EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. SEPTIEMBRE 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t\left(B+C\right)=D$. (3 puntos)

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=x^3\ln\left(2x+5\right)+ax+b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0)=2$ y $f'(0)=1$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2\left(-x^3+3x-2\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx$. (0,75 puntos)

c) $\int 2e^{2x}dx$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A4. Sabiendo que $P(A\cup B)=0,95$, $P(A\cap B)=0,35$ y $P(\mathrm{A}/\mathrm{B})=0,5$. Hallar $P\left(A\right)$, $P\left(B\right)$ y $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$ (2 puntos)

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92% para el peso medio de la población. (1,25 puntos)

b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior? (0,25 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x)=5x^3e^{2x}+\dfrac{1}{x^2+1}$:

a) Calcular $f'(0)$. (1,5 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1). (0,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro ***a*** para que se cumpla $\int_0^1 \left(ax^3-9x^2+10\right)dx=2a$.

(1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres. (0,5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo? (0,75 puntos)

c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres. (0,75 puntos)

CUESTIÓN B5. En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2x\\ 0\\ z\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0\\ y\\ 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$.

Hallar x, y, z para que se cumpla $A^t\left(B+C\right)=D$. (3 puntos)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^t\left(B+C\right)=D\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}2x\\ 0\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ y\\ 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -1/2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$$

Haciendo los productos fila por columna
$$\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=2x-3y-z-1\\ \begin{pmatrix}-1/2 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=-x+y+2z+2\\ \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=y-z-1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2x-3y-z-1\\ -x+y+2z+2\\ y-z-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -5\end{pmatrix}$$

Queda el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}2x-3y-z-1=3\\ -x+y+2z+2=1\\ y-z-1=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y-z=4\\ -x+y+2z=-1\\ y-z=-4\end{cases}\Rightarrow y=z-4\Rightarrow\begin{cases}2x-3\left(z-4\right)-z=4\\ -x+z-4+2z=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-3z+12-z=4\\ -x+3z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-4z=-8\\ -x+3z=3\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Multiplico la fila 2}^{\text{a}}\text{ por 2}\\ \text{y las sumo}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2x-4z=-8\\ -2x+6z=6\\ \hline 2z=-2\end{cases}$$

$$\boxed{z=-1}\Rightarrow 2x+4=-8\Rightarrow 2x=-12\Rightarrow\boxed{x=-6}$$

$$\boxed{y=-1-4=-5}$$

La solución es $\boxed{x=-6;\ y=-5;\ z=-1}$

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b$ con a y b números reales. Hallar a y b para que se cumpla $f(0)=2$ y $f'(0)=1$. (1,5 puntos)

Vayamos imponiendo las condiciones:

$\boxed{\text{Primera condición } f(0)=2}$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b \\ x=0 \end{array}\right\} f(0)=0^3\ln(2\cdot 0+5)+a\cdot 0+b=b$$

Como $f(0)=2$, entonces $\boxed{\textbf{b=2}}$

$\boxed{\text{Segunda condición } f'(0)=1}$

$$f(x)=x^3\ln(2x+5)+ax+b \Rightarrow f'(x)=3x^2\ln(2x+5)+x^3\frac{2}{2x+5}+a+0$$

$$f'(0)=3\cdot 0^2\ln(2\cdot 0+5)+0^3\frac{2}{2\cdot 0+5}+a=a$$

Como $f'(0)=1$, entonces $\boxed{\textbf{a=1}}$

CUESTIÓN A3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_1^2\left(-x^3+3x-2\right)dx$. (0,75 puntos)

b) $\int \frac{3x^2}{x^3+1}dx$. (0,75 puntos)

c) $\int 2e^{2x}dx$. (0,5 puntos)

a)

$$\int_1^2\left(-x^3+3x-2\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\left(-\frac{2^4}{4}+3\frac{2^2}{2}-2\cdot 2\right)-\left(-\frac{1^4}{4}+3\frac{1^2}{2}-2\cdot 1\right)=$$

$$=(-4+6-4)-\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2\right)=-2+\frac{3}{4}=\boxed{\frac{-5}{4}}$$

b)

$$\int\frac{3x^2}{x^3+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^3+1=t\to 3x^2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{3x^2}\end{array}\right\}=\int\frac{\cancel{3x^2}}{t}\frac{dt}{\cancel{3x^2}}==\int\frac{1}{t}dt=\ln t=\boxed{\ln(x^3+1)+K}$$

c)

$$\int 2e^{2x}dx==\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ e^{2x}=t\to 2e^{2x}dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2e^{2x}}=\dfrac{dt}{2t}\end{array}\right\}=\int 2t\frac{dt}{2t}==\int dt=t=\boxed{e^{2x}+K}$$

CUESTIÓN A4. Sabiendo que $P(A\cup B)=0{,}95$, $P(A\cap B)=0{,}35$ y $P(\mathrm{A/B})=0{,}5$. Hallar $P(A)$, $P(B)$ y $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$. (2 puntos)

Utilizando la fórmula para el cálculo de la probabilidad condicionada:

$$P(\mathrm{A/B})=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$0{,}5=\frac{0{,}35}{P(B)}$$
$$P(B)=\frac{0{,}35}{0{,}5}=0{,}7$$
$$\boxed{P(B)=0{,}7}$$

Utilizando la fórmula de la probabilidad de la unión de 2 sucesos:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$0{,}95=P(A)+0{,}7-0{,}35$$
$$0{,}95-0{,}7+0{,}35=P(A)$$
$$\boxed{P(A)=0{,}6}$$

De nuevo, utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}$$
$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0{,}7=0{,}3$$
$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=1-0{,}95=0{,}05$$
$$P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0{,}05}{0{,}3}=0{,}166$$
$$\boxed{P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)=0'166}$$

CUESTIÓN A5. En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido para el peso una media de 60 kg. Se sabe que el peso en la población de la que procede la muestra sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 kg.

a) Obtener un intervalo de confianza al 92% para el peso medio de la población. (1,25 puntos)
b) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior? (0,25 puntos)

a)

Sea X la variable aleatoria que mide el peso de los individuos de una población. Sabemos que sigue una N(**μ**, 20).

Utilizamos la fórmula $\left(\overline{x}-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ para establecer el intervalo de confianza.

n=100, $\overline{x}$=60, σ=20 y como 1-∝=0'92 → ∝=0'08 → ∝/2=0'04 → 1-∝/2=0'96 → $z_{\alpha/2}$ **=1'75**

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(60 - 1'75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}, 60 + 1'75 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}}\right) =$$

$$\boxed{\text{Intervalo de confianza} = (56{,}5\,,\,63'5)}$$

b)

El error máximo que se puede cometer es de $\pm 3{,}5\ kg$

OPCIÓN B

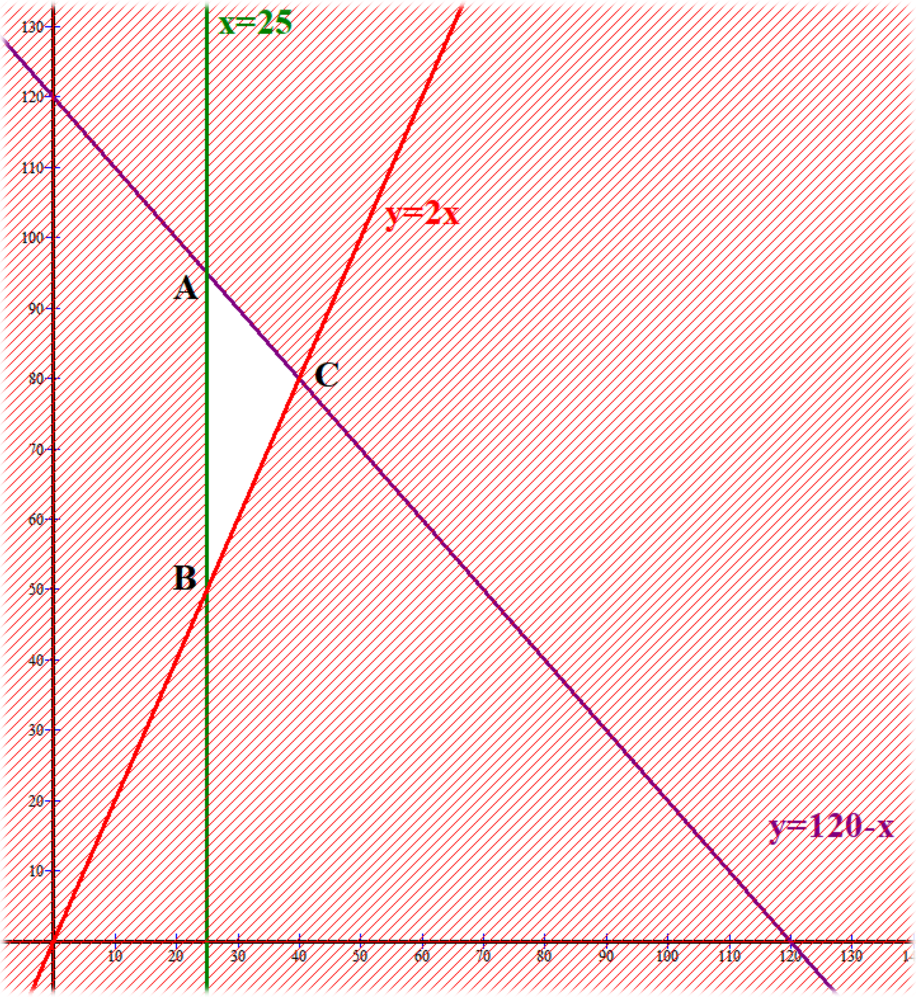
CUESTIÓN B1. Un agricultor puede utilizar, como máximo, 120 hectáreas de terreno para dos tipos de cultivo, A y B. Quiere dedicar, al menos, 25 hectáreas al cultivo A, y el terreno dedicado al cultivo B debe ser como mínimo el doble que el dedicado al cultivo A. Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €. Hallar las hectáreas que debe dedicar a cada uno de los cultivos para conseguir el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderá dicho beneficio? (3 puntos)

Llamemos x=número de hectáreas del cultivo A y=número de hectáreas del cultivo B.

Detallemos cuales son las restricciones del problema:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 120 \\ x \geq 25 \\ y \geq 2x \end{array}\right\}$$

Dibujemos la región factible (donde está la solución del problema)



Nuestra solución estará en uno de los vértices del triángulo blanco del dibujo. Averiguamos sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 120 - x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 120 - 25 = 95$$

$A(25, 95)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 25 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \cdot 25 = 50$$

$\mathrm{B}(25, 50)$

$$\left.\begin{array}{l} y=120-x \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 120-x=2x \Rightarrow 120=3x \Rightarrow x=120/3=40$$

$$\mathrm{C}(40,80)$$

Determinemos la función beneficio (*Cada hectárea de cultivo A le produce 300 € de beneficio, mientras que cada hectárea de cultivo B le produce 215 €*):

$$Beneficio(x)=300x+215y$$

Sustituyendo cada punto podremos decidir el punto solución:

$$A(25,95) \rightarrow Beneficio(25,95)=300\cdot 25+215\cdot 95=27925 \text{ €}$$
$$B(25,50) \rightarrow Beneficio(25,50)=300\cdot 25+215\cdot 50=18250 \text{ €}$$
$$C(40,80) \rightarrow Beneficio(40,80)=300\cdot 40+215\cdot 80=29200 \text{ €}$$

El máximo beneficio se obtiene para x = 40 e y = 80.

Para 40 hectareas del cultivo A y 80 hectareas del cultivo B se obtiene el máximo beneficio, siendo de 29200 €

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x)=5x^3e^{2x}+\dfrac{1}{x^2+1}$:

a) Calcular $f'(0)$. (1,5 puntos)

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 1). (0,5 puntos)

a)

$$f(x)=5x^3e^{2x}+\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=15x^2e^{2x}+5x^3\cdot 2e^{2x}+\frac{0\cdot\left(x^2+1\right)-1\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$f'(x)=15x^2e^{2x}+10x^3e^{2x}-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(0)=15\cdot 0^2e^{2\cdot 0}+10\cdot 0^3e^{2\cdot 0}-\frac{2\cdot 0}{\left(0^2+1\right)^2}=0+0-\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

b) A partir de la ecuación general de la recta tangente a la función $y=f(x)$ en un punto $x=a$:

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

La aplicamos para $a=0$:

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y-1=0\cdot x \Rightarrow \boxed{y=1}$$

CUESTIÓN B3. Hallar el valor del parámetro ***a*** para que se cumpla $\int_0^1\left(ax^3-9x^2+10\right)dx=2a$.

(1,5 puntos)

Resolvamos la integral definida:

$$\int_0^1 \left(ax^3 - 9x^2 + 10\right)dx = 2a$$

$$\left[\frac{ax^4}{4} - 9\frac{x^3}{3} + 10x\right]_0^1 = 2a$$

$$\left(\frac{a \cdot 1^4}{4} - 9\frac{1^3}{3} + 10 \cdot 1\right) - \left(\frac{a \cdot 0^4}{4} - 9\frac{0^3}{3} + 10 \cdot 0\right) = 2a$$

$$\frac{a}{4} - 3 + 10 = 2a$$

$$\frac{a}{4} + 7 = 2a$$

$$a + 28 = 8a$$

$$28 = 7a$$

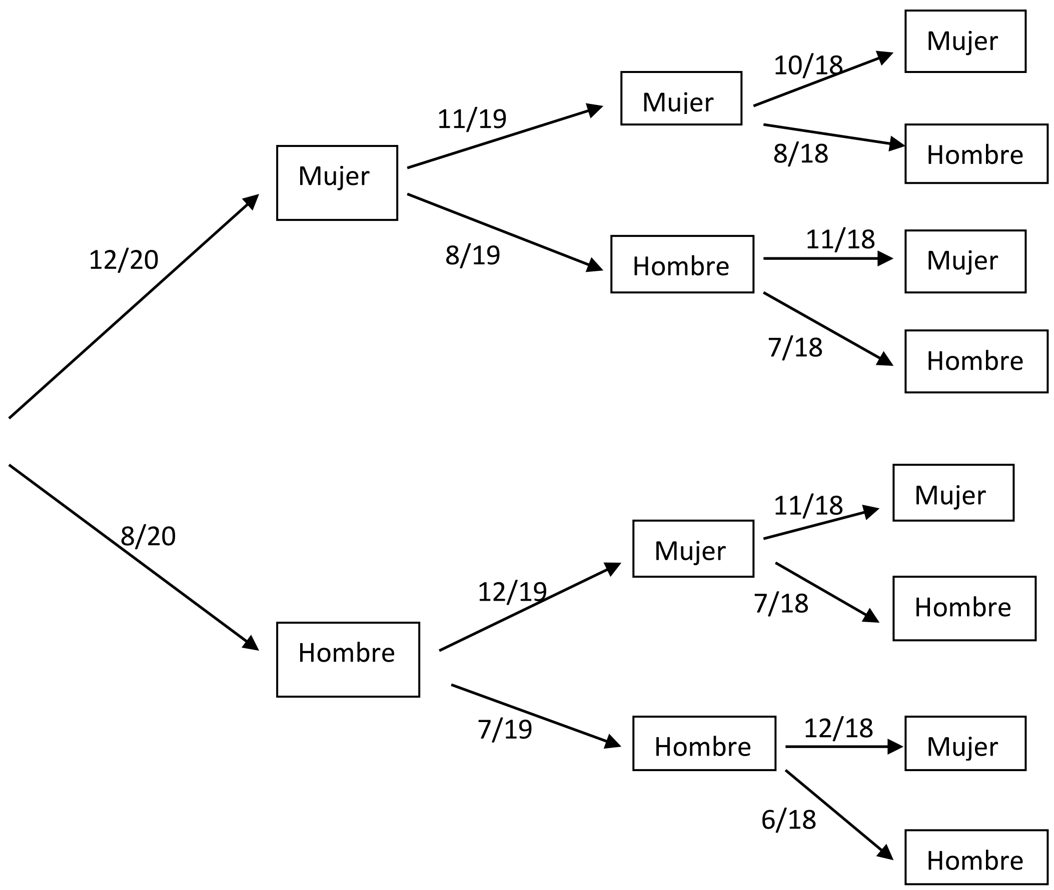
$$a = \frac{28}{7} = 4$$

$$\boxed{a = 4}$$

CUESTIÓN B4. En un grupo hay 12 mujeres y 8 hombres. Se eligen al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, tres personas.

a) Hallar la probabilidad de que las tres personas sean mujeres. (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas no sean del mismo sexo? (0,75 puntos)
c) Hallar la probabilidad de que salgan, al menos, dos hombres. (0,75 puntos)

Construyamos el árbol correspondiente a este experimento aleatorio:



a) Probabilidad de elegir 3 mujeres solo se produce en la rama superior siendo su probabilidad

$$\text{Probabilidad de elegir 3 mujeres} = \frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18} = \frac{11}{57} = \boxed{0{,}19}$$

b) Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo aparece en muchos casos, por ello, lo haremos con el suceso contrario.
Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo es lo mismo que 1 – Probabilidad de que sean del mismo sexo.

$$\text{Probabilidad de que 3 personas no sean del mismo sexo} =$$
$$= 1 - (\text{Probabilidad de que sean tres mujeres o tres hombres}) =$$
$$= 1 - \left(\frac{12}{20}\cdot\frac{11}{19}\cdot\frac{10}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18}\right) = 1 - \left(\frac{11}{57} + \frac{14}{255}\right) = \boxed{0{,}75}$$

c) Mirando el árbol y contando desde arriba hasta abajo, se eligen, al menos, dos hombres en el caso 4º, 6º, 7º y 8º. Por lo que la probabilidad del suceso pedido se obtiene sumando las probabilidades de que ocurra cada una de estos sucesos:

$$\text{Probabilidad de elegir, al menos, 2 hombres} =$$
$$= P(\text{Mujer Hombre Hombre}) + P(\text{Hombre Mujer Hombre}) +$$
$$+ P(\text{Hombre Hombre Mujer}) + P(\text{Hombre Hombre Hombre}) =$$
$$= \frac{12}{20}\cdot\frac{8}{19}\cdot\frac{7}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{12}{18} + \frac{8}{20}\cdot\frac{7}{19}\cdot\frac{6}{18} =$$
$$= \frac{2352}{6840} = \boxed{0{,}34}$$

CUESTIÓN B5. En una muestra aleatoria de tamaño 150 de individuos de una población se ha obtenido que 32 utilizan el tranvía. Hallar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de individuos de la población que utilizan el tranvía. (1,5 puntos).

Los datos son $p = \frac{32}{150} = 0{,}21; \quad n = 150$, Para un nivel de confianza del 99% obtenemos $z_{\alpha/2} = 2{,}58$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que utilizan el tranvía es:

$$\left(p - z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}},\ p + z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) =$$

$$= \left(0{,}21 - 2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}21\cdot(0{,}79)}{150}},\ 0{,}21 + 2{,}58\cdot\sqrt{\frac{0{,}21\cdot(0{,}79)}{150}}\right) =$$

$$= \boxed{(0{,}124\ ,\ 0{,}2958)}$$