PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS

CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.

c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2.5 puntos.

d) Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan. En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.

e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad para \quad x\neq -1.$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.5 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x$.

a) Determina ***a*** sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$. **(1.25 puntos)**

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

EJERCICIO 3 (2.5 puntos)

Sea la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (1,1). (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

BLOQUE B

<u>EJERCICIO 5</u> (2,5 puntos)
Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 6</u> (2,5 puntos)
Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de *m*.

<u>EJERCICIO 7</u> (2,5 puntos)
Considera la recta $r\equiv\frac{x-2}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1\equiv x=0$ y $\pi_2\equiv y=0$.
a) Halla los puntos de la recta ***r*** que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**
b) Determina la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

<u>EJERCICIO 8</u> (2,5 puntos)
Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).
a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A. **(1.25 puntos)**

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2.5 puntos)

Considera la función *f* definida por

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2} \quad para \quad x\neq -1.$$

a) Estudia y halla las asíntotas de la gráfica de *f*. **(1.5 puntos)**

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*. **(1 punto)**

a)

Asíntotas verticales: x = a.

Siendo **a** el valor excluido del dominio. La asíntota es $x=-1$

Comprobemos el límite:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{1-3+4}{0}=\frac{2}{0}=\infty$$

Asíntotas horizontales: y = b. Siendo $b=\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Calculemos $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: y = mx + n.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3x+4}{2x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+4\right)\cdot 2-x\left(2x+2\right)}{\left(2x+2\right)2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}+6x+8-\cancel{2x^2}-2x}{4x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{4x}=\lim_{x\to\infty}1=1$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=\frac{1}{2}x+1$

b) Necesitamos la derivada de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{\left(2x+3\right)\left(2x+2\right)-\left(x^2+3x+4\right)\left(2\right)}{\left(2x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+6x+6-\left(2x^2+6x+8\right)}{\left(2x+2\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}$$

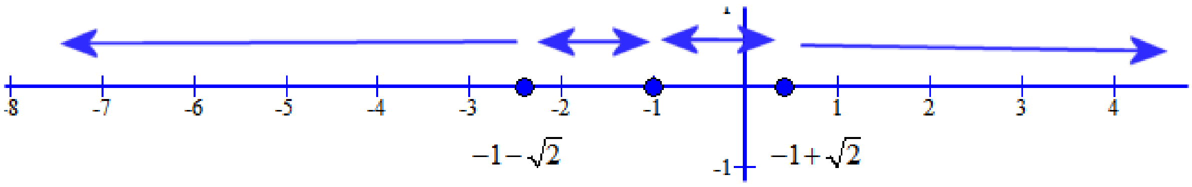
Igualamos a cero y…

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2}=0\Rightarrow 2x^2+4x-2=0\Rightarrow$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+16}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{32}}{4}=\frac{-4\pm 4\sqrt{2}}{4}=-1\pm\sqrt{2}$$

Tendremos 3 puntos a considerar para el cambio de signo de la derivada: -1; $-1-\sqrt{2}$ y $-1+\sqrt{2}$.

Por lo tanto la recta real se divide en 4 zonas:



Estudiemos el signo en cada zona:

En la semirrecta $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)$ tomamos el valor x = −4 →

$$f'(-4)=\frac{2(-4)^2+4(-4)-2}{\left(2(-4)+2\right)^2}=\frac{32-16-2}{+}>0$$. La función crece.

En el intervalo $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$ tomamos el valor x = −2 →

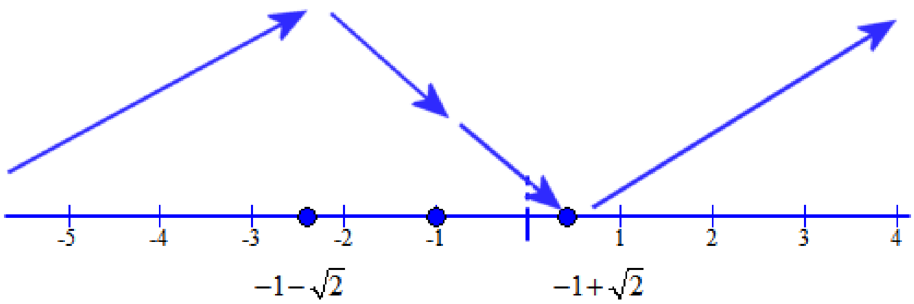
$$f'(-2)=\frac{2(-2)^2+4(-2)-2}{\left(2(-2)+2\right)^2}=\frac{8-8-2}{+}<0$$. La función decrece.

En el intervalo $\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$ tomamos el valor x = 0 → $f'(0)=\frac{2(0)^2+4(0)-2}{\left(2(0)+2\right)^2}=\frac{-2}{+}<0$. La función decrece.

En la semirrecta $\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos el valor x = 4 →

$$f'(4)=\frac{2(4)^2+4(4)-2}{\left(2(4)+2\right)^2}=\frac{32+16-2}{+}>0$$. La función crece

El esquema es:



La función crece en $\left(-\infty,-1-\sqrt{2}\right)\cup\left(-1+\sqrt{2},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x$.

a) Determina ***a*** sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$. **(1.25 puntos)**

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*. **(1.25 puntos)**

a) La derivada de la función es $f(x)=(x-a)\mathrm{e}^x \Rightarrow f'(x)=\mathrm{e}^x+(x-a)\mathrm{e}^x=(1+x-a)\mathrm{e}^x$

La igualamos a cero para averiguar sus puntos críticos:

$$f'(x)=0\Rightarrow(1+x-a)\mathrm{e}^x=0\Rightarrow\begin{cases}1+x-a=0\Rightarrow x=a-1\\ e^x=0;\ \text{No es posible}\end{cases}$$

Como el punto crítico debe ser $x=0\Rightarrow a-1=0\Rightarrow \boxed{a=1}$

b) Si $a=1$ entonces la función es $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$ y su derivada $f'(x)=(1+x-1)\mathrm{e}^x=xe^x$

La derivada segunda será: $f'(x)=xe^x \Rightarrow f''(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

Si igualamos a cero la segunda derivada

$$f''(x)=0\Rightarrow(1+x)e^x=0\Rightarrow\begin{cases}1+x=0\Rightarrow x=-1\\ e^x=0;\ \text{No es posible}\end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada segunda antes de x = –1 y después de x = –1.

En $(-\infty,-1)$ tomamos el valor x = –2 → $f''(-2)=(1-2)e^{-2}=-e^{-2}<0$

En $(-1,+\infty)$ tomamos el valor x = 0 → $f''(0)=(1+0)e^0=1>0$

La función presenta un punto de inflexión en x = –1.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Sea la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto (1,1). (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

Calculemos la integral indefinida pedida:

$$\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx\\ dx=\dfrac{1}{e^x}dt=\dfrac{1}{t}dt\end{array}\right\}=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{1}{t}dt=\int\frac{1+t}{t(1-t)}dt=$$

$$=\{\text{Integración por descomposición en fracciones simples}\}$$

$$\frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}\Rightarrow\frac{1+t}{t(1-t)}=\frac{A(1-t)+Bt}{t(1-t)}\Rightarrow 1+t=A(1-t)+Bt$$

$$\text{Tomando } t=1\Rightarrow 1+1=A\cdot 0+B\Rightarrow B=2$$

$$\text{Tomando } t=0\Rightarrow 1+0=A\cdot 1+B\cdot 0\Rightarrow A=1$$

Nuestra integral se descompone en la suma de dos integrales más sencillas:

$$\int\frac{1+t}{t(1-t)}dt=\int\frac{1}{t}dt+\int\frac{2}{1-t}dt=\ln t-2\ln(1-t)=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ t=e^x\end{array}\right\}=$$

$$=\ln e^x-2\ln\left|1-e^x\right|=\boxed{x-2\ln\left|1-e^x\right|+C}$$

La primitiva es $F(x)=x-2\ln\left|1-e^x\right|+C$. Como nos piden además que pase por el punto (1,1), se debe cumplir que $F(1)=1\Rightarrow F(1)=1-2\ln\left|1-e^1\right|+C=1\Rightarrow -2\ln\left|1-e\right|+C=0\Rightarrow C=2\ln\left|1-e\right|$

La primitiva pedida es $F(x)=x+2\ln\left|1-e^x\right|+2\ln\left|1-e\right|$

EJERCICIO 4 (2.5 puntos)

Considera las funciones $f:(-2,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(x+2)$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$.

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f, la gráfica de g, la recta $x=1$ y la recta $x=3$. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas). **(1 punto)**

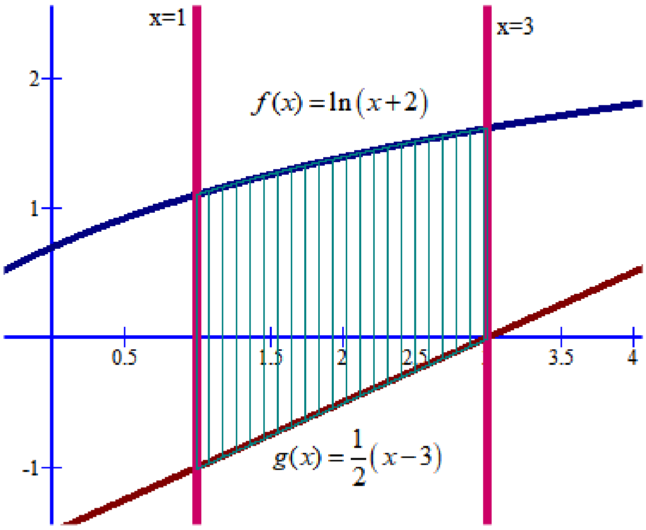
b) Determina el área del recinto anterior. **(1.5 puntos)**

a) Hacemos una tabla de valores para cada función.

x	$f(x)=\ln(x+2)$
-2	$\ln 0=-\infty$; No existe pero es una asintota
-1	$\ln(1)=0$
0	$\ln 2=0,69$
4	$\ln 6=1,79$

x	$g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$
1	-1
2	$-\frac{1}{2}$
3	0

El recinto será:



b) El área del recinto es la integral definida de la diferencia de las funciones entre 1 y 3. Calculemos primero la integral definida de la función *f*.

$$\int \ln(x+2)dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=\ln(x+2)\Rightarrow du=\dfrac{1}{x+2}dx\\ dv=dx\Rightarrow v=\int dx=x\end{array}\right\}=x\cdot\ln(x+2)-\int x\frac{1}{x+2}dx=$$

$$= x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2}\,dx = x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx =$$
$$= x\cdot\ln(x+2) - \int \frac{x+2}{x+2}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx = x\cdot\ln(x+2) - \int dx + 2\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$
$$= x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)$$

El área será:

$$\int_1^3 \ln(x+2) - \frac{1}{2}(x-3)dx = \int_1^3 \ln(x+2)dx - \frac{1}{2}\int_1^3 x-3dx =$$
$$= \left[x\cdot\ln(x+2) - x + 2\ln(x+2)\right]_1^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^3 =$$
$$= \left(3\cdot\ln(3+2) - 3 + 2\ln(3+2)\right) - \left(1\cdot\ln(1+2) - 1 + 2\ln(1+2)\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 3\cdot 1\right)\right] =$$
$$= 5\ln 5 - 3 - 3\ln 3 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} + 3\right) = 5\ln 5 - 2 - 3\ln 3 + 1 = -1 + 5\ln 5 - 3\ln 3 = \boxed{3,75\,u^2}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tales que $a+d=1$, tienen determinante 1 y cumplen $AX=XA$, siendo $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} AX=XA \\ a+d=1 \Rightarrow a=1-d \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-d & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ 1-d & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -1+d \\ d & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -c=b \\ -d=-1+d \\ 1-d=d \\ b=-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-c \\ 1=2d \end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{1}{2} \Rightarrow a=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Las matrices son $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y determinante vale 1

$$|X|=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -c \\ c & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=1 \Rightarrow \frac{1}{4}+c^2=1 \Rightarrow c^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

Las matrices son $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ o $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>EJERCICIO 6</u> (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2m^2-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}$ considera el sistema de ecuaciones dado por $X^tA=B^t$, donde X^t, B^t denotan las traspuestas. Discútelo según los distintos valores de m.

$$X^tA=B^t \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m^2-1\\ m\\ 1\end{pmatrix}^t$$

$$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-m & 1 & 2m-1\\ 1 & m & 1\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m^2-1 & m & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(2-m)x+y+mz & x+my+z & (2m-1)x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2m^2-1 & m & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2-m)x+y+mz=2m^2-1\\ x+my+z=m\\ (2m-1)x+y+z=1\end{array}\right\}$$

Discutamos el sistema. Para ello considero la matriz de coeficientes:

$$B=\begin{pmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

con determinante

$$|B|=\begin{vmatrix}2-m & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ 2m-1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(2-m)m+2m-1+m-\left[m^2(2m-1)+1+2-m\right]=$$

$$=2m-\cancel{m^2}+2m-1+m-2m^3+\cancel{m^2}-3+m=-2m^3+6m-4$$

Igualamos a cero y $-2m^3+6m-4=0\Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & -2 & 0 & 6 & -4\\ 1 & & -2 & -2 & 4\\ \hline & -2 & -2 & 4 & \boxed{0}\end{array} \Rightarrow m=1$ es raíz

Y resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$-2m^2-2m+4=0\Rightarrow m=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{-4}=\frac{2\pm 6}{-4}=\begin{cases}m=\dfrac{2+6}{-4}=-2\\ m=\dfrac{2-6}{-4}=1\end{cases}$$

Distinguiremos 3 casos diferentes:

CASO 1. $m\neq 1;\ m\neq -2$

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema tiene solución única. Existe una única matriz X que cumpla la ecuación $X^tA=B^t$.

CASO 2. $m=1$

Para este valor el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+z=1$$

Se observa que las tres ecuaciones son iguales. Este sistema tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m=-2$

Para este valor el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-2z=7 \\ x-2y+z=-2 \\ -5x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 4x+y-2z=7 \\ -5x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - 4 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ -4x & +8y & -4z & =8 \\ 4x & +y & -2z & =7 \\ \hline & 9y & -6z & =15 \end{array}\right\} \text{ y también } \left\{\begin{array}{lllll} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 5 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 5x & -10y & +5z & =-10 \\ -5x & +y & +z & =1 \\ \hline & -9y & +6z & =-9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 9y-6z=15 \\ -9y+6z=-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ 9y & -6z & =15 \\ -9y & +6z & =-9 \\ \hline & 0 & =6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y+z=-2 \\ 9y-6z=15 \\ 0=6 \end{array}\right\}$$

Este sistema no tiene solución.

<u>EJERCICIO 7</u> (2,5 puntos)

Considera la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ y los planos $\pi_1 \equiv x = 0$ y $\pi_2 \equiv y = 0$.

a) Halla los puntos de la recta ***r*** que equidistan de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

b) Determina la posición relativa de la recta ***r*** y la recta intersección de los planos π_1 y π_2. **(1.25 puntos)**

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2-\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right\}$$ Un punto de la recta r tiene coordenadas $P_r\left(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda\right)$

Este punto si equidista de los planos debe cumplir:

$$\text{distancia}\left(P_r,\pi_1\right) = \text{distancia}\left(P_r,\pi_2\right)$$

$$\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{1}} = \frac{|2+3\lambda|}{\sqrt{1}}$$

$$|2-\lambda| = |2+3\lambda| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-\lambda = 2+3\lambda \Rightarrow 0 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \\ 2-\lambda = -\left(2+3\lambda\right) \Rightarrow 2-\lambda = -2-3\lambda \Rightarrow 2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -2 \end{array}\right\}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 tienen coordenadas

$$\left.\begin{array}{l} P_r\left(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda\right) \\ \lambda = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow P_r\left(2,2,1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_r\left(2-\lambda, 2+3\lambda, 1+\lambda\right) \\ \lambda = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow P_r\left(4,-4,-1\right)$$

b) Llamemos s a la recta definida por los planos π_1 y π_2. Obtengamos de su ecuación el vector director:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x = 0 \\ \pi_2 \equiv y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = \left(0,0,1\right)$$

$$r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \left(-1,3,1\right)$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas los vectores directores deben ser proporcionales, y estos no los son. Por lo que solo cabe la posibilidad de que se corten o crucen.

Tomemos un tercer vector que vaya de un punto de la recta s a otro de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{1} \Rightarrow P_r(2,2,1) \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow P_s(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_sP_r} = (2,2,1)-(0,0,0) = (2,2,1)$$

Veamos si son linealmente dependientes o independientes los tres vectores:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0-2+0-(0+0+6) = -8 \neq 0$$

Por lo que las rectas se cruzan.

<u>EJERCICIO 8</u> (2,5 puntos)
Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1,1,0), B(1,0,2) y C(0,2,1).
a) Halla el área de dicho triángulo. **(1.25 puntos)**
b) Calcula el coseno del ángulo en el vértice A. **(1.25 puntos)**

a) Las coordenadas de los vectores que forman el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (1,1,0) = (0,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0,2,1) - (1,1,0) = (-1,1,1)$$

El área del triángulo es la mitad del módulo del vector que resulta del producto vectorial de ambos vectores.
Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j - k - 2i = -3i - 2j - k = (-3,-2,-1)$$

Su módulo es

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$Área = \frac{\sqrt{14}}{2}\, u^2$$

b) El coseno del ángulo en el vértice A es el coseno del ángulo que existe entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

$$(0,-1,2)(-1,1,1) = \sqrt{1+4}\sqrt{1+1+1} \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{-1+2}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = 0,2581$$