COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritméticas de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7% y la del producto B del 6,3%.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? *(2 puntos)*

Problema 2. Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 3. En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago? *(4 puntos)*

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$. *(3 puntos)*

b) Calcular $AB^t - A^tB$. *(3 puntos)*

c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$. *(4 puntos)*

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. *(3 puntos)*

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? *(2+1 puntos)*

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? *(2+1 puntos)*

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. *(1 punto)*

Problema 3. Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros. *(3 puntos)*

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer? *(3 puntos)*

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros? *(4 puntos)*

SOLUCIONES
OPCIÓN A

Problema 1. Un inversor dispone de 9000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7% y la del producto B del 6,3%.

a) ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es esa rentabilidad máxima? *(2 puntos)*

Llamamos x = cantidad invertida en el producto A; y = cantidad invertida en el producto B

Los datos del problema proporcionan las siguientes restricciones:

"*Un inversor dispone de 9000 euros*" → $x+y\le 9000$
"*La inversión en A debe superar los 5000 euros*" → $x\ge 5000$
"*La inversión en A debe ser el doble, al menos, que en B*" → $x\ge 2y$
"*Como las variables x e y representan dinero deben ser mayores o iguales a cero*" →
$x\ge 0;\ y\ge 0$.

Juntamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 9000 \\ x\ge 5000 \\ x\ge 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

A tiene una rentabilidad del 2´7 % y B el 6´3%.

La rentabilidad total será: $B(x,y)=\dfrac{2.7}{100}x+\dfrac{6.3}{100}y$. Esta función es la que deseamos maximizar.

Dibujamos la región factible. Empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

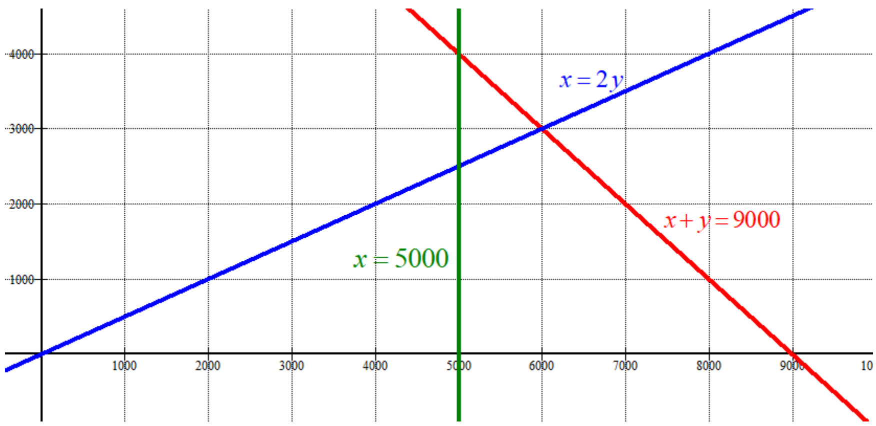
$x+y=9000$

x	$y=9000-x$
0	9000
3000	6000
5000	4000

$x=5000$ Recta vertical

$x=2y$

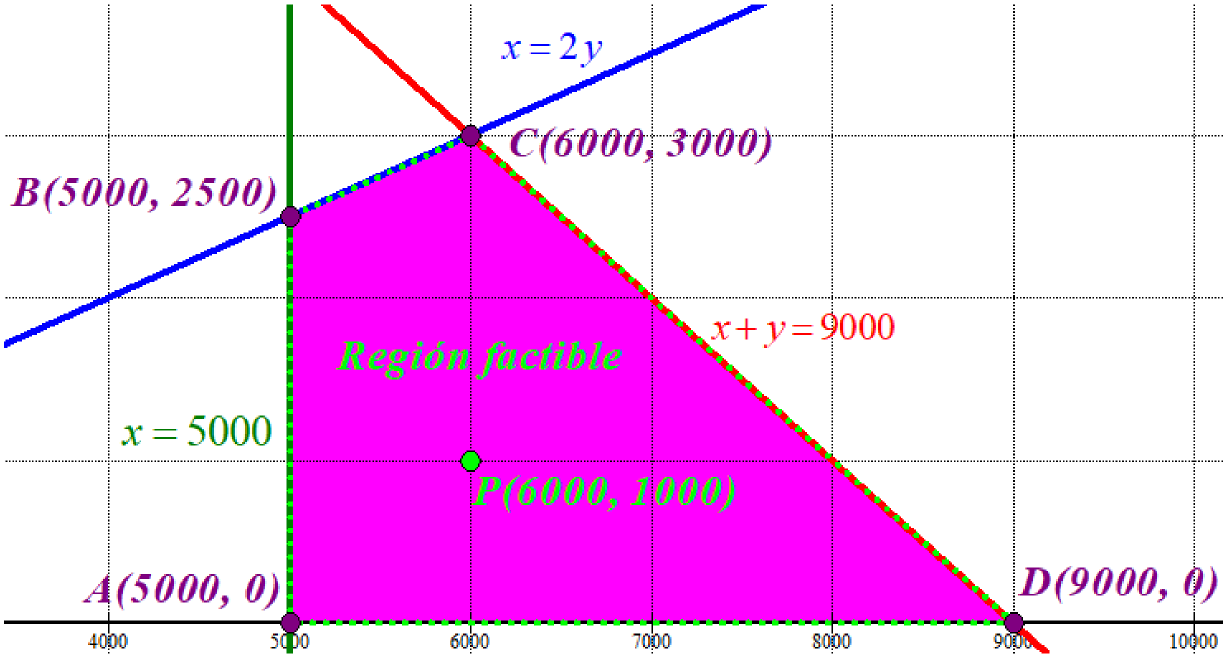
x	$y=x/2$
0	0
3000	6000
5000	2500



$x\ge 0;\ y\ge 0$ Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 9000 \\ x\geq 5000 \\ x\geq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región está por debajo de la recta roja, a la derecha de la verde y por debajo de la azul, todo dentro del primer cuadrante.

La región factible la coloreo de rosa y marco los vértices y sus coordenadas.



Comprobamos que un punto cualquiera de la región cumple todas las restricciones, por ejemplo P(6000, 1000).

$$\left.\begin{array}{l} 6000+1000\leq 9000 \\ 6000\geq 5000 \\ 6000\geq 2000 \\ 6000\geq 0;1000\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Valoramos la función objetivo "$B(x,y)=\frac{2.7}{100}x+\frac{6.3}{100}y$" en cada vértice y localizamos el valor máximo de la misma.

A(5000, 0) → $B(5000,0)=\frac{2.7}{100}5000+\frac{6.3}{100}\cdot 0=135$

B(5000, 2500) → $B(5000,2500)=\frac{2.7}{100}5000+\frac{6.3}{100}2500=292.5$

C(6000, 3000) → $B(6000,3000)=\frac{2.7}{100}6000+\frac{6.3}{100}3000=351$

D(9000, 0) → $B(9000,0)=\frac{2.7}{100}9000+\frac{6.3}{100}0=243$

El máximo se alcanza en el punto C(6000, 3000). Lo que significa invertir 6000 € en producto A y 3000 € en producto B.

b) La rentabilidad máxima se ha obtenido en el apartado anterior y es de 351 €

Problema 2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores. *(2 puntos)*

a) El dominio es $\mathbb{R}-\{2\}$, pues *x = 2* anula el denominador.

Si *x = 0* entonces $f(0)=\dfrac{0^2}{2-0}=0$ → (0, 0) es un punto de corte con el eje Y.

Si *y = 0* entonces $f(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2-x}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$, sale el mismo punto de corte con el eje X.

El único punto de corte con los ejes coordenados es el (0, 0).

b) **Asíntota vertical**. $x=2$

Del dominio de la función se deduce que una posible asíntota vertical es $x=2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{2-x}=\frac{2^2}{2-2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La asíntota vertical es $x=2$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

c) Buscamos los puntos críticos de la función, donde se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2}{2-x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x(2-x)-(-1)x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2}=\frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

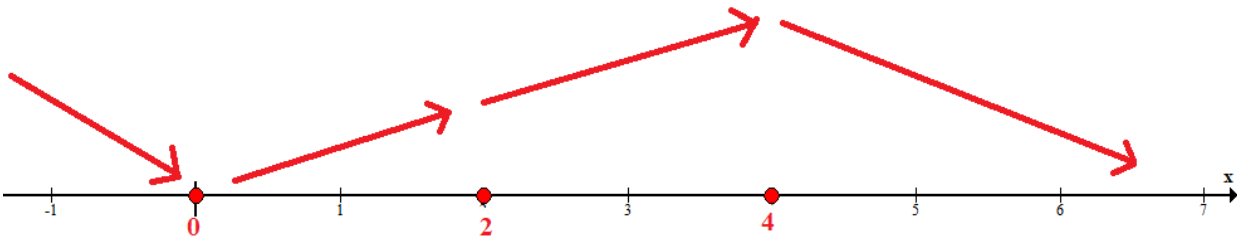
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-x^2}{(2-x)^2}=0 \Rightarrow 4x-x^2=0 \Rightarrow x(4-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4-x=0 \to x=4 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos puntos críticos obtenidos, añadimos también *x = 2* excluido del dominio.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{-4-(-1)^2}{(2+1)^2}=\dfrac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=\frac{4-1^2}{(2-1)^2}=\frac{3}{1}=3>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,4)$ tomamos *x =3* y la derivada vale $f\,'(3)=\frac{12-2^2}{(2-3)^2}=\frac{8}{1}=8>0$. La función crece en $(2,4)$.
- En $(4,+\infty)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $f\,'(5)=\frac{20-5^2}{(2-5)^2}=\frac{-5}{9}<0$. La función decrece en $(4,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



La función crece en $(0,2)\cup(2,4)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$

d) Según el esquema obtenido en el apartado anterior la función presenta un mínimo local en *x = 0* y un máximo local en *x = 4*.

$x=0 \rightarrow f(0)=\frac{0^2}{2-0}=0$. El mínimo local es el punto de coordenadas (0, 0).

$x=4 \rightarrow f(4)=\frac{4^2}{2-4}=-8$. El máximo local es el punto de coordenadas (4, –8).

e) Para la representación gráfica añadimos a lo obtenido una tabla de valores y la asíntota oblicua que no hemos calculado pues no la piden, pero nos ayudará a representar mejor la función.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}-(-x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{2-x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-x}=-2$$

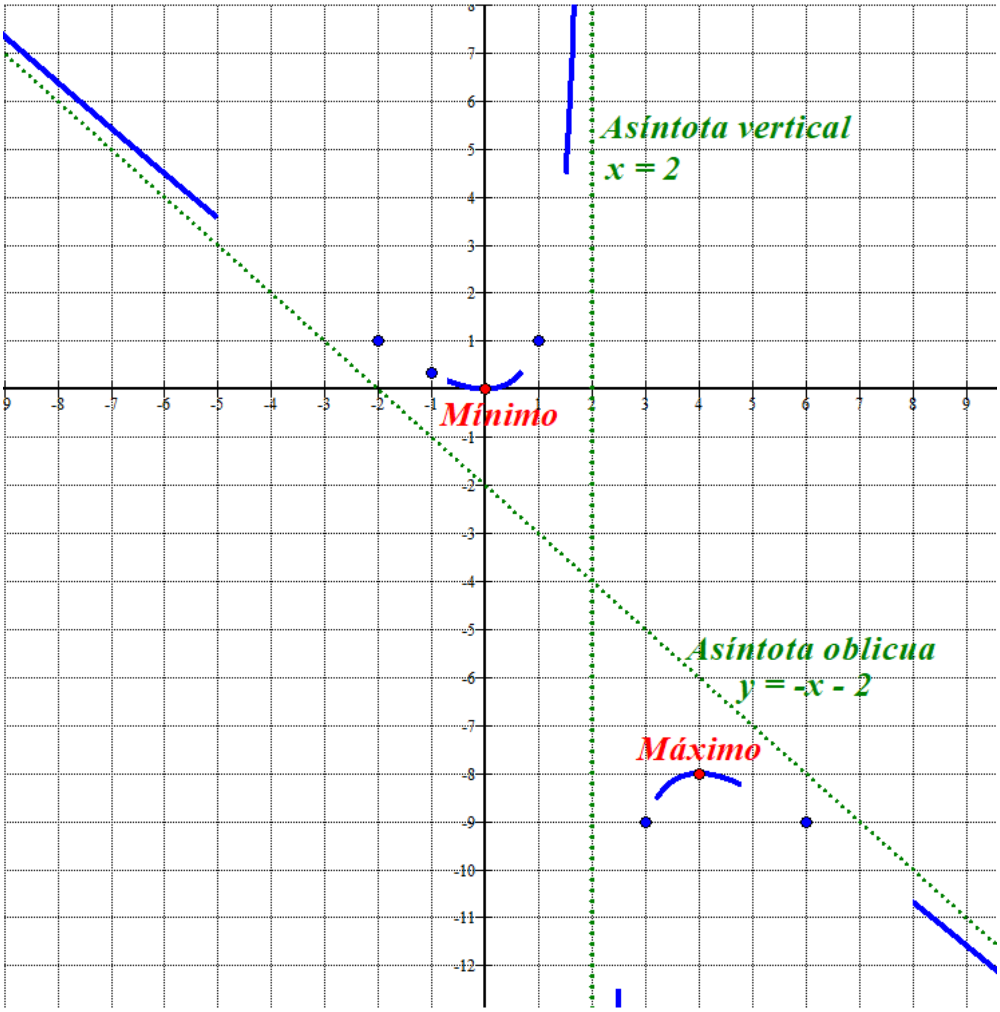
La asíntota oblicua es $y=-x-2$

Asíntota oblicua

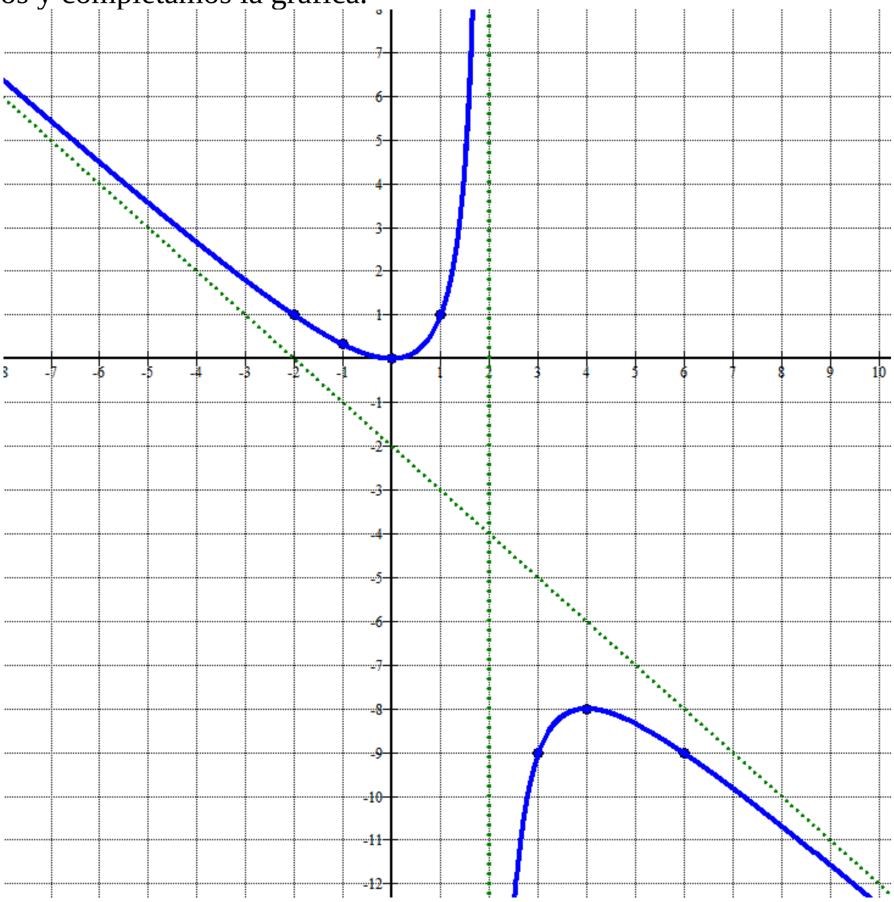
x	$y=-x-2$
0	-2
2	-4
4	-6

La función

x	$y=\dfrac{x^2}{2-x}$
-2	1
-1	$1/3=0.33$
0	0 Mínimo
1	1
2	No existe
3	-9
4	-8 Máximo
6	-9



Unimos los tramos y completamos la gráfica.



Problema 3. En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30% si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar

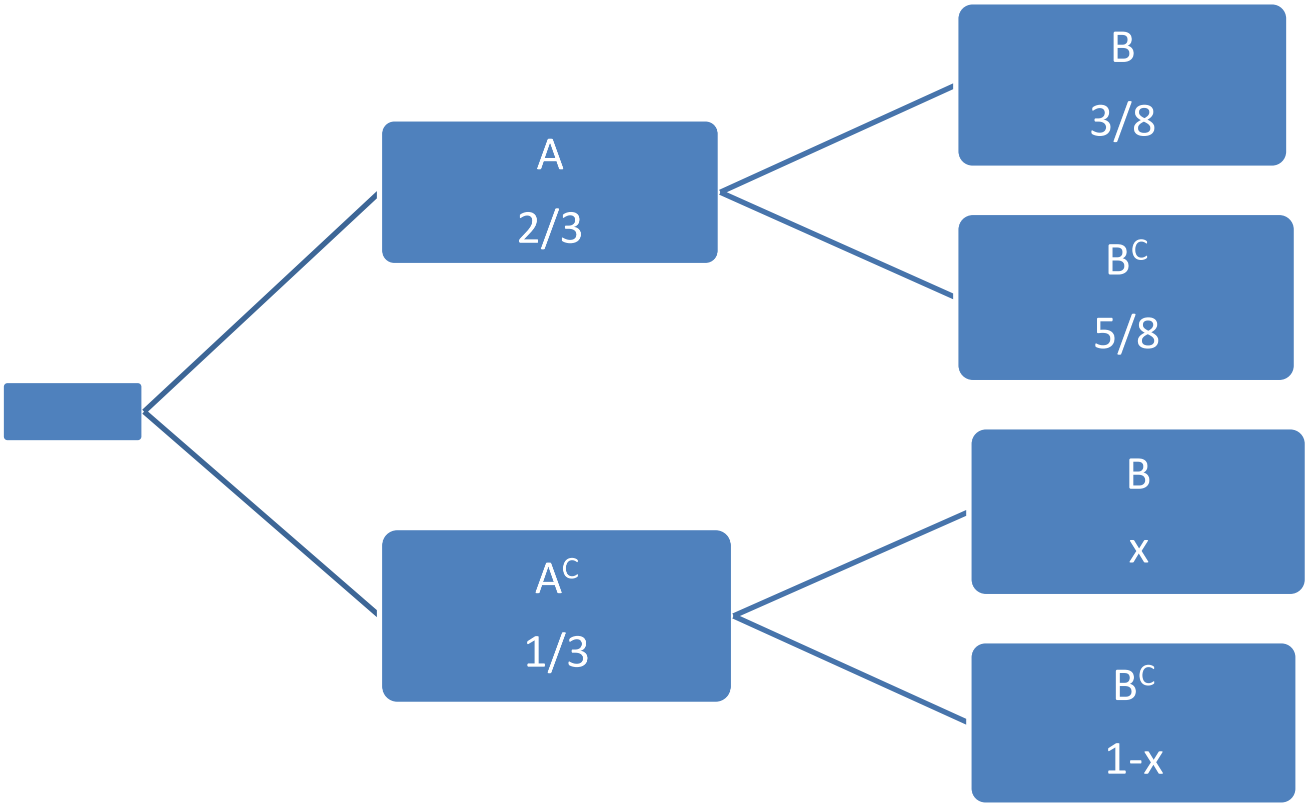
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago? *(3 puntos)*

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago? *(4 puntos)*

Llamemos A = "Tener Smart TV" y por tanto A^C = "No tener Smart TV". B = "Contratar algún servicio de pago" y por tanto B^C = "No contratar ningún servicio de pago"

Realizamos un diagrama de árbol.

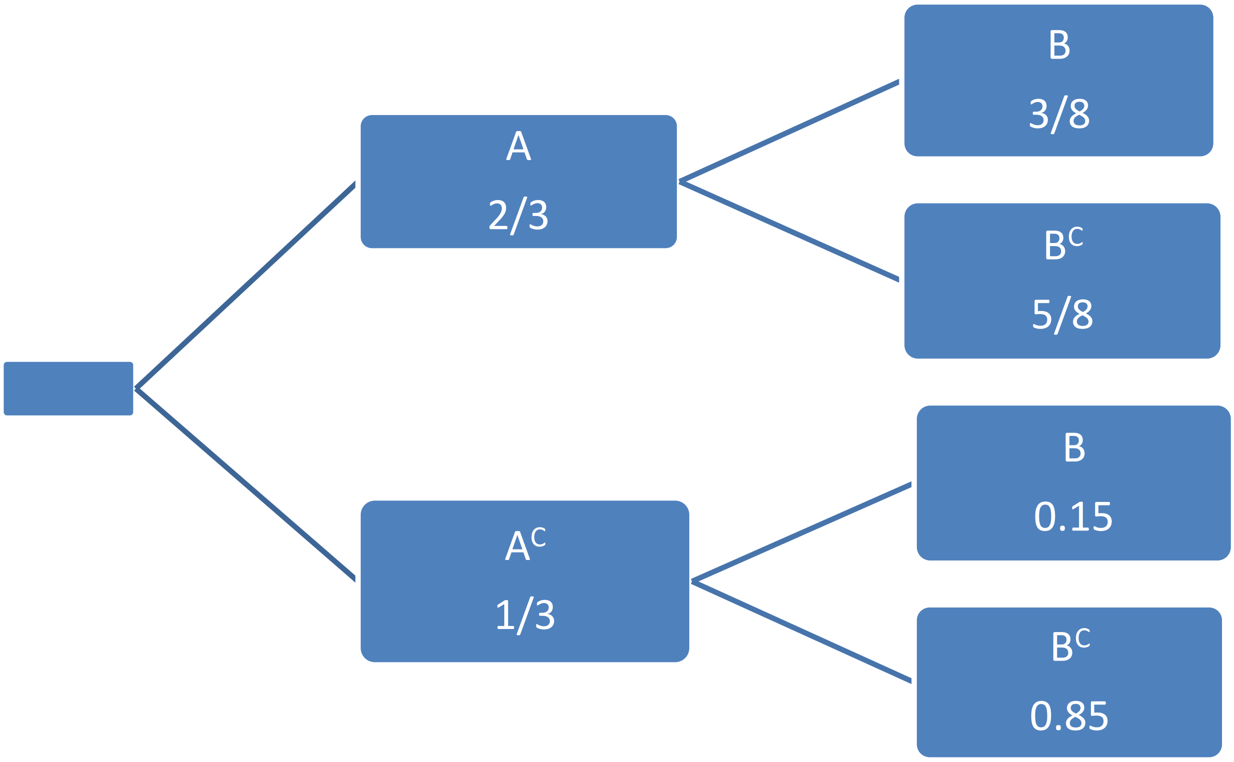


Necesitamos determinar el valor de la probabilidad "x", para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=P(A)P(B/A)+P(A^C)P(B/A^C)$$

$$0.30=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}x\Rightarrow 0.30=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}x\Rightarrow 3.6=3+4x\Rightarrow 4x=0.6\Rightarrow x=\frac{0.6}{4}=0.15$$

El diagrama de árbol quedaría:



a) $P\left(A^C \cap B\right) = P\left(A^C\right)P\left(B / A^C\right) = \frac{1}{3}0.15 = \boxed{0.05}$

b) $P\left(A / B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{P\left(A\right)P\left(B / A\right)}{0.3} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}}{0.3} = \frac{0.25}{0.3} = \boxed{\frac{5}{6} = 0.833}$

c) $P\left(A^C / B^C\right) = \frac{P\left(A^C \cap B^C\right)}{P\left(B^C\right)} = \frac{P\left(A^C\right)P\left(B^C / A^C\right)}{1-0.3} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.85}{0.7} = \boxed{\frac{17}{42} = 0.4048}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$. *(3 puntos)*

b) Calcular $AB^t - A^tB$. *(3 puntos)*

c) Resolver la ecuación $B^tX + A^tB = A^t$. *(4 puntos)*

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

a)

$$AB=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6+2\\ -1 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-4+8=4\neq 0 \text{ Tiene inversa}$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 8 & 4\end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj\left((AB)^T\right)}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 8 & 4\end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & -8\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1/4 & -1/4\end{pmatrix}$$

b) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$$AB^t-A^tB=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -9\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

c) Despejamos la matriz X en la ecuación.

$$B^tX + A^tB = A^t \Rightarrow B^tX = A^t - A^tB$$

$$\text{Si existe } (B^t)^{-1} \text{ entonces } X=(B^t)^{-1}(A^t-A^tB) \ \ldots$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |B^t|=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0 \text{ Existe su inversa.}$$

$$(B^t)^{-1}=\frac{Adj\left((B^t)^t\right)}{|B^t|}=\frac{Adj(B)}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} A=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \\ A^tB=\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\-1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6+2\\-1 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\-1 & 4\end{pmatrix}\end{array}}$$

...

$$X=\left(B^t\right)^{-1}\left(A^t-A^tB\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 8\\-1 & 4\end{pmatrix}\right)$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\-2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -7\\2 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8+2 & -14-3\\-8 & 14\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & -17\\-8 & 14\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5 & -17/2\\-4 & 7\end{pmatrix}}$$

Problema 2. En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas. *(3 puntos)*

b) ¿En qué valor de *t* se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este? *(2+1 puntos)*

c) ¿En qué valor de *t* se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta? *(2+1 puntos)*

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta. *(1 punto)*

a) Los beneficios o pérdidas son los valores positivos o negativos de la función $f(t)=t^3-8t^2+15t$, por ello primero buscamos los puntos donde la función se anula.

$$f(t)=0 \Rightarrow t^3-8t^2+15t=0 \Rightarrow t\left(t^2-8t+15\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{t=0} \\ t^2-8t+15=0 \Rightarrow t=\dfrac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 15}}{2}= \end{cases}$$

$$t=\frac{8\pm 2}{2}=\begin{cases} =\dfrac{8+2}{2}=\boxed{5=t} \\ =\dfrac{8-2}{2}=\boxed{3=t} \end{cases}$$

Los beneficios son 0 en los años 0, 3 y 5. Veamos que ocurre entre ellos y después de los 5 años.

- De 0 a 3 años considero *t = 2* y el beneficio es $f(2)=2^3-8\cdot 2^2+30=6>0$. En todo el intervalo (0, 3) los beneficios son positivos.
- De 3 a 5 años considero *t = 4* y el beneficio es $f(4)=4^3-8\cdot 4^2+60=-4<0$. En todo el intervalo (3, 5) los beneficios son negativos.
- De 5 años en adelante considero *t = 6* y el beneficio es $f(6)=6^3-8\cdot 6^2+90=18>0$. A partir de los 5 años los beneficios son positivos.

La empresa tiene beneficios durante los 3 primeros años y a partir del quinto año. Y perdidas entre el año 3 y el 5.

b) Para determinar el momento y la cuantía del beneficio máximo utilizo la derivada.

$$f(t)=t^3-8t^2+15t \Rightarrow f\,'(t)=3t^2-16t+15$$

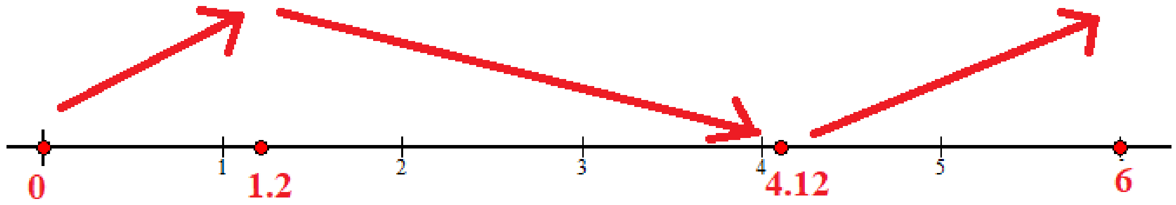
$$f\,'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-16t+15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4\cdot 3\cdot 15}}{6}=\frac{16\pm\sqrt{76}}{6}=\begin{cases} \dfrac{16+\sqrt{76}}{6}=4.1196=t \\ \dfrac{16-\sqrt{76}}{6}=1.2137=t \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada.

- En $(0,1.2)$ tomo *t = 1* y la derivada vale $f'(1)=3\cdot 1^2-16+15=2>0$. La función crece en $(0,1.2)$
- En $(1.2,4.12)$ tomo *t = 2* y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-32+15=-5<0$. La función decrece en $(1.2,4.12)$
- En $(4.12,6)$ tomo *t = 5* y la derivada vale $f'(5)=3\cdot 5^2-80+15=10>0$. La función crece en $(4.12,6)$

La función sigue el esquema siguiente:



El máximo relativo del beneficio se alcanza en *t =1.2*, pero la función crece a partir de t = 4.12, por lo que en *t = 6* situado en el extremo del intervalo la función puede alcanzar un valor más alto que el máximo local.
Averiguamos el beneficio en esos dos momentos y decidimos el máximo absoluto de la función.

$$f(1.2)=1.2^3-8\cdot 1.2^2+15\cdot 1.2=8.2088$$

$$f(6)=6^3-8\cdot 6^2+15\cdot 6=18$$

El máximo beneficio se obtiene en el año 6 y es de 180000 €.

c) La máxima perdida será el mínimo absoluto de la función. Por el esquema anterior, la función tiene un mínimo relativo en *t = 4.12*, pero en *t = 0* también hay un valor bajo del beneficio. Averiguamos el beneficio en esos dos momentos y decidimos el momento de máxima perdida (beneficio negativo).

$$f(4.12)=4.12^3-8\cdot 4.12+15\cdot 4.12=-4.0607$$

$$f(0)=0^3-8\cdot 0^2+15\cdot 0=0$$

Las máximas perdidas se producen al cabo de 4.12 años y es de 40607 €.

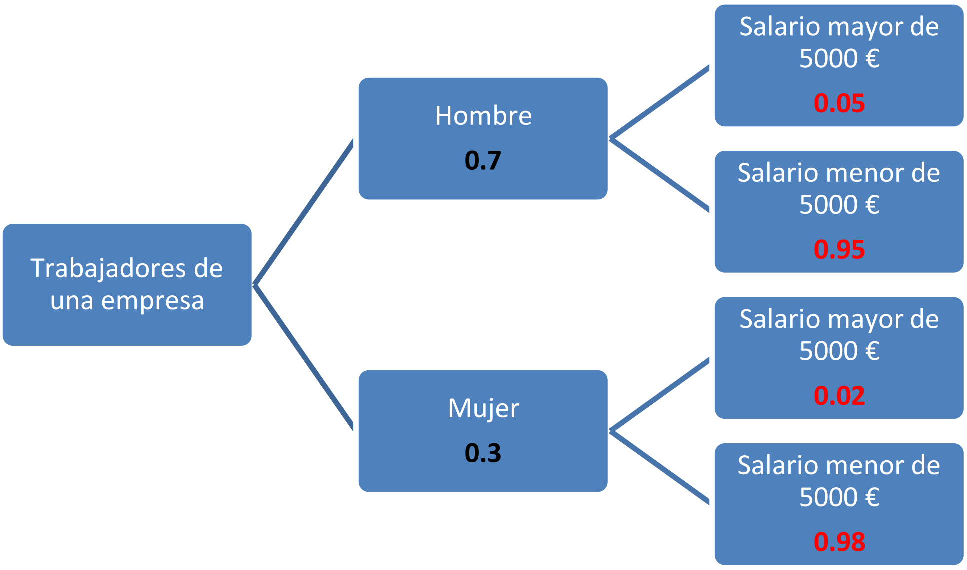
d) Al principio hemos estudiado la fluctuación del beneficio entre positivo y negativo y no se ha apreciado ningún cambio de signo a partir del año 5. A partir del año 6 el beneficio seguirán siendo positivos y creciente.

Problema 3. Sabemos que el 5% de los hombres y el 2% de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5000 euros. Se sabe también que el 30% de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.
a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5000 euros. *(3 puntos)*

b) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer? *(3 puntos)*

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5000 euros? *(4 puntos)*

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamemos H = "Ser hombre", $\overline{H}$ = "Ser mujer"
M = "Salario mayor de 5000 €", $\overline{M}$ = "Salario menor de 5000 €"

a) Nos piden calcular *P(M)*.

$$P(M) = P(H \cap M) + P(\overline{H} \cap M) =$$
$$= P(H)P(M/H) + P(\overline{H})P(M/\overline{H}) =$$
$$= 0.7 \cdot 0.05 + 0.3 \cdot 0.02 = \boxed{0.041}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{H}/M)$.

$$P(\overline{H}/M) = \frac{P(\overline{H} \cap M)}{P(M)} = \frac{P(\overline{H})P(M/\overline{H})}{P(M)} = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.041} = \boxed{\frac{6}{41} = 0.1463}$$

c) Necesitamos calcular $P(H \cap M)$

$P(H \cap M) = P(H)P(M/H) = 0.7 \cdot 0.05 = 0.035$

La probabilidad de que un trabajador sea hombre y gane más de 5000 € es de 0.035.
Por tanto, el 3.5% de los trabajadores de la empresa son hombres y ganan más de 5000 € mensuales.