = \left(77.14, \quad 90.86\right)$$

b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (*n* está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$ disminuyendo el nivel de confianza. Manteniendo el nivel de confianza sólo puede ser menor amplitud con mayor tamaño de muestra.

c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es $\left(77.14, \quad 90.86\right)$. La media 85 pertenece a este intervalo.

Si aumentamos el nivel de confianza al 98.5% la amplitud del intervalo de confianza aumenta y la media 85 seguirá perteneciendo al intervalo de confianza, pues este nuevo intervalo tiene el mismo centro pero más amplitud.

Propuesta B

1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}1 & 5\\a & b\end{pmatrix}$, encontrar los valores de los parámetros *a* y *b* para que las matrices conmuten. *(1.5 ptos)*

Para que conmuten debe cumplirse que AB = BA.

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5\\a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+3a & 5+3b\\3+a & 15+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+15 & 3+5\\a+3b & 3a+b\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1+3a=16\\5+3b=8\\3+a=a+3b\\15+b=3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a=15\\3b=3\\3=3b\\15=3a\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}a=5\\b=1\end{cases}}$$

Los valores buscados son *a = 5* y *b = 1*

2. Se reparten tres tipos de becas: B_1 por valor de 400 euros, B_2 de 160 euros y B_3 de 200 euros. El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros y son 145 personas las que obtienen beca. Cada persona solamente puede obtener una beca.
Sabiendo que la cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2:
a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permite averiguar qué cantidad de personas reciben cada tipo de beca. *(1.5 ptos)*
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. *(0.5 ptos)*

a) Llamamos x = número de becas B_1, y = número de becas B_2, z = número de becas B_3.

"*El dinero total destinado a las becas es de 43400 euros*" → $400x+160y+200z=43400$

"*Son 145 personas las que obtienen beca*" → $x+y+z=145$

"*La cantidad de personas que recibe la beca B_1 es 5 veces mayor que la que obtiene la beca B_2*" → $x=5y$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 400x+160y+200z=43400 \\ x+y+z=145 \\ x=5y \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 400x+160y+200z=43400 \\ x+y+z=145 \\ x=5y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x+4y+5z=1085 \\ x+y+z=145 \\ x=5y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 50y+4y+5z=1085 \\ 5y+y+z=145 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 54y+5z=1085 \\ 6y+z=145 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 54y+5z=1085 \\ z=145-6y \end{array}\right\} \Rightarrow 54y+5(145-6y)=1085 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 54y+725-30y=1085 \Rightarrow 24y=360 \Rightarrow \boxed{y=\frac{360}{24}=15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=145-90=55} \Rightarrow \boxed{x=75}$$

Se reparten 75 becas B_1, 15 becas B_2 y 55 becas B_3.

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}|x+2|+t & si\ x\leq -1\\ (x-t)^2 & si\ x>-1\end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = -1$? *(0.5 ptos)*

b) Para $t = 3$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

c) Para $t = 3$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1,+\infty)$. *(0.5 ptos)*

a) Para que la función sea continua deben de coincidir sus límites laterales en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}|x+2|+t=1+t\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x-t)^2=(-1-t)^2=t^2+2t+1\\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\end{array}\right\}\Rightarrow t^2+2t+1=1+t\Rightarrow t^2+t=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(t+1)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ o\\ t=-1\end{cases}$$

Los valores buscados son $t = 0$ y $t = -1$.

b) Para $t = 3$ la función es $f(x)=\begin{cases}|x+2|+3 & si\ x\leq -1\\ (x-3)^2 & si\ x>-1\end{cases}$.

En el intervalo $(-1,+\infty)$ la función es $f(x)=(x-3)^2$.

Calculamos sus extremos relativos usando la derivada primera y segunda.

$$f(x)=(x-3)^2\Rightarrow f'(x)=2(x-3)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2(x-3)=0\Rightarrow x=3$$

El punto crítico es $x = 3$. Comprobamos si es mínimo o máximo.

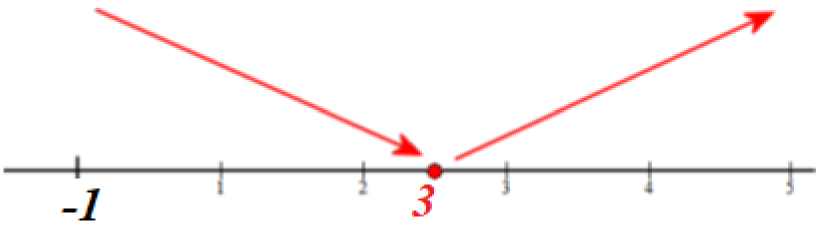
$$f'(x)=2(x-3)\Rightarrow f''(x)=2$$

$$f''(3)=2>0$$

En $x = 3$ hay un mínimo de la función.

$f(3)=(3-3)^2=0$ → El mínimo relativo se sitúa en el punto (3, 0).

c) Tenemos ya el punto crítico de la función en $x = 3$ y además es un mínimo, por lo que la función decrece en (–1,3) y crece en (3, +∞).



4. Sea la función $f(x)=ax^4+bx^3+cx+1$. Sabemos que presenta un punto de inflexión en el punto de abscisa *x = 0*, un máximo en *x = 1* y la pendiente de la recta tangente en *x = –1* es 24. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*. *(1.5 ptos)*

Si la función presenta un máximo en *x = 1* se cumple que la derivada se anula en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^4+bx^3+cx+1 \Rightarrow f'(x)=4ax^3+3bx^2+c \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+3b+c=0$$

Además, por ser punto de inflexión en *x = 0* se anula la derivada segunda en *x = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=4ax^3+3bx^2+c \Rightarrow f''(x)=12ax^2+6bx \\ f''(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se cumple}$$

Además, la pendiente de la recta tangente en *x = –1* es 24 → *f ´(–1) = 24.*

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=4ax^3+3bx^2+c \\ f'(-1)=24 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a(-1)^3+3b(-1)^2+c=24 \Rightarrow -4a+3b+c=24$$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4a+3b+c=0 \\ -4a+3b+c=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=-4a-3b \\ -4a+3b+c=24 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4a+3b-4a-3b=24 \Rightarrow -8a=24 \Rightarrow \boxed{a=-3} \Rightarrow \boxed{c=12-3b}$$

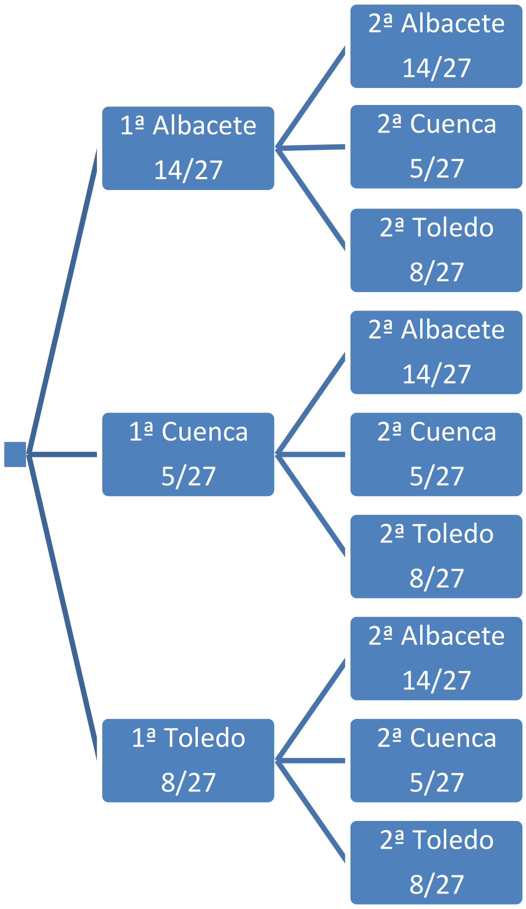
Si la función presenta un máximo en *x = 1* la derivada segunda es negativa.

$$\left.\begin{array}{r} f''(x)=12ax^2+6bx \\ a=-3 \\ f''(1)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow -36\cdot 1^2+6b\cdot 1<0 \Rightarrow 6b<36 \Rightarrow \boxed{b<6}$$

Los valores buscados son infinitos: *a = –3, b = cualquiera menor que 6* y *c = 12 – 3b*.

5. En una clase de pintura hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). *(0.75 ptos)*
b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Cuenca? *(0.75 ptos)*

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$P(\text{Las dos entradas a alumnos que no son de Albacete}) =$$
$$= P(CC) + P(CT) + P(TC) + P(TT) =$$
$$= \frac{5}{27}\cdot\frac{5}{27} + \frac{5}{27}\cdot\frac{8}{27} + \frac{8}{27}\cdot\frac{5}{27} + \frac{8}{27}\cdot\frac{8}{27} = \frac{25+40+40+64}{27\cdot 27} = \boxed{\frac{169}{729} = 0.2318}$$

b) Para que les toque a los cinco alumnos de Cuenca en los cinco sorteos debe tocarle en el primer sorteo la primera entrada, con probabilidad 5/27. Le debe tocar el segundo sorteo con probabilidad 4/26, pues un alumno de Cuenca ya no se incluye en el segundo sorteo.
En el tercero con probabilidad 3/25, el cuarto con probabilidad 2/24 y en el quinto con probabilidad 1/23.
La probabilidad de que ocurra todo esto es el producto de las probabilidades.

$$P(5 \text{ entradas a los 5 alumnos de Cuenca}) = \frac{5}{27}\cdot\frac{4}{26}\cdot\frac{3}{25}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{1}{23} = \boxed{\frac{1}{80730} = 0.0000123}$$

6. El tiempo de atención a un paciente por parte de un centro médico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 2 minutos. Se hace un estudio de los tiempos de atención de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.
a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de atención al paciente por parte del centro, con un nivel de confianza del 95 %. *(1 pto)*
b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? *(1 pto)*

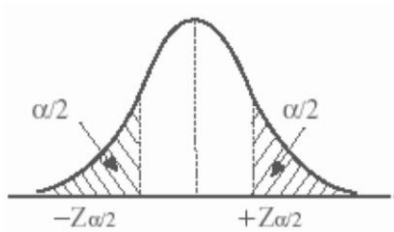
X = Tiempo de atención a un paciente (en minutos).
X = N(μ, 2)

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3$$

a) Con un nivel de confianza del 95%

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

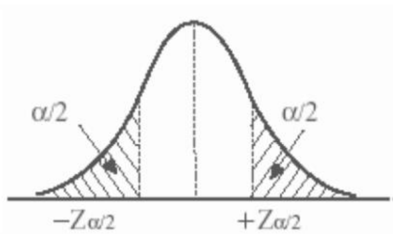


$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} = 1.2396$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (10.3 - 1.2396, 10.3 + 1.2396) = (9.0604, 11.5396)$$

b) Con un nivel de confianza del 95% tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**



Queremos encontrar un tamaño mínimo de la muestra para que el error sea menor de 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 2)^2 = 15.3664$$

El tamaño mínimo es de 16 pacientes.