UCLM
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2019
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Dentro de cada opción el estudiante elegirá cuatro ejercicios entre los cinco propuestos.
Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas.
Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntúa 2,5 puntos.
Duración de la prueba: 90 minutos.

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)
b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x)=xe^{-x}$. (1 punto)
2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=\left(x+2\right)^2-4$. (1,5 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=16-x^2$ en el punto de abscisa x = 1. (1 punto)
3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} x-\left(a-2\right)y-z=1 \\ x-\quad 2y+z=-4 \\ x-\quad 3y+az=-a^2 \end{array}\right\} ;\ (1{,}5\text{ puntos})$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 3. (1 punto)

4A. Dada la recta $r\equiv\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi\equiv\begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=-1+2\lambda \end{cases}\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. (1,25 puntos)
5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A)=0,75 y P(B)=0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. (0,75 puntos)
a2) Si P(A / B) = 0,6. (0,5 puntos)

Nota: P(A / B) denota la probabilidad condicionada.
b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos?
Redondea el resultado a la centésima. (0,75 puntos)

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? (0,5 puntos)

n	k \ p	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,33	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	0,0503	0,0345	0,0313
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	0,2059	0,1657	0,1563
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	0,3369	0,3185	0,3125
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	0,2757	0,3060	0,3125
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	0,1128	0,1470	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	0,0185	0,0282	0,0313

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $sen x - 2x + 1 = 0$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0, π]. (1,5 puntos)
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando
x ∈ [–200,200]. (1 punto)

2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro a ∈ R. (1 punto)
b) Para a = 1 calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

4B. a) Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0, -2)$, $\vec{v} = (a, b, 1)$ y $\vec{w} = (2, 5, c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)
b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(–1, 3, 1) y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y + 2z - 3 = 0$. Comprueba si los puntos Q(1, 5, 5) y R(0, 4, 2) pertenecen o no a la recta. (1 punto)

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70% de los pacientes son niñas. De los niños el 40% son menores de 36 meses y de las niñas el 30% tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. (0,75 puntos)

a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. (0,5 puntos)

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. (0,75 puntos)

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. (0,5 puntos)

a	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

SOLUCIONES

PROPUESTA A

1A. a) Estudia la continuidad en todo R de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}$ indicando los tipos de discontinuidad que aparecen. (1,5 puntos)

b) Calcula las coordenadas de los extremos relativos de la función $g(x)=xe^{-x}$. (1 punto)

a) Por ser el cociente de dos polinomios será continua en todo R salvo cuando se anule el denominador.

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

La función es discontinua en x = –1 y x = 1.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+x)\cancel{(x-1)}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2+x)}{(x+1)}=\dfrac{3}{2}$. En x = 1 es discontinua evitable.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-x^2-x}{x^2-1}=\dfrac{-2}{0}=\infty$. En x = – 1 es discontinua inevitable de salto infinito.

b) Calculemos la derivada de la función $g(x)=xe^{-x} \Rightarrow g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

La igualamos a cero.

$$g'(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0;\ \text{No es posible} \\ 1\text{-}x=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

Veamos que ocurre antes de 1 y después de 1.

En $(-\infty,1)$ tomamos el valor x = 0 y la derivada vale $g'(0)=e^{-0}(1-0)=1>0$ la función crece en $(-\infty,1)$.

En $(1,+\infty)$ tomamos el valor x = 2 y la derivada vale $g'(2)=e^{-2}(1-2)<0$ la función decrece en $(1,+\infty)$.

Luego en x = 1 hay un máximo local.

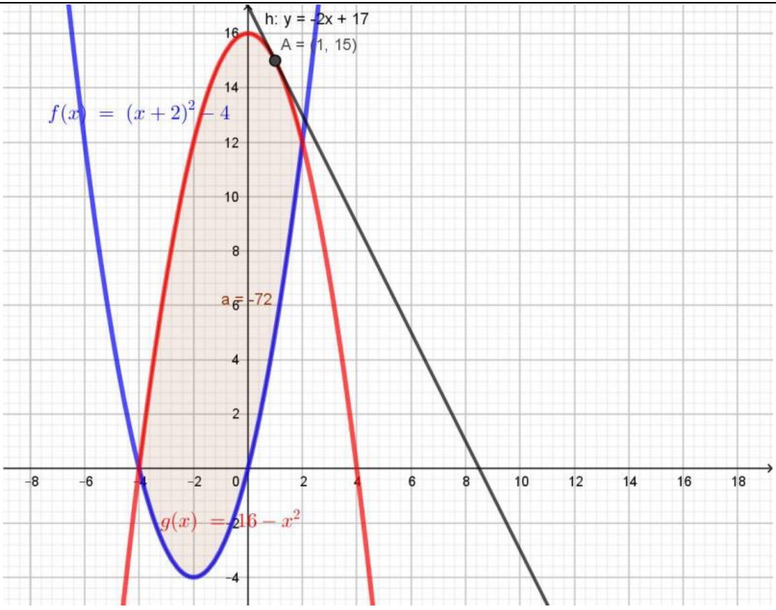
2A. a) Calcula razonadamente el área del recinto cerrado limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=16-x^2$ y $g(x)=(x+2)^2-4$. (1,5 puntos)

b) Encuentra razonadamente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=16-x^2$ en el punto de abscisa x = 1. (1 punto)

a) Veamos donde se cortan las gráficas de las funciones.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 16-x^2=(x+2)^2-4 \Rightarrow 16-x^2=x^2+4+4x-4 \Rightarrow 0=2x^2+4x-16$$

$$x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases} x=\dfrac{-2+6}{2}=2 \\ x=\dfrac{-2-6}{2}=-4 \end{cases}$$



El área la calculamos usando la integral definida de la diferencia de funciones entre –4 y 2.

$$Área = \int_{-4}^{2} 16 - x^2 - \left(x^2 + 4x\right) dx = \int_{-4}^{2} 16 - 2x^2 - 4x dx = \left[16x - \frac{2x^3}{3} - 2x^2\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left[16 \cdot 2 - \frac{2 \cdot 2^3}{3} - 2 \cdot 2^2\right] - \left[16(-4) - \frac{2(-4)^3}{3} - 2(-4)^2\right] =$$

$$= 32 - \frac{16}{3} - 8 + 64 - \frac{128}{3} + 32 = \frac{216}{3} = \boxed{72\, u^2}$$

b) Para calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 16 - x^2$ en el punto de abscisa x = 1 necesito el valor de la función y su derivada en x = 1.

$f(x) = 16 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$

$f(1) = 16 - 1^2 = 15$

$f'(1) = -2$

La ecuación de la recta tangente es:

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 15 = -2(x-1) \Rightarrow y - 15 = -2x + 2$

$\boxed{y = -2x + 17}$

3A. a) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro a ∈ R

$$\left.\begin{array}{l} x - (a-2)y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + az = -a^2 \end{array}\right\} ; \text{(1,5 puntos)}$$

b) Resuélvelo razonadamente para el valor a = 3. (1 punto)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{pmatrix}$$ con determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -a+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = -2a - a + 2 + 3 - 2 + a^2 - 2a + 3 = a^2 - 5a + 6$$

Si igualamos a cero

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} a = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ a = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Hay tres tipos de sistemas diferentes en función del valor de a.

CASO 1. $a \neq 3 \; y \; a \neq 2$

En este caso la matriz de coeficientes tiene rango 3 al igual que la ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $a = 2$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 2z = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & -2y & +z & = -4 \\ -x & & +z & = -1 \\ \hline & -2y & +2z & = -5 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & -3y & +2z & = -4 \\ -x & & +z & = -1 \\ \hline & -3y & +3z & = -5 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ -2y + 2z = -5 \\ -3y + 3z = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2 \cdot \text{Ecuación 3ª - 3} \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{ccc} -6y & +6z & = -10 \\ 6y & -6z & = 15 \\ \hline & 0 & = 5 \end{array} \end{array}\right\}$$

Este sistema es INCOMPATIBLE. No tiene solución

CASO 3. $a = 3$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ x - 2y + z = -4 \\ x - 3y + 3z = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & -2y & +z & = -4 \\ -x & +y & +z & = -1 \\ \hline & -y & +2z & = -5 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{cccc} x & -3y & +3z & = -9 \\ -x & +y & +z & = -1 \\ \hline & -2y & +4z & = -10 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ -2y + 4z = -10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - 2} \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{ccc} -2y & +4z & = -10 \\ 2y & -4z & = 10 \\ \hline & 0 & = 0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - y - z = 1 \\ -y + 2z = -5 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para a = 3 seguimos con lo hecho en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{l}x-y-z=1\\x-2y+z=-4\\x-3y+3z=-9\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-z=1\\-y+2z=-5\\0=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x-y-z=1\\y=2z+5\end{array}\right\}\Rightarrow x-2z-5-z=1\Rightarrow x=3z+6$$

La solución es $x=6+3t$; $y=5+2t$; $z=t$

4A. Dada la recta $r\equiv\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ y el plano $\pi\equiv\begin{cases}x=1+\lambda+\mu\\y=\lambda-\mu\\z=-1+2\lambda\end{cases}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

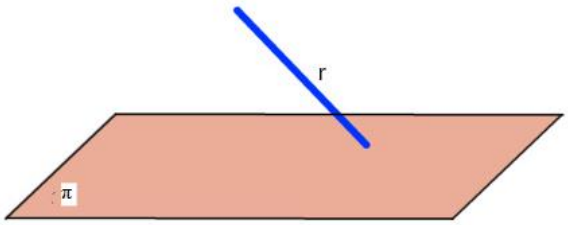
a) Determina razonadamente la posición relativa de r y π. (1,25 puntos)
b) Encuentra razonadamente la ecuación general del plano perpendicular al plano π y que contiene a la recta r. (1,25 puntos)

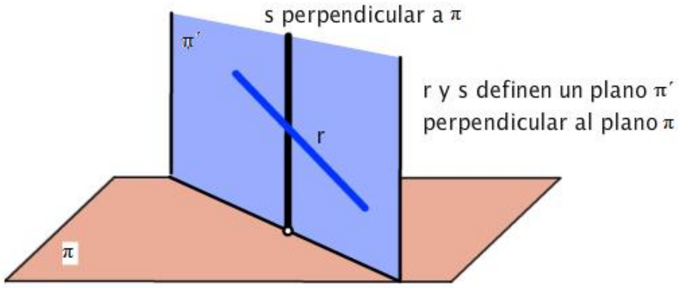
a) La posición relativa de recta y plano depende del ángulo que formen el vector normal del plano con el director de la recta $\vec{v_r}=(-1,1,2)$. El vector normal del plano lo determinamos con el producto vectorial de sus vectores directores $\vec{u}=(1,1,2)$ y $\vec{v}=(1,-1,0)$.

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & -1 & 0\\1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-2i-2j+2k=(-2,-2,2)$$

$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=(-1,1,2)(-2,-2,2)=2-2+4=4\neq0$ Luego no forman 90º el vector director de recta y normal del plano. Recta y plano son secantes, coincidiendo en un punto.

b) En el dibujo se describe lo que nos piden y lo que debemos calcular.





Buscamos un plano π´ perpendicular a π y que contenga a r.
Este plano tiene como vectores directores el normal del plano π, el director de la recta r y pasa por el punto P(1,0,0) de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(-1,1,2)\\\vec{n}=(-2,-2,2)\\\text{Pasa por }(1,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\pi'\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\-1 & 1 & 2\\-2 & -2 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\pi'\equiv2x-2-4y+2z+2z+2y+4x-4=0$$

$\pi'\equiv6x-2y+4z-6=0$

$\boxed{\pi'\equiv3x-y+2z-3=0}$

5A. a) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son P(A) = 0,75 y P(B) = 0,35. Calcula razonadamente las probabilidades que deben asignarse a los sucesos $A\cup B$ y $A\cap B$ en cada uno de los siguientes casos:

a1) Si A y B fuesen independientes. (0,75 puntos)
a2) Si P(A / B) = 0,6. (0,5 puntos)

Nota: P(A / B) denota la probabilidad condicionada.

b) El 1% de los cheques que recibe un banco no tienen fondos. Razona la respuesta de las siguientes preguntas:

b1) Si en una hora recibe cinco cheques, ¿cuál es la probabilidad de que tenga algún cheque sin fondos?

Redondea el resultado a la centésima. (0,75 puntos)

b2) El banco dispone de cinco sucursales en una ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres sucursales de esa ciudad reciban algún cheque sin fondos? (0,5 puntos)

a)

a1) Si A y B fuesen independientes entonces

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,75\cdot 0,35=\boxed{0,2625}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,75+0,35-0,2625=\boxed{0,8375}$$

a2) Si P(A / B) = 0,6 entonces

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow 0,6=\frac{P(A\cap B)}{0,35}\Rightarrow P(A\cap B)=0,6\cdot 0,35=\boxed{0,21}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0,75+0,35-0,21=\boxed{0,89}$$

b)

b1) Se trata de una binomial con 5 repeticiones (n=5) y la probabilidad de recibir un cheque sin fondos es 0,01 (p = 0,1). X = Número de cheques que se reciben sin fondos.

P(Recibir algún cheque sin fondos) = 1 – P (No recibir ningún cheque sin fondos) =

$$=1-P(X=0)=1-\binom{5}{0}0,01^0\cdot 0,99^5=1-0,99^5=\boxed{0,05}$$

b2) Se trata de una binomial con 5 repeticiones (n = 5) y la probabilidad de que una sucursal reciba algún cheque sin fondos es 0,05 (p = 0,05). X = Número de sucursales que reciben algún cheque sin fondos.

P(Al menos 3 sucursales reciban un cheque sin fondos) =

$$=P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$

$$=\binom{5}{3}0,05^3\cdot 0,95^2+\binom{5}{4}0,05^4\cdot 0,95^1+\binom{5}{5}0,05^5\cdot 0,95^0=$$

$$=\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 2}0,05^3\cdot 0,95^2+\frac{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2}}0,05^4\cdot 0,95+0,05^5=$$

$$10\cdot 0,05^3\cdot 0,95^2+5\cdot 0,05^4\cdot 0,95+0,05^5=\boxed{0,001}$$

PROPUESTA B

1B. a) Demuestra que la ecuación $senx-2x+1=0$ tiene al menos una solución real en el intervalo [0, π]. (1,5 puntos)
b) Calcula razonadamente el número exacto de soluciones de la ecuación anterior cuando x ∈ [–200,200]. (1 punto)

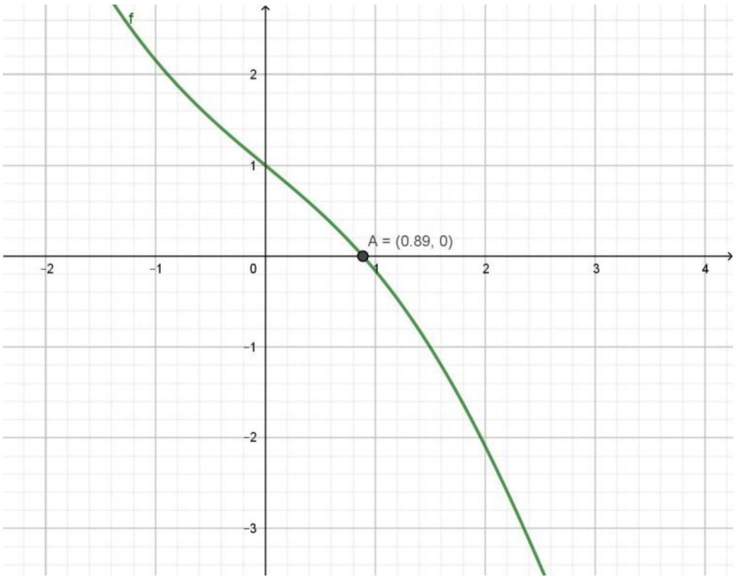
a)

Aplicamos el teorema de Bolzano a la función $f(x)$

$$f(x)=senx-2x+1 \Rightarrow \begin{cases} \text{Es continua en todo } \mathbb{R} \\ f(0)=sen0-2*0+1=1>0 \\ f(\pi)=sen\pi-2\pi+1=0-2\pi+1<0\approx -5{,}28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists c\in(0,\pi) \\ f(c)=0 \end{cases}$$

$b)$ $f'(x)=\cos x-2<0\ \forall x\in R$ porque $|\cos x|\leq 1 \Rightarrow f(x)$ es siempre decreciente

Luego en $[-200,200]$ solo existe una solución $x\approx\frac{\pi}{3}\Rightarrow f(\frac{\pi}{3})\approx 0{,}89$. Ver gráfica.



2B. Calcula razonadamente las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ (1,25 puntos por integral)

Nota: En la integral b) puede ayudarte hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$.

a)

$$\int (x+1)e^{-x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x+1\to du=dx\\ dv=e^{-x}dx\to v=\int e^{-x}dx=-e^{-x}\end{array}\right\}=-e^{-x}(x+1)-\int -e^{-x}dx=$$

$$=-e^{-x}(x+1)-e^{-x}=-e^{-x}(x+2)+C$$

$$\int_0^1 (x+1)e^{-x}dx=\left[-e^{-x}(x+2)\right]_0^1=-e^{-1}(1+2)-\left(-e^{-0}(0+2)\right)=\boxed{-\frac{3}{e}+2}$$

b)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \sqrt{x}=t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \\ dx = 2\sqrt{x}dt = 2tdt \\ \sqrt{x}=t \rightarrow x=t^2 \end{array} \right\} = \int \frac{1}{\cancel{t}(1+t^2)} 2\cancel{t}dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2arctgt = \boxed{2arctg\sqrt{x}+C}$$

3B. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula razonadamente el rango de la matriz A según los valores del parámetro a ∈ R. (1 punto)
b) Para a = 1 calcula razonadamente la matriz X que verifica que $X \cdot A = B - X$. (1,5 puntos)

a) El rango de A es como máximo 3. Calculamos su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a+2 \end{vmatrix} = a^2+2a$$

Si igualamos a cero el determinante

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2+2a=0 \Rightarrow a(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones distintas. Veamos que ocurre en cada una de ellas.

CASO 1. $a \neq 0 \text{ y } a \neq -2$

En este caso el rango de A es 3

CASO 2. $a=0$

La matriz queda

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, su rango no es 3 ya que su determinante es nulo y existe un menor de orden 2 no nulo, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $a=-2$

La matriz queda

$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, su rango no es 3 ya que su determinante es nulo y existe un menor de orden 2 no nulo, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

b) Para a = 1 la matriz A queda

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}$$

En la ecuación $X\cdot A=B-X$ vamos a despejar X.

$X\cdot A=B-X\Rightarrow X\cdot A+X=B\Rightarrow X(A+I)=B\Rightarrow X=B(A+I)^{-1}$. Suponiendo que A+I tenga inversa.

$$A+I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}$$

$$(A+I)^{-1}=\frac{Adj\left((A+I)^t\right)}{|A+I|}=\frac{Adj\left(\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&0&4\end{pmatrix}^t\right)}{\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&1\\1&0&4\end{vmatrix}}=\frac{Adj\left(\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\0&1&4\end{pmatrix}\right)}{16}=$$

$$=\frac{\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\1&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{16}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8&0&0\\1&8&-2\\-2&0&4\end{pmatrix}$$

$$X=B(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8&0&0\\1&8&-2\\-2&0&4\end{pmatrix}=\left\{2\times\boxed{3\cdot3}\times3 \text{ de una matriz } 2\times3\right\}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8-2&0&4\\1&8&-2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}6/16&0&4/16\\1/16&8/16&-2/16\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}3/8&0&1/4\\1/16&1/2&-1/8\end{pmatrix}}$$

4B. a) Dados los vectores $\vec{u}=(-1,\ 0,-2)$, $\vec{v}=(a,\ b,1)$ y $\vec{w}=(2,5,c)$, halla razonadamente el valor de a, b y c para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales y para que el vector $\vec{w}$ sea igual al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (1,5 puntos)

b) Determina razonadamente las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto P(–1, 3, 1) y es perpendicular al plano $\pi\equiv\ x+y+2z-3=0$. Comprueba si los puntos Q(1, 5, 5) y R(0, 4, 2) pertenecen o no a la recta. (1 punto)

a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales su producto escalar es cero.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,\ 0,-2)(a,b,1)=-a-2=0\Rightarrow\boxed{a=-2}$

También se cumple

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w}\Rightarrow\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix}=(2,5,c)$$

Como $\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & b & 1 \end{vmatrix}=4j-bk+j+2bi=2bi+5j-bk=(2b,5,-\mathrm{b})$

$$(2,5,c)=(2b,5,-\mathrm{b})\Rightarrow\begin{cases}2=2b\\5=5\\c=-b\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\boxed{b=1}\\c=-b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\boxed{c=-1}$$

Los valores de los parámetros son: $a=-2; b=1\ y\ c=-1$

b) Si la recta es perpendicular al plano $\pi\equiv\ x+y+2z-3=0$ su vector director es el normal del plano $\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,2)$ y como pasa por P(–1, 3, 1) su ecuación es

$$r\equiv\begin{cases}x=-1+t\\y=3+t\\z=1+2t\end{cases}\quad \text{o bien } r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$$

Compruebo si los puntos están en la recta.

$¿Q\in r?\quad ¿\frac{1+1}{1}=\frac{5-3}{1}=\frac{5-1}{2}?\Rightarrow ¿2=2=\frac{4}{2}?$ El punto Q si pertenece a la recta r.

$¿\mathrm{R}\in r?\quad ¿\frac{0+1}{1}=\frac{4-3}{1}=\frac{2-1}{2}?\Rightarrow 1=1\neq\frac{1}{2}$ El punto R no pertenece a la recta r.

5B. a) En la sala de pediatría de un hospital el 70% de los pacientes son niñas. De los niños el 40% son menores de 36 meses y de las niñas el 30% tienen menos de 36 meses. Un pediatra entra en la sala y selecciona un paciente al azar. Calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Que no tenga menos de 36 meses. (0,75 puntos)

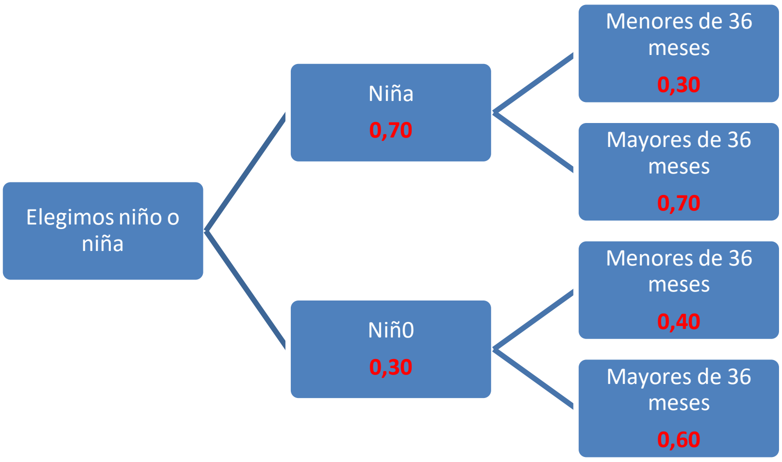
a2) Si el paciente resulta ser menor de 36 meses, que sea niña. (0,5 puntos)

b) En una de las pruebas de acceso al cuerpo de ingenieros de la Administración Pública se realiza un test de 100 ítems a 450 opositores. Cada ítem vale un punto y se supera la prueba si se obtienen al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los opositores siguen una distribución normal de media 60 puntos y desviación típica 10 puntos, calcula razonadamente:

b1) La probabilidad de obtener 75 o más puntos. (0,75 puntos)

b2) El número de opositores que obtuvieron menos de 75 puntos. (0,5 puntos)

a) Hagamos un diagrama de árbol que esquematice la situación.



a1)

P(No tenga menos de 36 meses) = P(Sea niña y mayor de 36 meses o sea niño y mayor de 36 meses) = P(Sea niña y mayor de 36 meses) + P(Sea niño y mayor de 36 meses) =

= P(Sea niña) · P(Sea mayor de 36 meses/ sea niña) + P(Sea niño) · P(Sea mayor de 36 meses / sea niño) = 0,7 · 0,7 + 0,3 · 0,6 = 0,49 + 0,18 = $\boxed{0{,}67}$

a2)

$$P\left(\text{Sea niña sabiendo que es menor de 36 meses}\right) = P\left(\text{Sea niña / Menor de 36 meses}\right) =$$

$$= \frac{P\left(\text{Sea niña } \cap \text{Menor de 36 meses}\right)}{P\left(\text{Menor de 36 meses}\right)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{1-0{,}67} = \frac{0{,}21}{0{,}33} = \boxed{0{,}64}$$

b)

b1)

Sea X = Puntuación en una oposición. X = N(60,10).

$$P\left(X \geq 75\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{X-60}{10} \geq \frac{75-60}{10}\right) = P\left(Z \geq 1{,}5\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z < 1{,}5\right) = 1 - 0{,}9332 = \boxed{0{,}0668}$$

b2)

$$P\left(X < 75\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{X-60}{10} < \frac{75-60}{10}\right) = P\left(Z < 1{,}5\right) = 0{,}9332 = 93{,}32\%$$

Como fueron 450 opositores sacaron menos de 75 puntos el 93,32% de los opositores, es decir, 450 · 0,93,32 = 419,94. Aproximadamente 420 opositores.