| CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA | **Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021** | **Código: 40** |
|---|---|---|

# MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

# MODELO

**EJERCICIO 1. Álgebra**. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ y $3C-B$.

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

**EJERCICIO 2. Álgebra.** El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.

**a)** Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.

**b)** Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

**c)** Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

**EJERCICIO 3. Análisis.** Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función: $G(t)=\begin{cases} 4-\left(\dfrac{t}{3}\right), & 0\le t\le 3 \\ (5t-3)/(t+1), & t>3 \end{cases}$ siendo $t$ el tiempo en años transcurridos.

**a**) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400.000 euros? Razona la respuesta.

**b**) ¿Cuándo crece $G(t)$? ¿Cuándo decrece $G(t)$? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?

**c**) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

**EJERCICIO 4. Análisis.** Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de " x " paraguas viene dado por la función $C(x)=x^2-10x$ , estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0\le x\le 70$)

**a)** Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos " x".

**b)** Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.

Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.
**a)** Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
**b)** Si el vehículo revisado resulta ser **NO** defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Una editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.
**a)** ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7% y el 90,3%?
**b)** Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n$=144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

# SOLUCIONES

**EJERCICIO 1. Álgebra**. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ $y$ $3C-B$.

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C-B=3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A+B=3C-B$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3c-b \\ a-b=-9+b \\ a+3=3c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a-2b \qquad =-9 \\ a \qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a \qquad =2b-9 \\ a \qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b-9+2b-3c=0 \\ 2b-9-3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b-3c=9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=4b-9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b-4b+9=3 \Rightarrow -2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=12-9 \\ a=6-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=3 \\ \boxed{a=-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

La solución es $\boxed{a=-3; \quad b=3; \quad c=1}$

**EJERCICIO 2. Álgebra.** El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.
**a)** Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
**b)** Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
**c)** Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

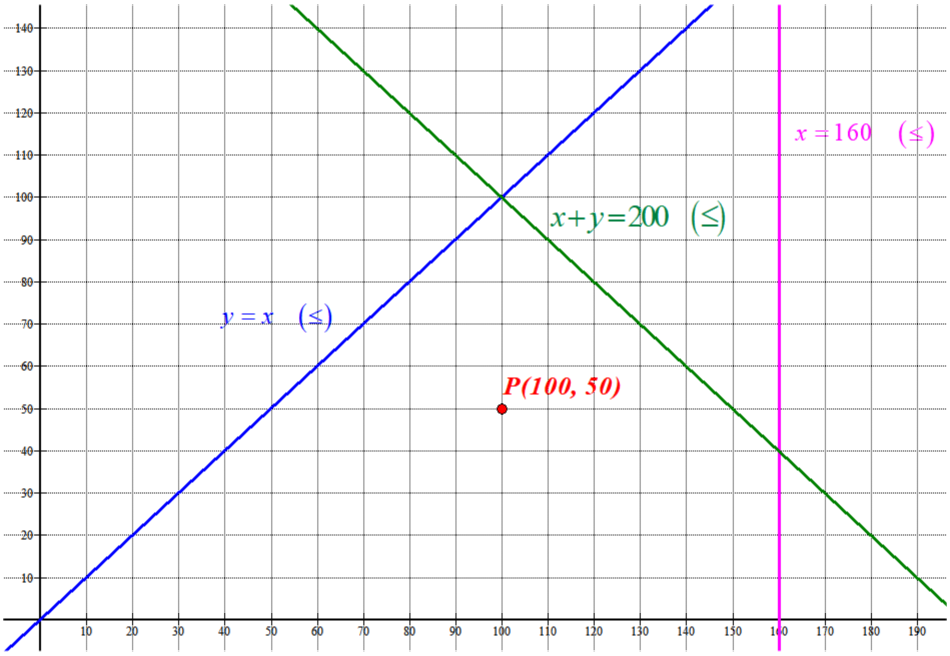
a) Llamamos "x" al número de habitaciones de tipo A e "y" al número de habitaciones tipo B. Las restricciones del problema las expresamos como inecuaciones.

"E*l número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A*" → $y \leq x$
"E*l número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160*" → $x \leq 160$
"E*n total serán necesarias como máximo 200 habitaciones*" → $x + y \leq 200$
Todos los valores son positivos → $x \geq 0;\ y \geq 0$

El conjunto de restricciones forman un sistema de inecuaciones que representaremos como una región del plano, región factible (donde se encuentra la solución del problema).

$$\left.\begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.




$y = x$

| $x$ | $y = x$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 100 | 100 |

$x = 160$

Recta vertical

$x + y = 200$

| $x$ | $y = 200 - x$ |
|---|---|
| 0 | 200 |
| 200 | 0 |

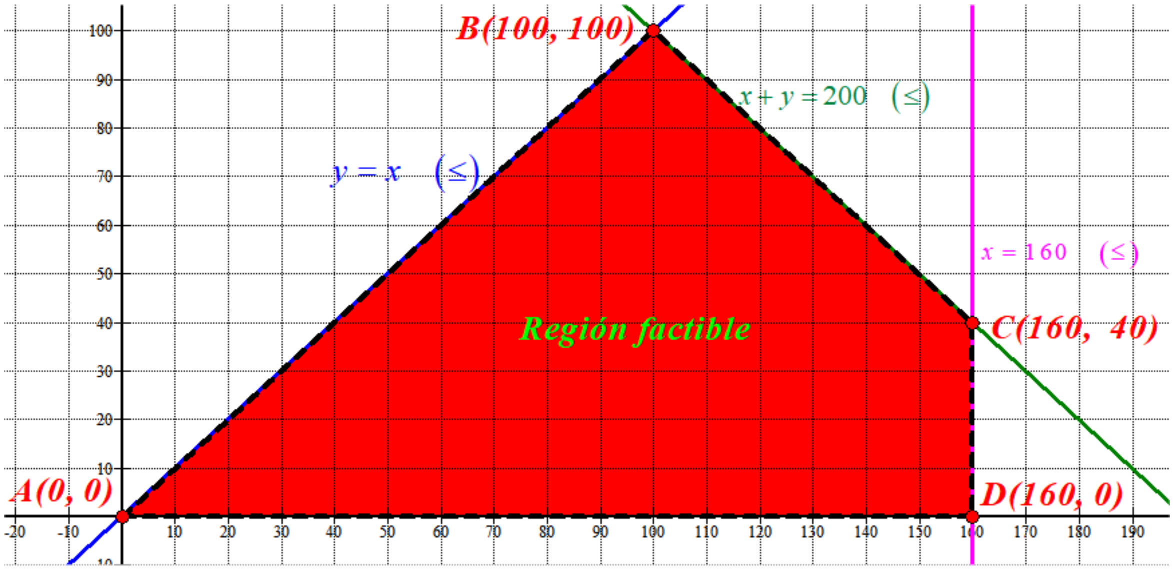
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

Comprobamos que el punto P(100, 50) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \leq 100 \\ 100 \leq 160 \\ 100 + 50 \leq 200 \\ 100 \geq 0;\ 50 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas las restricciones}$$

La región factible es la región que contiene al punto P y delimitada por los ejes y las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo en la figura. Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones para determinar dichas coordenadas.




c) El coste del alojamiento es la función $C(x, y) = 80x + 50y$ .
Buscamos en qué situación se da un coste máximo y el valor del mismo.
Valoramos el coste en cada vértice y localizamos dicha situación de coste máximo.

A(0, 0) → $C(0,0) = 0$
B(100,100) → $C(100,100) = 8000 + 5000 = 13000$
C(160, 40) → $C(160,40) = 14800$
D(160, 0) → $C(160,0) = 12800$

El coste máximo es de 14800 € contratando 160 habitaciones de tipo A y 40 de tipo B.

**EJERCICIO 3. Análisis.** Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función: $G(t)=\begin{cases}4-\left(\frac{t}{3}\right), & 0\le t\le 3\\ (5t-3)/(t+1), & t>3\end{cases}$ siendo $t$ el tiempo en años transcurridos.

**a**) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400.000 euros? Razona la respuesta.
**b**) ¿Cuándo crece *G(t)*? ¿Cuándo decrece *G(t)*? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?
**c**) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

a) Planteamos la igualdad $G(t)=4\rightarrow \begin{cases}4-\left(\frac{t}{3}\right)=4\Rightarrow 12-t=12\Rightarrow t=12-12=0, & 0\le t\le 3\\ (5t-3)/(t+1)=4\Rightarrow 5t-3=4t+4\Rightarrow t=7, & t>3\end{cases}$

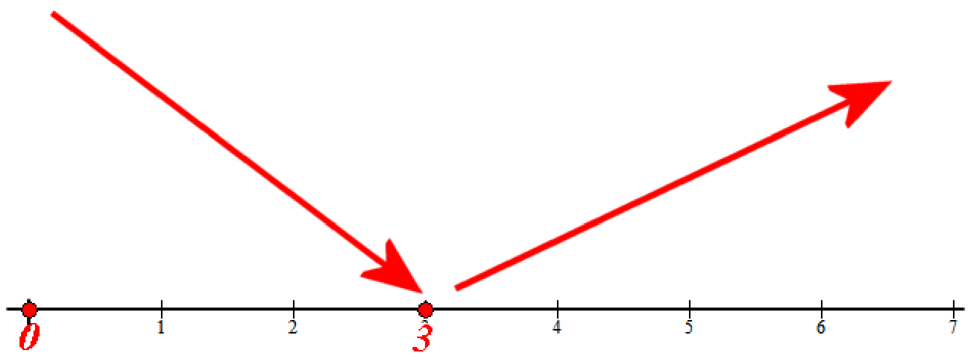
Ocurre en dos momentos. En $t = 0$, al comienzo y en $t = 7$, pasados 7 años.

b) Entre el comienzo (t = 0) y los 3 años ($t = 3$) la función es una recta ($4-\left(\frac{t}{3}\right)$) que es decreciente (G´(t) = -1/3 < 0). Los gastos financieros decrecen en $[0,3]$.

A partir de $t = 3$ la función es $G(t)=\frac{5t-3}{t+1}$. Estudiamos cómo evoluciona utilizando la derivada.

$$G´(t)=\frac{5(t+1)-(5t-3)}{(t+1)^2}=\frac{5t+5-5t+3}{(t+1)^2}=\frac{8}{(t+1)^2}$$

Esta derivada siempre es positiva, pues numerador y denominador siempre son positivos. Los gastos financieros del año tercero en adelante crecen.




El valor más bajo en este periodo será el límite de G(t) cuando se acerca a $t = 3$ →
$\lim_{t\to 3^+} G(t)=(15-3)/(3+1)=3$ que coincide con el valor de G(3) = 4 – 3/3 = 3.
Por lo tanto la función alcanza un gasto mínimo en $t = 3$ y es de 300.000 €
La función decrece en $[0,3)$ y crece en $(3,+\infty)$

c) Calculamos el límite de *G(t)* cuando $t \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} G(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5t-3}{t+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5t}{t}=5$$

Los gastos tienden a estabilizarse en 500. 000 €.

**EJERCICIO 4. Análisis.** Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de " x " paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$ , estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$)
**a)** Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos " x".
**b)** Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

a) Los ingresos que se obtienen por la venta de "x" paraguas es $I(x) = 60x$ .
El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos (costes de producción).

$$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - (x^2 - 10x) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70$$

b) Utilizamos la derivada de la función Beneficio.

$$B(x) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70 \Rightarrow B\acute{}(x) = -2x + 70$$
$$B\acute{}(x) = 0 \Rightarrow -2x + 70 = 0 \Rightarrow x = 35$$
$$B\acute{}\acute{}(x) = -2 < 0$$

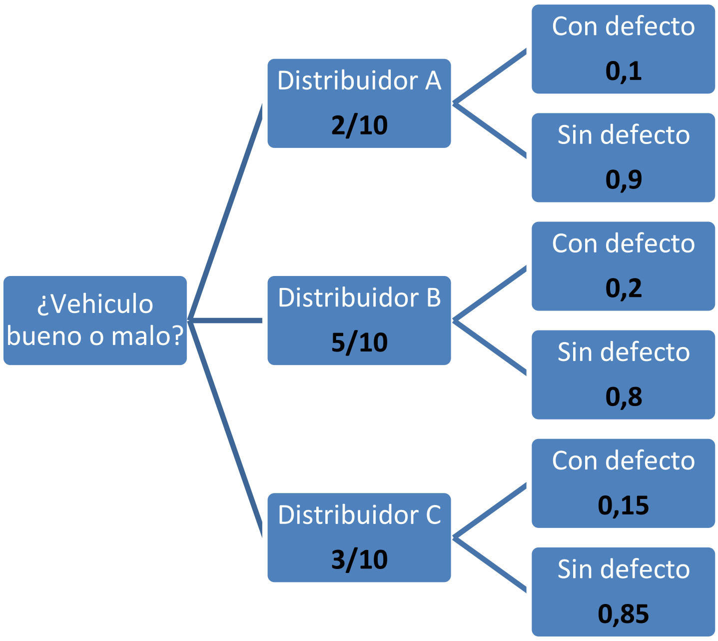
En $x = 35$ se produce un máximo relativo de la función beneficio.

El máximo beneficio se obtiene con una producción de 35 paraguas diarios.
Dicho beneficio máximo es de $B(35) = -35^2 + 70 \cdot 35 = 1225$ €
El coste es de $C(35) = 35^2 - 350 = 875$ € y los ingresos son de 60 · 35 = 2100 €.

Con la producción de 35 paraguas diarios se consigue unos ingresos de 2100 €, con unos costes de 875 € dejando unos beneficios de 1225 €.

**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.
Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.
**a)** Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
**b)** Si el vehículo revisado resulta ser **NO** defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer la probabilidad de todos los sucesos implicados en el problema.
Se encargan 240 + 600 + 360 = 1200 vehículos. El porcentaje de vehículos del distribuidor A es 240/1200 = 2/10, del B es de 600/1200 = 5/10 y del C es de 360/1200 = 3/10.




a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Rechazar pedido}) = P(\text{Vehiculo con defecto}) =$$
$$= P(\text{Distribuidor A})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor A}) +$$
$$+P(\text{Distribuidor B})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor B}) +$$
$$+P(\text{Distribuidor C})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor C}) =$$
$$= \frac{2}{10}\cdot 0{,}1 + \frac{5}{10}\cdot 0{,}2 + \frac{3}{10}\cdot 0{,}15 = \frac{0{,}2+1+0{,}45}{10} = \frac{1{,}65}{10} = \boxed{0{,}165}$$

Se rechazan el 16,5 % de los pedidos

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea del distribuidor A / Es no defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea del distribuidor A} \cap \text{Es no defectuoso})}{P(\text{Es no defectuoso})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{10}\cdot 0{,}9}{1-0{,}165} = \frac{0{,}18}{0{,}835} = \boxed{\frac{36}{167} = 0{,}216}$$

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Una editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.
**a)** ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7% y el 90,3%?
**b)** Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de $n$ =144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

a) La proporción de personas que comprarían la nueva obra es $pr = \frac{80}{100} = 0,8$

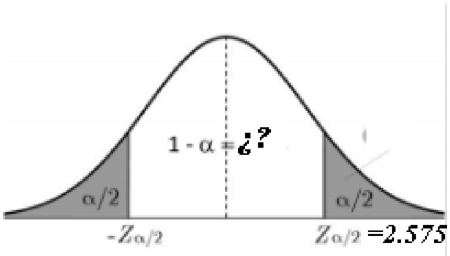
El intervalo de confianza es $(0,697,\ 0,903)$ por lo que su amplitud es 0,903 – 0,697 = 0,206. El error es la mitad de la amplitud → Error = 0,103

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot 0.04 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.103}{0.04} = 2.575$$

Obtengamos el nivel de confianza a partir del valor crítico $z_{\alpha/2} = 2.575$.

$z_{\alpha/2} = 2.575$ → 1 – ∝/2 = 0,995 → ∝/2 = 0,005 → ∝ = 0,01 → 1–∝ = 0,99




El nivel de confianza es del 99%.

b)

Tenemos que $n = 144$ y la proporción es $p = \frac{8}{10} = 0,8$ → $q = 1 - 0.8 = 0.2$

La distribución de la proporción de las muestras de tamaño 144 sigue una normal de parámetros X = $N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{144}}\right) = N\left(0.8, \frac{1}{30}\right)$

$$P(X \geq 0.75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{0.75 - 0.8}{1/30}\right) = P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) = \boxed{0.9332}$$