# Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura
Curso 2020-2021

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

**INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN**
El examen consta de **10 problemas**, cuyo valor es de **2 puntos cada uno**. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

**PROBLEMA 1**

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Halla la matriz $X$ que sea solución de la ecuación matricial $A\cdot X+X=B$. Justifica la respuesta.

**PROBLEMA 2**

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e $I$ la matriz identidad de orden 2.

Calcula, justificando la respuesta, los valores de *x, y, z* para que se verifique que $A^t\cdot B=I+C$, siendo $A^t$ la matriz traspuesta de *A*.

**PROBLEMA 3**

Sea A la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$$

a) Determina, justificando la respuesta para qué valores de $x$ no existe la inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula la inversa de A para $x=0$. **(1 punto)**

**PROBLEMA 4**

Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justifica las respuestas.

**PROBLEMA 5**

El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x)=\begin{cases} A+Bx & si \quad 1\le x\le 2 \\ 2-Bx+Ax^2 & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$$

Se sabe que, para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 (miles de euros) y que la función es continua. Determina, justificando la respuesta, las constantes A y B.

**PROBLEMA 6**

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t + 20 \quad (0 \leq t \leq 6)$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento del caudal a lo largo de esas 6 horas.

b) Determina las horas de máximo y mínimo caudal, Calcula los caudales máximo y mínimo. Justifica las respuestas.

.

**PROBLEMA 7**

Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 + x - 2$ y el eje OX entre *x=0* y *x=2.* **(1 punto)**

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$ **(1 punto)**

**PROBLEMA 8**

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

**PROBLEMA 9**

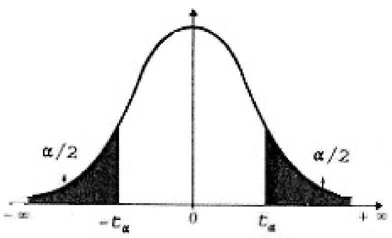
Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular una estimación puntual de la proporción de empresas de esa ciudad que reciclan su papel usado. **(1 punto)**

b) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que recicla. **(1 punto)**

**PROBLEMA 10**

Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.




| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | ∞ | 2.576 | 2.326 | 2.170 | 2.054 | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| 0.1 | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | 1.440 | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.896 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |

# SOLUCIONES

**PROBLEMA 1**

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Halla la matriz *X* que sea solución de la ecuación matricial *A·X+X=B*. Justifica la respuesta.

$$A\cdot X+X=B\Rightarrow (A+I)X=B\Rightarrow X=(A+I)^{-1}B$$

$$A+I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

$|A+I|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-4+2=-2\neq 0$. Existe la inversa.

$$(A+I)^{-1}=\frac{Adj\left((A+I)^T\right)}{|A+I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=(A+I)^{-1}B\Rightarrow X=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8-1 & 8\\ 4+1 & 4\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-\frac{7}{2} & -4\\ -\frac{5}{2} & -2\end{pmatrix}}$$

**PROBLEMA 2**

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$ e $I$ la matriz identidad de orden 2. Calcula, justificando la respuesta, los valores de *x*, *y*, *z* para que se verifique que $A^t \cdot B = I + C$, siendo $A^t$ la matriz traspuesta de *A*.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ x & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B = I + C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & x \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 8 \\ 15 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2+3x & 2y+4x \\ 3+12 & -3y+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 8 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2+3x = z+1 \\ 2y+4x = 8 \\ 15 = 15 \\ -3y+16 = 10 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-z=3 \\ 4x+2y=8 \\ -3y=-6 \rightarrow \boxed{y=2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-z=3 \\ 4x+4=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-z=3 \\ 4x=4 \rightarrow \boxed{x=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 3-z=3 \Rightarrow \boxed{z=0}$$

Se cumple para *x = 1*, *y = 2*, *z = 0*

**PROBLEMA 3**

Sea A la matriz siguiente:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{pmatrix}$$

a) Determina, justificando la respuesta para qué valores de *x* no existe la inversa de A. **(1 punto)**
b) Calcula la inversa de A para *x=0*. **(1 punto)**

a) Para que no exista la inversa de A debe ser su determinante nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix}=-4x+2+0-0-2x-8=-6x-6$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6x-6=0 \Rightarrow 6x=-6 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Para $x=-1$ no existe la inversa de A.

b) Para $x=0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=2-8=-6\neq 0. \text{ Existe la inversa.}$$

$$A^T=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-6}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -12 & -6 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

**PROBLEMA 4**
Un taller de confección textil produce dos categorías de trajes: de señora y de caballero. Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de trajes de caballero. Si tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales y el beneficio obtenido por cada traje de señora es de 150 euros y de 200 euros por traje el caballero, ¿Cuántos trajes de cada tipo han de fabricarse diariamente para hacer máximos los beneficios? ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? Justifica las respuestas.

Llamemos “*x*” al número de trajes de señora fabricados en 1 día e “*y*” al número de trajes de caballero fabricados en 1 día.

Deseamos maximizar los beneficios, que se expresan con la función: $B(x,y)=150x+200y$ .

Las restricciones son:

- “*Dispone de material para fabricar diariamente 850 trajes de señora y 650 de caballero”* → $x \le 850 \quad y \le 650$
- *“Tiene que fabricar diariamente como máximo 1000 unidades totales”* → $x+y \le 1000$

Añadimos la restricción de que el número de trajes no puede ser negativo y se resumen en:

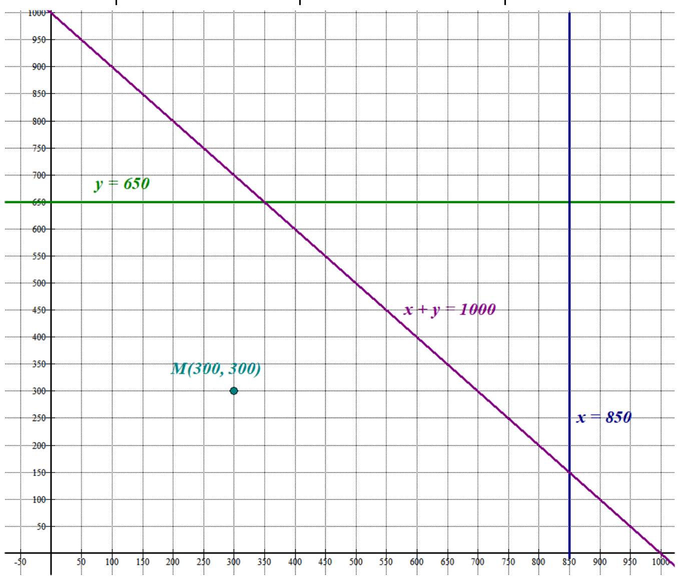
$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 850 \\ y \le 650 \\ x+y \le 1000 \end{array}\right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones.

| $x=850$ | $y$ |
|---|---|
| 850 | 0 |
| 850 | 150 |

| $x$ | $y=650$ |
|---|---|
| 0 | 650 |
| 350 | 650 |

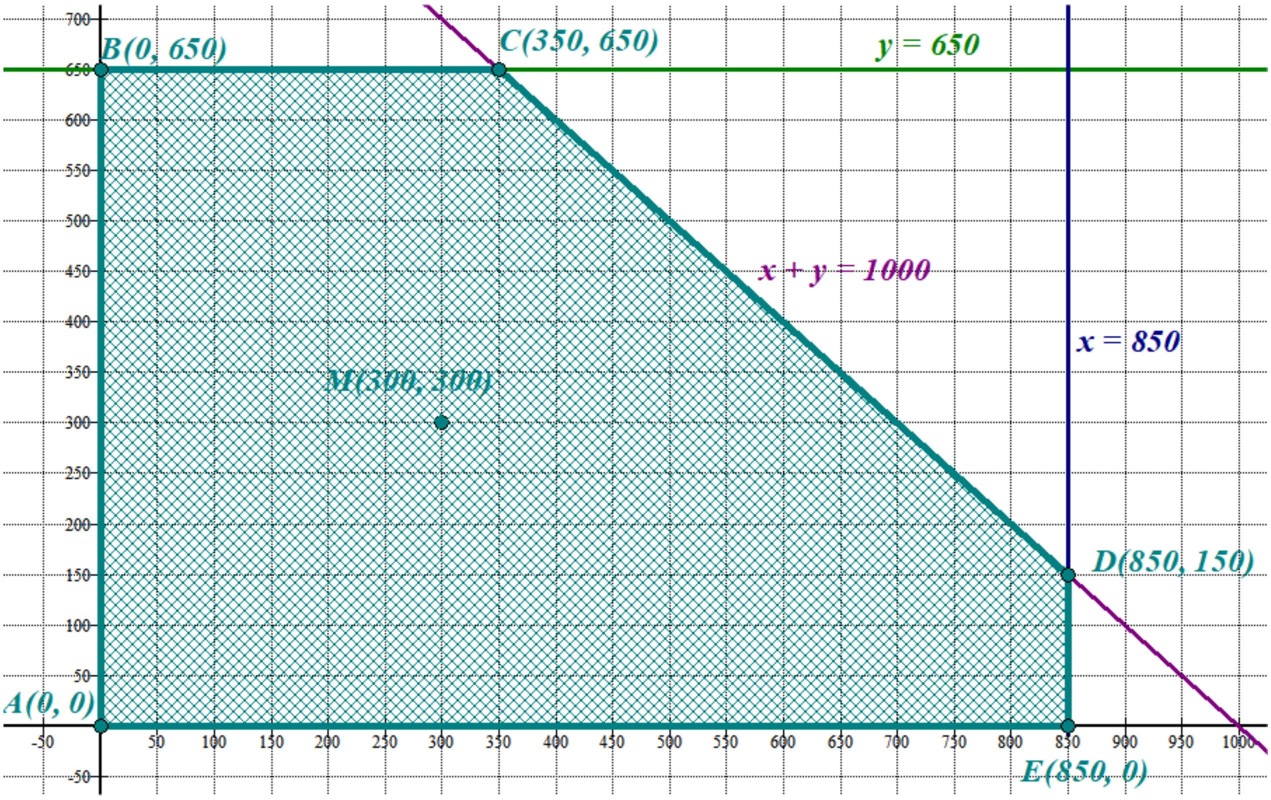
| $x$ | $y=1000-x$ |
|---|---|
| 0 | 1000 |
| 850 | 150 |
| 350 | 650 |




Probamos si el punto M(300, 300) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l}300 \geq 0 \\ 300 \geq 0 \\ 300 \leq 850 \\ 300 \leq 650 \\ 300+300 \leq 1000\end{array}\right\}$$

Las cumple todas, por lo que la región factible es la limitada por los ejes de coordenadas X e Y, las 3 rectas dibujadas y que contiene al punto M(300, 300).




Valoramos la función beneficio $B(x, y) = 150x + 200y$ en cada uno de los vértices y determinamos donde se alcanza el máximo beneficio.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 650) → $B(0,650) = 0 + 130000 = 130000$

C(350, 650) → $B(350,650) = 52500 + 130000 = 182500$

D(850, 150) → $B(850,150) = 127500 + 30000 = 157500$

E(850, 0) → $B(850,0) = 127500 + 0 = 127500$

Los máximos beneficios se obtienen en el punto C(350, 650). Significa fabricar 350 trajes de señora y 650 de caballero.

El máximo beneficio se ha calculado en el apartado anterior y es de 182500 €.

**PROBLEMA 5**

El precio de cada acción de una determinada empresa, x, oscila entre 1 y 5 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa (en miles de euros) depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x)=\begin{cases} A+Bx & si \quad 1\le x\le 2 \\ 2-Bx+Ax^2 & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$$

Se sabe que, para un precio de la acción de 1 euro, la facturación es 4 (miles de euros) y que la función es continua. Determina, justificando la respuesta, las constantes A y B.

Como para un precio de la acción de 1 euro la facturación es de 4 mil euros, esto significa que $F(1)=4 \Rightarrow \boxed{A+B=4}$

Para que la función sea continua en *x = 2* debe cumplirse:

- Existe $F(2)=A+2B$
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^-} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} A+Bx=A+2B$
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2-Bx+Ax^2=2-2B+4A$
- Los tres valores deben ser iguales. $A+2B=2-2B+4A \Rightarrow \boxed{-3A+4B=2}$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{matrix} -3A+4B=2 \\ A+B=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -3A+4B=2 \\ A=4-B \end{matrix}\right\} \Rightarrow -3(4-B)+4B=2 \Rightarrow -12+3B+4B=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7B=14 \Rightarrow \boxed{B=2} \Rightarrow \boxed{A=4-2=2}$$

Los valores buscados son $A=B=2$.

**PROBLEMA 6**

Durante la crecida de un río, la Confederación Hidrográfica del Tajo ha estimado que el caudal (en $m^3/s$) ha variado durante las primeras 6 horas de acuerdo con la función:

$$C(t)=2t^3-21t^2+60t+20 \quad (0\le t\le 6)$$

a) Estudia el crecimiento y decrecimiento del caudal a lo largo de esas 6 horas.

b) Determina las horas de máximo y mínimo caudal, Calcula los caudales máximo y mínimo. Justifica las respuestas.

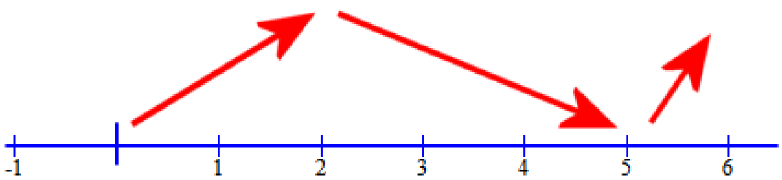
a) Derivamos la función $C(t)=2t^3-21t^2+60t+20 \Rightarrow C'(t)=6t^2-42t+60$

Igualamos a cero.

$$C'(t)=0\Rightarrow 6t^2-42t+60=0\Rightarrow t^2-7t+10=0\Rightarrow t=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm3}{2}=\begin{cases}=\dfrac{7+3}{2}=5\\ =\dfrac{7-3}{2}=2\end{cases}$$

Veamos cual es máximo y cual mínimo estudiando el signo de la derivada antes de 2, entre 2 y 5 y después de 5.

- En $(0,2)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $C'(1)=6-42+60=22>0$ la función crece.
- En $(2,5)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $C'(3)=54-126+60=-12<0$ la función decrece.
- En $(5,6)$ tomamos $x=5{,}5$ y la derivada vale $C'(5{,}5)=6\cdot30{,}25-231+60=10{,}5>0$ la función crece.




El caudal aumenta de 0 a 2 horas, disminuye de 2 a 5 horas y crece de 5 a 6 horas.

b) Valoramos el caudal en los momentos inicial y final, es decir, 0 horas y 6 horas.

$$C(0)=20 \qquad C(6)=432-21\cdot36+360+20=56$$

El máximo relativo en caudal se produce a las 2 horas y el mínimo relativo a las 5 horas.

Veamos el caudal en esas horas.

$$C(2)=16-84+120+20=72 \qquad C(5)=250-525+300+20=45$$

La hora de mínimo caudal es la hora 0 y la de máximo caudal es a las 2 horas.

El caudal máximo es de 72 $m^3/s$ y el mínimo es de 20 $m^3/s$.

**PROBLEMA 7**

Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el área encerrada por la función $f(x)=x^2+x-2$ y el eje OX entre *x=0* y *x=2*. **(1 punto)**

b) Calcular las asíntotas de la función $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$ **(1 punto)**

a) Determinamos los puntos de corte de la gráfica con el eje OX (y = 0).

$$f\left(x\right)=0\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+8}}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1=x\\ \dfrac{-1-3}{2}=-2=x\end{cases}$$

Solo el valor *x = 1* está dentro del intervalo (0, 2) por lo que el área pedida es la suma del valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de $f\left(x\right)=x^2+x-2$ y de la misma función entre 1 y 2.

$$\left|\int_0^1 x^2+x-2dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^1\right|=\left|\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right]-\left[\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}-2\cdot 0\right]\right|=\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=\boxed{\frac{7}{6}}$$

$$\left|\int_1^2 x^2+x-2dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2\right|=\left|\left[\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right]-\left[\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right]\right|=\left|\frac{8}{3}+2-4-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right|=\boxed{\frac{11}{6}}$$

$$\boxed{Área\ =\frac{7}{6}+\frac{11}{6}=3\,u^2}$$

b) Averiguamos el dominio de la función $g(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-3x-4}$ .

$$x^2-3x-4=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2+16}}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+5}{2}=4=x\\ \dfrac{3-5}{2}=-1=x\end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,4\}$

**Asíntota vertical**. $x=a$ .

Como el dominio es $\mathbb{R}-\{-1,4\}$ comprobamos el valor de los límites de la función cuando se acerca a cada uno de los valores excluidos del dominio.

$$\lim_{x\to -1} g(x)=\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+1}{x^2-3x-4}=\frac{9}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to 4} g(x)=\lim_{x\to 4}\frac{2x^2+1}{x^2-3x-4}=\frac{33}{0}=\infty$$

Hay dos asíntotas verticales: $x=-1$ y $x=4$

**Asíntota horizontal.** $y = b$

$$b = \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x-4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1} = 2$$

La asíntota horizontal es $y = 2$

**Asíntota oblicua.** $y = mx + n$

No hay pues existe asíntota horizontal.

**PROBLEMA 8**

En un bosque hay 50 abetos, 30 cipreses y 120 pinos. Una enfermedad provocada por una oruga afecta a 25 abetos, 9 cipreses y 48 pinos. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga, si se sabe que es un pino. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un árbol elegido al azar esté infectado por la oruga. **(1 punto)**

**a)**

$$P\left(\text{Esté infectado, sabiendo que es un pino}\right)=\frac{\text{número de pinos infectados}}{\text{número de pinos}}=\frac{48}{120}=\boxed{0,4}$$

**b)**

$$P\left(\text{Sea elegido un árbol y esté infectado}\right)=\frac{\text{nº de árboles infectados}}{\text{nº de árboles}}=\frac{25+9+48}{50+30+120}=\frac{82}{200}=\boxed{0,41}$$

**PROBLEMA 9**

Con el fin de estimar la proporción de empresas de una determinada ciudad que reciclan el papel usado, se selecciona una muestra de 400 de ellas, resultando que 336 reciclan el papel que utilizan. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular una estimación puntual de la proporción de empresas de esa ciudad que reciclan su papel usado. **(1 punto)**

b) Calcular un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que recicla. **(1 punto)**

a) La estimación puntual de la proporción de empresas que reciclan su papel usado es:

$$pr = \frac{336}{400} = 0.84 = 84\%$$

b) Para un nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$

El error es

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \Rightarrow E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0.84 \cdot 0.16}{400}} = 0.036$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.84 - 0.036, 0.84 + 0{,}036) = (0.804, \quad 0.876)$$

Entre el 80.4% y el 87.6 % de empresas reciclan el papel usado (con un nivel de confianza del 95%)

**PROBLEMA 10**
Se desea conocer la media de ingresos por publicidad de los diarios regionales, variable que se supone con distribución normal de desviación típica 400 euros. Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 95% para la media, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 160 euros? Justificar la respuesta.

Sea X = Media de ingresos por publicidad de un diario regional.

X = N(μ, 400)

El nivel de confianza del 95% significa que

1 – α = 0,95 → α = 0,05 →α/2 = 0’025 →1 – α/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

| α | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] | 1.960 | 1.881 | 1.812 | 1.751 | 1.695 |
| [illegible] | 1.645 | 1.598 | 1.555 | 1.514 | 1.476 | [illegible] | 1.405 | 1.372 | 1.341 | 1.311 |
| 0.2 | 1.282 | 1.254 | 1.227 | 1.200 | 1.175 | 1.150 | 1.126 | 1.103 | 1.080 | 1.058 |
| 0.3 | 1.036 | 1.015 | 0.994 | 0.974 | 0.954 | 0.935 | 0.915 | 0.896 | 0.878 | 0.860 |
| 0.4 | 0.842 | 0.824 | 0.806 | 0.789 | 0.772 | 0.755 | 0.739 | 0.722 | 0.706 | 0.690 |

El error es la mitad del intervalo de confianza → Error = 160/2 = 80

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 80 = 1,96 \cdot \frac{400}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{400}{80} = 9,8 \Rightarrow n = 9,8^2 = 96,04$$

El tamaño de la muestra debe ser de un mínimo de 97 diarios.