	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2**

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

1. $\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$ **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcúlese a y b para que se verifiquen $|MA| = 2$ y $|M + B| = 3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar el determinante de una matriz. **(2 puntos)**

E3.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x + 2 = y = z - 2$ y el plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2,0,2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+1}{2} = z - 1$, y el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r, $(1,-1,1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π. **(1,2 puntos)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=3x^4+x^3-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados). **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x\cos x$.

a) Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. **(1,2 puntos)**

E8.- (Análisis)

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$ **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int\frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$. **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos A = "caso adjudicado al bufete A", B = "caso adjudicado al bufete B", C = "caso adjudicado al bufete C", G = "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G/A)$, $P(G/B)$, $P(G/C)$. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso. **(0,5 puntos)**

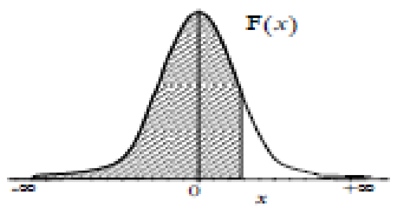
c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A. **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)
a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + \quad z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$ **(0,8 puntos)**

a) Para discutir el sistema averiguamos primero cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes asociada.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que estudiamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 1 \ y \ \lambda \neq -2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3, así como el de la matriz ampliada A/B y como el número de incógnitas.
El sistema tiene solución única (COMPATIBLE DETERMINADO)

CASO 2. $\lambda = 1$

Sustituimos en el valor de λ y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} x + \quad z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & =1 \\ -x & & -z & =-1 \\ \hline & y & & =0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2}^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3}^{\text{a}} - \text{Ecuación 1}^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & -y & +z & =1 \\ -x & & -z & =-1 \\ \hline & -y & & =0 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + \quad z = 1 \\ \quad y = 0 \\ \ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases}}$$

El sistema tiene infinitas soluciones (COMPATIBLE INDETERMINADO)

CASO 3. $\lambda = -2$

Sustituimos en el valor de λ y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} -2x + \quad z = 1 \\ x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & & +z & = 1 \\ 2x & +2y & -4z & = 2 \\ \hline & 2y & -3z & = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 1^{\text{a}} + 2 \cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrl} -2x & & +z & = 1 \\ 2x & -2y & +2z & = 2 \\ \hline & -2y & +3z & = 3 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2x + \quad z = 1 \\ 2y - 3z = 3 \\ -2y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrl} -2y & +3z & = 3 \\ 2y & -3z & = 3 \\ \hline & 0 & = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2x + \quad z = 1 \\ 2y - 3z = 3 \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!} \\ 0 = 6 \end{cases}$$

El sistema no tiene solución (INCOMPATIBLE)

b) Para $\lambda = 1$ es el caso 2 estudiado arriba. Hemos aplicado el método de Gauss para simplificar la expresión del sistema.
Terminamos de resolverlo.

$$\begin{cases} x + \quad z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}}$$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ *y* $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, calcúlese a y b para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar el determinante de una matriz. **(2 puntos)**

$$MA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ a+2b & 2a+5b\end{pmatrix}$$

$$|MA|=2 \Rightarrow 3(2a+5b)-7(a+2b)=2 \Rightarrow 6a+15b-7a-14b=2 \Rightarrow -a+b=2 \Rightarrow \boxed{b=2+a}$$

$$M+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ a+1 & b+1\end{pmatrix}$$

$$|M+B|=3 \Rightarrow 2(b+1)-(a+1)=3 \Rightarrow 2b+2-a-1=3 \Rightarrow \boxed{2b-a=2}$$

Unimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} b=2+a \\ 2b-a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+a)-a=2 \Rightarrow 4+2a-a=2 \Rightarrow \boxed{a=-2} \Rightarrow \boxed{b=2-2=0}$$

Los valores buscados son *a = –2* y *b = 0*.

E3.- (Geometría)
Dada la recta $r \equiv x+2 = y = z-2$ y el plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$, se pide:
a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**
b) Calcular el punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2,0,2)$ y hallar la recta que es simétrica de r respecto del plano π. **(1,2 puntos)**

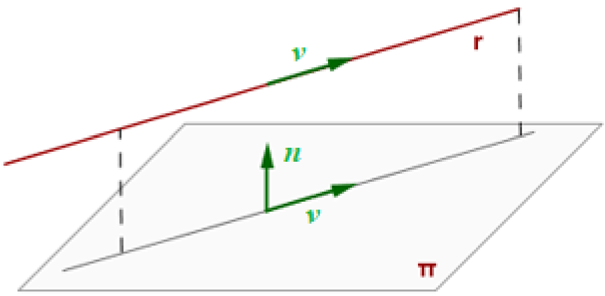
a) La posición relativa se decide con el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv x+2 = y = z-2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ \pi \equiv x - z + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,0,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1,1,1)(1,0,-1) = 1 - 1 = 0$$

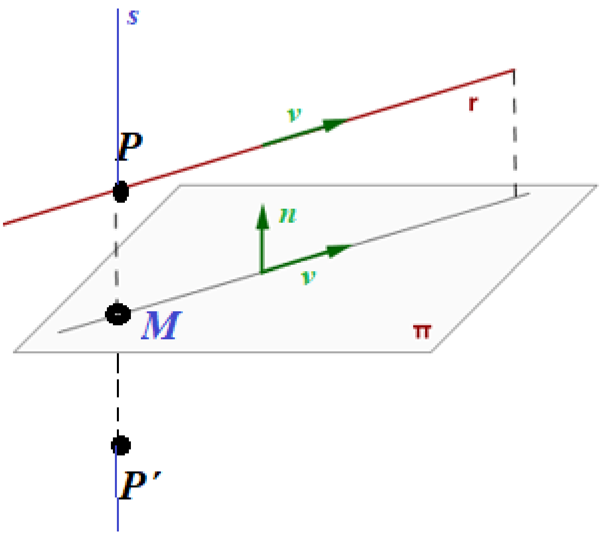
Los vectores son perpendiculares y por tanto, recta y plano son paralelos o coincidentes. Comprobamos si un punto cualquiera de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv x+2 = y = z-2 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ P_r(-2,0,2) \end{cases} \\ \pi \equiv x - z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿P_r(-2,0,2) \in \pi? \Rightarrow ¿-2-2+2=0? \text{ ¡No!}$$

Ni ese punto ni ningún otro de la recta está en el plano. La recta no está contenida en el plano y por tanto, son paralelos r y π.



b) Para hallar el punto simétrico respecto de π del punto de r P$(-2,0,2)$ hallaremos la recta perpendicular al plano que pasa por P. Luego el punto de corte de plano π y recta s (M). Y por último, al punto M le sumo el vector $\overrightarrow{PM}$ obteniendo el punto P´ simétrico de P respecto del plano π.



Recta *s*.

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv x-z+2=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,0,-1) \Rightarrow \vec{v_s}=(1,0,-1)\\ P(-2,0,2)\in s\end{array}\right\} \Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=-2+t\\ y=0\\ z=2-t\end{cases}$$

Punto M.

$$\left.\begin{array}{l}s\equiv\begin{cases}x=-2+t\\ y=0\\ z=2-t\end{cases}\\ \pi\equiv x-z+2=0\end{array}\right\} \Rightarrow -2+t-2+t+2=0 \Rightarrow 2t=2 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases}x=-2+1=-1\\ y=0\\ z=2-t=2-1=1\end{cases} \Rightarrow M(-1,0,1)$$

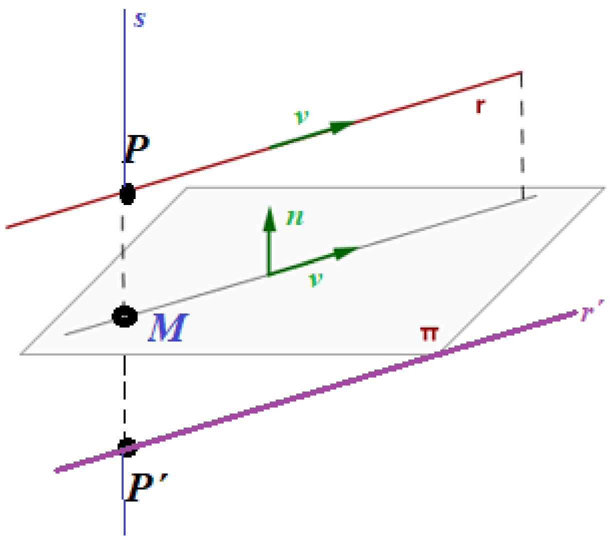
Punto P´.

$$\left.\begin{array}{l}P(-2,0,2)\\ M(-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PM}=(-1,0,1)-(-2,0,2)=(1,0,-1)$$

$$\boxed{P' = M+\overrightarrow{PM}=(-1,0,1)+(1,0,-1)=(0,0,0)}$$

El punto simétrico respecto de π del punto de r $(-2,0,2)$ es P´(0,0,0).

La recta r' que es simétrica de r respecto del plano π pasa por el punto P´ y tiene el mismo vector director que r.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_{r'}}=\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)\\ P'(0,0,0)\in r'\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r'\equiv\begin{cases}x=t\\ y=t\\ z=t\end{cases}} \text{ o bien } \boxed{r'\equiv x=y=z}$$

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$, y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la distancia del plano π al punto de la recta r, $(1,-1,1)$ y hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π. **(1,2 puntos)**

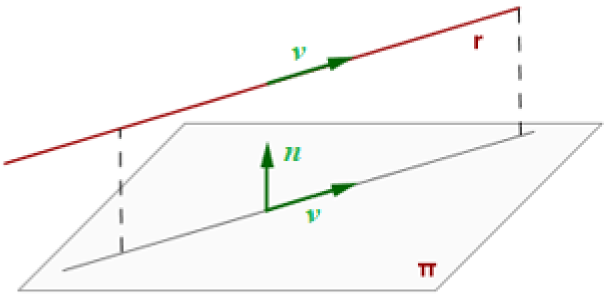
a) La posición relativa se decide con el producto escalar del vector normal del plano y el director de la recta.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1 \Rightarrow \vec{v_r}=(1,2,1) \\ \pi \equiv x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n}=(1,2,1)(1,-1,1)=1-2+1=0$$

Los vectores son perpendiculares y por tanto, recta y plano son paralelos o coincidentes. Comprobamos si un punto cualquiera de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(1,2,1) \\ P_r(1,-1,1) \end{cases} \\ \pi \equiv x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿P_r(1,-1,1)\in\pi? \Rightarrow ¿1-(-1)+1=0? \text{ ¡No!}$$

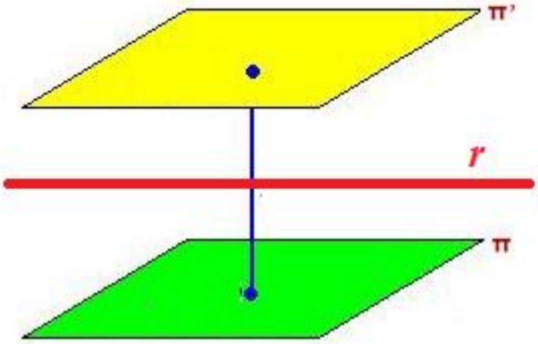
Ni ese punto ni ningún otro de la recta está en el plano. La recta no está contenida en el plano y por tanto, son paralelos r y π.



b)

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-y+z=0 \\ P_r(1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow Distancia(P_r,\pi)=\frac{|1-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\boxed{\sqrt{3}\,u}$$

Ahora busco un plano π´ que esté situado como indica el dibujo.



Un plano paralelo a $\pi \equiv x - y + z = 0$ tiene ecuación $\pi' \equiv x - y + z + D = 0$.
El plano π´ que buscamos tiene que estar a la misma distancia de *r* que π. La distancia de un punto de la recta *r* al plano π´ debe ser la misma que de ese punto al plano π.

$$\left.\begin{array}{r} \pi' \equiv x - y + z + D = 0 \\ P_r(1,-1,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow Distancia(P_r, \pi') = \frac{|1-(-1)+1+D|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|D+3|}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y + z = 0 \\ P_r(1,-1,1) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow Distancia(P_r, \pi) = \frac{|1-(-1)+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$Distancia(P_r, \pi) = Distancia(P_r, \pi') \Rightarrow \frac{|D+3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |D+3| = \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow |D+3| = 3 \begin{cases} D+3=3 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y+z=0 \text{ ¡Es el plano } \pi! \\ o \\ D+3=-3 \Rightarrow D=-6 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x-y+z-6=0} \end{cases}$$

El plano buscado es $\pi' \equiv x - y + z - 6 = 0$

E5.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=3x^4+x^3-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que $f(x)$ se anula. (Téngase en cuenta la monotonía de la función y los valores que toma en los extremos relativos previamente calculados). **(2 puntos)**

Intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos

Usamos la derivada para determinar los puntos críticos de la función.

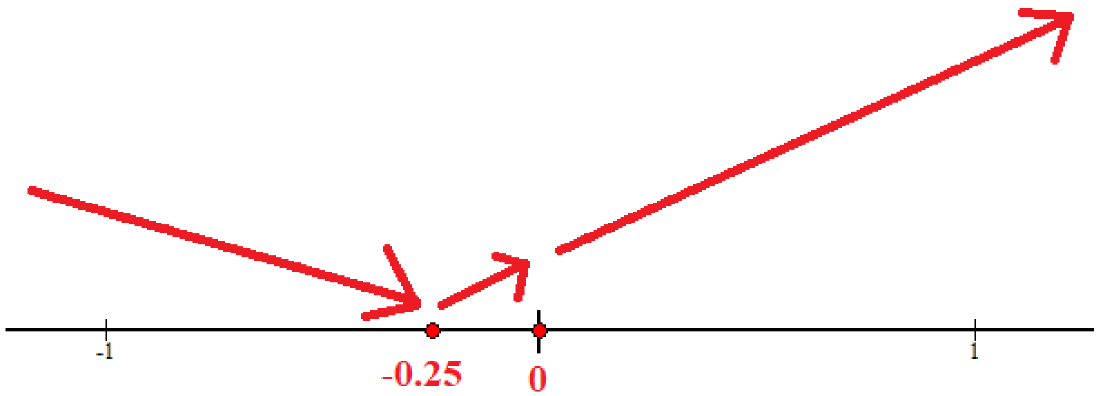
$$f(x)=3x^4+x^3-1 \Rightarrow f'(x)=12x^3+3x^2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3+3x^2=0 \Rightarrow 3x^2(4x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 4x+1=0 \Rightarrow x=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=12(-1)^3+3(-1)^2=-9<0$. La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$.
- En $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ tomamos *x* = *–0.1* y la derivada vale
  $f'(-0.1)=12(-0.1)^3+3(-0.1)^2=0.018>0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{4},0\right)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=12+3=15>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el siguiente esquema:



La función decrece en $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ y crece en $(-0.25,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en *x* = *–0.25*.

$x=-0.25 \Rightarrow f(-0.25)=3(-0.25)^4+(-0.25)^3-1=-1.003$.

El mínimo relativo tiene coordenadas $(-0.25,-1.003)$

Puntos donde la función se anula.

Por la evolución de la función que aparece en el esquema probamos con un punto $x = -1$ y la función vale $f(-1) = 3(-1)^4 + (-1)^3 - 1 = 1 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo $(-1, -0.25)$ existe un punto en dicho intervalo donde la función se anula, ya que $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ es continua en $(-1, -0.25)$, $f(-1) > 0$ y $f(-0.25) = -1.003 < 0$. Sólo existe uno pues la función es decreciente en dicho intervalo.

Aplicando el teorema de Bolzano en el intervalo $(0,1)$ existe un punto en dicho intervalo donde la función se anula, ya que $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$ es continua en $(0,1)$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 3 + 1 - 1 = 3 > 0$. Sólo existe uno pues la función es creciente en dicho intervalo.

El número total de puntos donde se anula la función son 2. Uno en el intervalo $(-1, -0.25)$ y otro en el intervalo $(0,1)$.

E6.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=xe^{-x}$, determínense su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

Dominio de definición.

El dominio de definición es todo $\mathbb{R}$, pues la función no presenta ningún problema de definición al ser el producto de un polinomio y una exponencial.

Asíntotas.

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene, pues la función no presenta discontinuidades.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=(-\infty)e^{+\infty}=-\infty$$

Por lo que sólo existe asíntota horizontal (*y* = *0*) en el +∞.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos.

Usamos la derivada de la función.

$$f(x)=xe^{-x}\Rightarrow f´(x)=e^{-x}-xe^{-x}$$

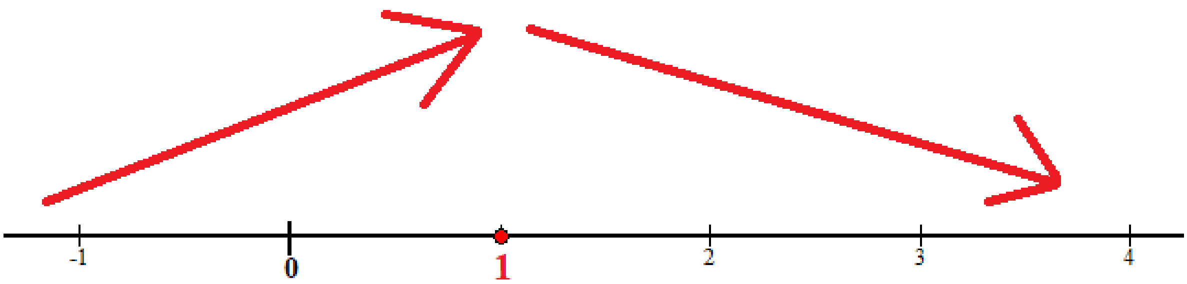
$$f´(x)=0\Rightarrow e^{-x}-xe^{-x}=0\Rightarrow e^{-x}(1-x)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{-x}=0;\ \text{No es posible}\\ o\\ 1-x=0\to x=1\end{cases}$$

El único punto crítico es *x* = *1*.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de *x* = *1*.

- En $(-\infty,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f´(0)=e^{-0}-0e^{-0}=1>0$. La función crece en $(-\infty,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f´(2)=e^{-2}-2e^{-2}=-e^{-2}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

El crecimiento y decrecimiento de la función sigue el esquema.



La función crece en $(-\infty,1)$ y decrece en $(1,+\infty)$. Tiene un máximo relativo en *x* = *1*.

$x = 1 \rightarrow f(1) = 1e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. El máximo relativo tiene coordenadas $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$

Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Usamos la segunda derivada.

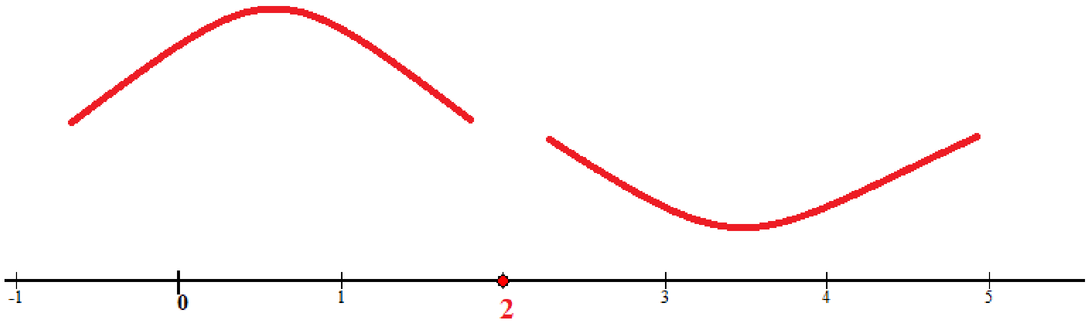
$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow f''(x) = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{x}\right) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2e^{-x} + xe^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}\left(-2+x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x} = 0; \text{ No es posible} \\ \text{o} \\ -2+x=0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Estudiamos el cambio de la concavidad y convexidad antes y después de *x* = *2*.

- En $\left(-\infty, 2\right)$ tomo *x* = *1* y la segunda derivada vale $f''(1) = e^{-1}\left(-2+1\right) = -\dfrac{1}{e} < 0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\infty, 2\right)$.
- En $\left(2, +\infty\right)$ tomo *x* = *3* y la segunda derivada vale $f''(3) = e^{-3}\left(-2+3\right) = \dfrac{1}{e^3} > 0$. La función es convexa (∪) en $\left(2, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.

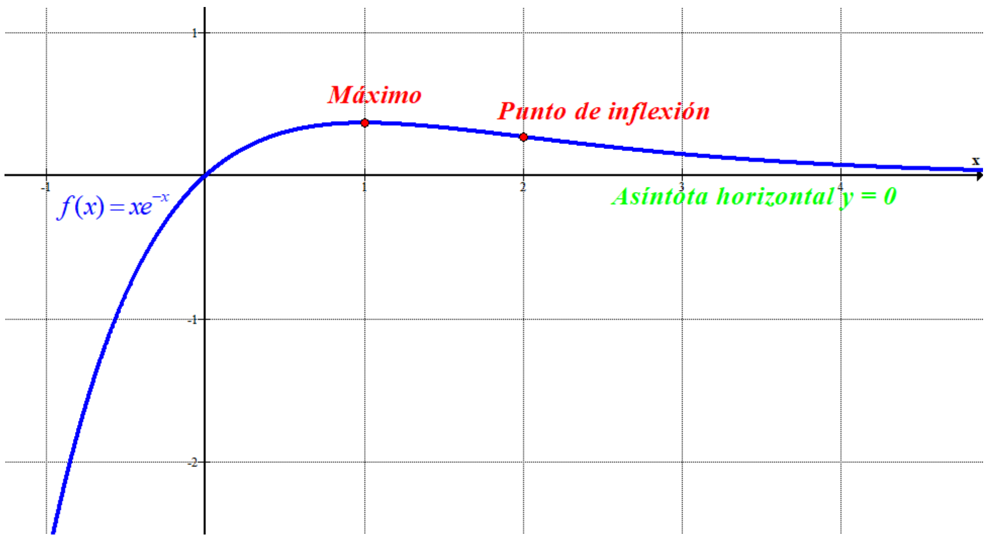


La función es cóncava (∩) en $\left(-\infty, 2\right)$ y convexa (∪) en $\left(2, +\infty\right)$. Presenta un punto de inflexión en *x* =*2*.

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2e^{-2} = \dfrac{2}{e^2}$. El punto de inflexión tiene coordenadas $\left(2, \dfrac{2}{e^2}\right)$

Gráfica.

x	$y = xe^{-x}$
-1	$-e = -2.71$
0	0
1	$1/e = 0.37$
2	$2/e^2 = 0.27$
4	$4e^{-4} = 0.07$



E7.- (Análisis)
Dada la función $f(x) = x\cos x$.

a) Demuestre que $f(x)$ es no negativa en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. **(1,2 puntos)**

a) Valoramos la función en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0\cos 0 = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Valoramos la función en $x = \frac{\pi}{4}$, un punto intermedio del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

Si existiese un valor $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que *f(a) < 0* entonces podríamos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo $\left[a, \frac{\pi}{4}\right]$ o $\left[\frac{\pi}{4}, a\right]$ y existiría un $c \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donde la función se anula. Esto último no es posible pues $f(x) = x\cos x$ solo se anula cuando *x = 0* o cuando *cosx = 0* y ninguna de estas dos cosas ocurre en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Teorema de Bolzano: Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y *signo f(a) ≠ signo f(b)*, entonces existe un c ∈ [a, b] tal que *f(c) = 0*.

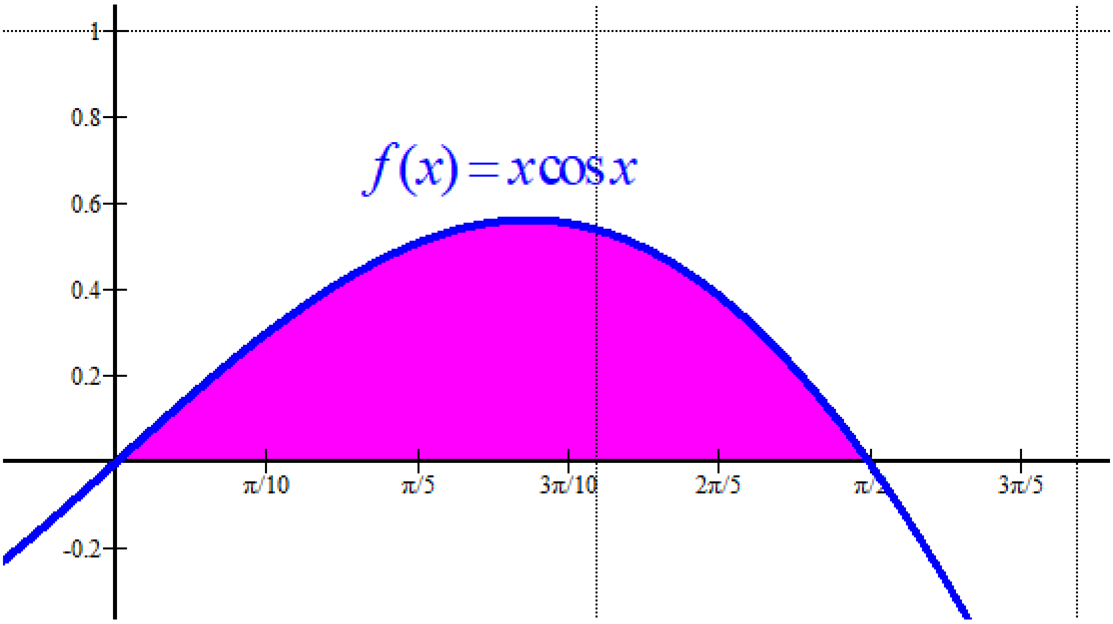
b) Acabamos de ver que la función $f(x) = x\cos x$ es positiva en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y que corta el eje de las *x* sólo en los extremos del intervalo.

$$Área = \int_0^{\pi/2} x\cos x dx = ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \int x\cos x dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = \cos x dx \to v = \int \cos x dx = senx \end{array}\right\} = xsenx - \int senxdx = xsenx - (-\cos x) = \\ = xsenx + \cos x + K \end{array}}$$

$$... = \left[xsenx + \cos x\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{2}sen\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - (0sen0 + \cos 0) = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1 = 0.57\ u^2}$$

No pide el dibujo del recinto ni el de la función, pero lo hago para comprobar el resultado.



E8.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$ **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$. **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}=\frac{e^0-\cos 0}{\ln(1+0)}=\frac{1-1}{\ln 1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+senx}{\frac{1}{1+x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)\left(e^x+senx\right)=(1+0)\left(e^0+sen0\right)=\boxed{1}$$

b)

$$\int\frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln x=t\to\frac{1}{x}dx=dt\to dx=xdt\end{array}\right\}=\int\frac{t^2}{\cancel{x}}\cancel{x}dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}=$$

$$=\{\text{Deshacemos el cambio } \ln x=t\}=\boxed{\frac{1}{3}(\ln x)^3+K}$$

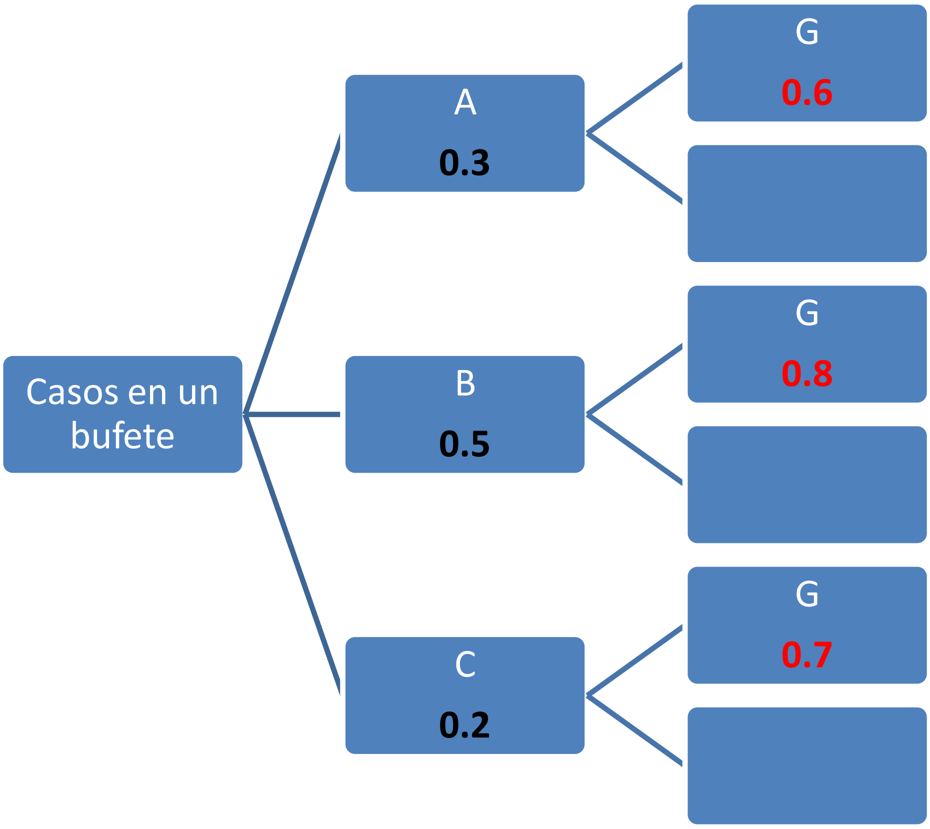
E9- (Probabilidad y estadística)
Una corporación informática utiliza 3 bufetes de abogados para resolver casos legales en los tribunales. El bufete A recibe el 30% de los casos legales y gana en los tribunales el 60% de los casos presentados, el bufete B recibe el 50% de los casos legales y gana el 80% de los casos presentados, mientras que el bufete C recibe el 20% de los casos legales y gana el 70% de los casos presentados.

a) Se consideran los sucesos A = "caso adjudicado al bufete A", B = "caso adjudicado al bufete B", C = "caso adjudicado al bufete C", G = "caso ganado". Deduzca del enunciado los valores de $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(G / A)$, $P(G /B)$, $P(G / C)$. **(0,5 puntos)**

b) Se elige al azar uno de los casos presentados en los tribunales. Determine la probabilidad de que la empresa gane el caso. **(0,5 puntos)**

c) Si se ha ganado el caso elegido, calcule la probabilidad de que haya sido encargado al bufete A. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



a) P(A) = 0.30 P(B) = 0.50 P(C) = 0.20

$P(G/A)=0.6$ $P(G/B)=0.8$ $P(G/C)=0.7$

b) Nos piden calcular P(G). Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G)=P(A)P(G/A)+P(B)P(G/B)+P(C)P(G/C)=$$
$$=0.3\cdot 0.6+0.5\cdot 0.8+0.2\cdot 0.7=\boxed{0.72}$$

c) Nos piden una probabilidad a posteriori: $P(A/G)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/G)=\frac{P(A\cap G)}{P(G)}=\frac{P(A)P(G/A)}{P(G)}=\frac{0.3\cdot 0.6}{0.72}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

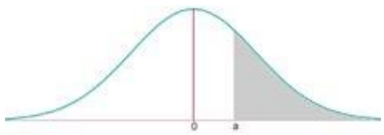
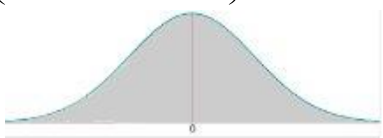
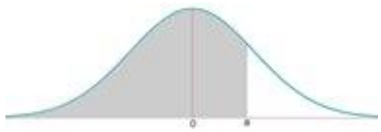
E10.- (Probabilidad y estadística)
La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

X = IMC de una persona adulta

X = N(26, 6)

Obeso = “X > 35”

$$P(X>35)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-26}{6}>\frac{35-26}{6}\right)=P(Z>1.5)=\ldots$$

 =  − 

$$\ldots=1-P(Z<1.5)=\{\text{Miramos la tabla}\}=1-0.9332=\boxed{0.0668}$$

	0,00
0,0	0,[illegible]000
0,1	0,[illegible]398
0,2	0,[illegible]793
0,3	0,[illegible]179
0,4	0,[illegible]554
0,5	0,[illegible]915
0,6	0,[illegible]257
0,7	0,[illegible]580
0,8	0,[illegible]881
0,9	0,[illegible]159
1,0	0,[illegible]413
1,1	0,[illegible]643
1,2	0,[illegible]849
1,3	0,[illegible]032
1,4	0,[illegible]192
1,5	0,9332
1,6	[illegible]

La proporción de personas adultas obesas de ese país es del 6.68%.