Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2020-2021

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**.
Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

PREGUNTAS

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comprobar la identidad $A^2 = 2A - I$. Utilizando la fórmula anterior, calcular A^4. (2 puntos)

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$: (1.25 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x + y = 1+\alpha \\ -3x-2y+\alpha z = -3-\alpha \\ (1+\alpha)x + y - z = 2 \end{array}\right\}.$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$. (0.75 puntos)

3. Dados los puntos A = (1, 2, 1), B = (0, 3, 1) y C = (1, 0, −1).

a) Hallar un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)

b) Hallar el área del triángulo que forman los puntos A, B y C. (1 punto)

4. Sea *r l*a recta determinada por el punto P = (0, −2, 3) y el vector $\vec{u}=(1,2,-1)$.

a) Hallar el plano Π paralelo a *r* y que contiene a la recta $\frac{x-2}{2}=y=z+1$. (1 punto)

b) Hallar el plano Π′ perpendicular a *r* y que pasa por el punto Q = (0, −2, 3). (1 punto)

5. Estudiar los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{ln(x)}{x}$ para $x > 0$.

(2 puntos)

6. Calcular los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función *f(x)* sea derivable en el punto $x = 1$. (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si\ x\le 1 \\ e^{1-x} & si\ x>1 \end{cases}$$

7. Calcular la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(2x-3)e^{2x}$ que cumpla $F(0)=0$. (2 puntos)

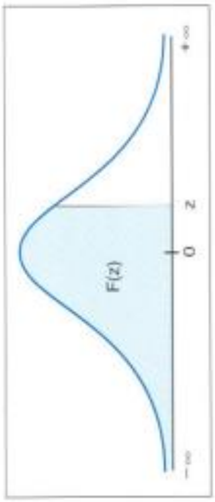
8. Dadas las funciones $f(x) = -2x - 4$ y $g(x) = -x^2 + 4$. Calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

9. En un instituto hay tres grupos de 2º de Bachillerato. El grupo 1 tiene 36 alumnos y han suspendido el 25 %, en el grupo 2 hay 40 alumnos y 8 de los alumnos han suspendido, y en el grupo 3 hay 30 alumnos todos aprobados. Si elegimos un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
a) Haya aprobado y sea del grupo 1. (1 punto)
b) Sabiendo que el alumno ha aprobado, que sea del grupo 2. (1 punto)

10. Una empresa cárnica produce cerdos y ha comprobado que el peso de los animales recién nacidos sigue una distribución normal de media 4,2 kg y desviación típica 0,5 kg. Calcular:
a) La probabilidad de que un animal elegido al azar pese entre 3,7 y 4,7 kg. (1 punto)
b) ¿Qué peso debería tener un animal recién nacido para que esté por encima del 30 % ? (1 punto)

Tabla de distribución normal $N(0,1)$

$F(z) = P(Z \le z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobar la identidad $A^2 = 2A - I$. Utilizando la fórmula anterior, calcular A^4. (2,5 puntos)

Calculo la expresión de cada miembro de la igualdad $A^2 = 2A - I$ y compruebo que se obtiene lo mismo.

$$A^2=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25-8-8 & -20+4+8 & 10-4-2 \\ 10-2-4 & -8+1+4 & 4-1-1 \\ -20+8+4 & 16-4-4 & -8+4+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A-I=2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que la matriz obtenida es la misma con las dos operaciones, lo que demuestra que $A^2 = 2A - I$.

Calculamos A^4 utilizando la igualdad demostrada.

$$A^4=A^2\cdot A^2=(2A-I)(2A-I)=2\cdot 2\cdot A^2-2A-2A+I^2=4A^2-4A+I=$$

$$=4(2A-I)-4A+I=8A-4I-4A+I=4A-3I$$

Sustituimos el valor de la matriz A e I y obtendremos fácilmente el valor de A^4.

$$A^4=4A-3I=4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}}$$

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$: (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} \alpha x + y = 1+\alpha \\ -3x-2y+\alpha z = -3-\alpha \\ (1+\alpha)x + y - z = 2 \end{array}\right\}.$$

Resolver el sistema para *a = 1*. (1 punto)

Tomamos la matriz de coeficientes A y averiguamos cuando su rango es 3 calculando su determinante y viendo cuando se anula.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -3 & -2 & \alpha \\ 1+\alpha & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ -3 & -2 & \alpha \\ 1+\alpha & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\alpha + \alpha + \alpha^2 + 0 - 0 - 3 - \alpha^2 = 3\alpha - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Distinguimos dos casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene solución única).

CASO 2. $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Utilizamos el método de Gauss para establecer si es incompatible o compatible indeterminado.

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ -3x-2y+z = -4 \\ 2x + y - z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} + 3 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ -3x \quad -2y \quad +z \quad = -4 \\ \underline{\;3x \quad +3y \qquad\quad = 6\;} \\ \qquad\quad y \quad +z \quad = 2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ 2x \quad +y \quad -z \quad = 2 \\ \underline{-2x \quad -2y \qquad = -4} \\ \qquad -y \quad -z \quad = -2 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ -y - z = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ -y \quad -z \quad = -2 \\ \underline{\;y \quad +z \quad = 2\;} \\ \qquad 0 \quad = 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ y + z = 2 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: para α = *1* el sistema tiene infinitas soluciones y para cualquier otro valor de α el sistema tiene solución única.

b) Lo terminamos de resolver siguiendo con el sistema equivalente obtenido en la discusión del sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ -3x-2y+z=-4 \\ 2x+y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ y+z=2 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=2 \\ y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=2-y \\ z=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=2-t \\ y=t \\ z=2-t \end{array}\right\}}$$

3. Dados los puntos A = (1, 2, 1), B = (0, 3, 1) y C = (1, 0, −1).
a) Hallar un vector unitario y ortogonal a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (1 punto)
b) Hallar el área del triángulo que forman los puntos A, B y C. (1 punto)

a) Un vector ortogonal es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,3,1)-(1,2,1)=(-1,1,0)\\ \overrightarrow{AC}=(1,0,-1)-(1,2,1)=(0,-2,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}$$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-2i+2k-2j=-2i-2j+2k=\boxed{(-2,-2,2)}$$

Para que sea unitario, es decir, de módulo 1 lo dividimos por su módulo.

$$\vec{u}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(-2,-2,2)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}}=\left(-\frac{2}{\sqrt{12}},-\frac{2}{\sqrt{12}},\frac{2}{\sqrt{12}}\right)=\boxed{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

b) El área del triángulo definido por los puntos A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=(-2,-2,2)$$

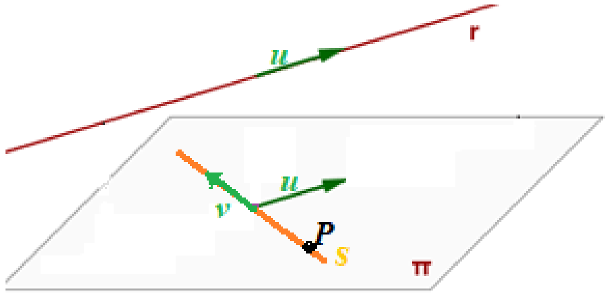
$$\text{Área del triángulo ABC}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2}=\boxed{\sqrt{3}=1.73\,u^2}$$

4. Sea r la recta determinada por el punto P (0, −2, 3) y el vector $\vec{u}=(1,2,-1)$.

a) Hallar el plano Π paralelo a r y que contiene a la recta $\frac{x-2}{2}=y=z+1$. (1,25 puntos)

b) Hallar el plano Π´ perpendicular a r y que pasa por el punto Q (0, −2, 3). (1,25 puntos)

a) Como el plano pedido es paralelo a la recta tiene como vector director el director de la recta $\vec{u}=(1,2,-1)$ y ademas, tiene como otro vector director el de la recta $\frac{x-2}{2}=y=z+1$ que es $\vec{v}=(2,1,1)$. Como contiene a la recta $\frac{x-2}{2}=y=z+1$ el punto P(2,0,–1) pertenece también al plano pedido.



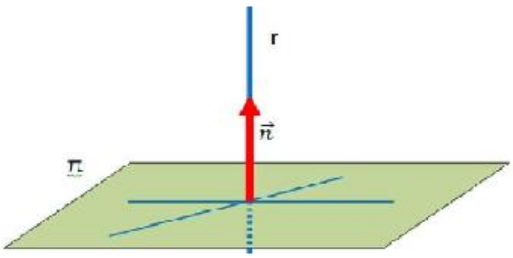
Hallamos la ecuación del plano pedido.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,2,-1)\\ \vec{v}=(2,1,1)\\ P(2,0,-1)\in\Pi\end{array}\right\}\Rightarrow \Pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z+1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-4-2y+z+1-4z-4-y+x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi\equiv 3x-3y-3z-9=0\Rightarrow \boxed{\Pi\equiv x-y-z-3=0}$$

b) Si el plano pedido es perpendicular a la recta r entonces su vector director $\vec{u}=(1,2,-1)$ es el vector normal del plano.



c)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\vec{u}=(1,2,-1)\\ Q\ (0,-2,3)\in\Pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\Pi'\equiv x+2y-z+D=0\\ Q\ (0,-2,3)\in\Pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 0-4-3+D=0\Rightarrow D=7\Rightarrow$$

$$\boxed{\Pi'\equiv x+2y-z+7=0}$$

5. Estudiar los extremos relativos de la función $f(x)=\dfrac{ln(x)}{x}$ para *x > 0*. (2,5 puntos)

Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{ln(x)}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow \boxed{x=e}$$

Calculamos la segunda derivada y comprobamos su signo en $x=e$.

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4}=\frac{-3x+2x\ln x}{x^4} \Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{-3+2\ln x}{x^3} \Rightarrow f''(e)=\frac{-3+2\ln e}{e^3}=\frac{-3+2}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$$

La función solo presenta un extremo relativo en $x=e$, siendo un máximo relativo, por ser el valor de su derivada segunda negativo.

Como $f(e)=\dfrac{ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$

Las coordenadas del punto que es máximo relativo son $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$

6. Calcular los valores de los parámetros a y b para que la siguiente función *f(x)* sea derivable en el punto *x = 1*. (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si\ x\leq 1 \\ e^{1-x} & si\ x>1 \end{cases}$$

Para ser derivable debe ser continua en *x = 1* y para ello deben de coincidir los límites laterales con el valor de la función en dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+b=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{1-x}=e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1$$

Al ser derivable deben de coincidir sus derivadas laterales.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b & si\ x\leq 1 \\ e^{1-x} & si\ x>1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2ax & si\ x<1 \\ -e^{1-x} & si\ x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2a \\ f'(1^+)=-e^{1-1}=-1 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\}\Rightarrow 2a=-1\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo en la ecuación obtenida al principio → $-\frac{1}{2}+b=1\Rightarrow b=\frac{3}{2}$

Los valores necesarios para que la función sea derivable en *x = 1* son $a=-\frac{1}{2}$ y $b=\frac{3}{2}$

7. Calcular la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(2x-3)e^{2x}$ que cumpla $F(0)=0$. (2 puntos)

Calculamos la primitiva *F(x)* de la función *f(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(2x-3)e^{2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=2x-3\rightarrow du=2dx\\ dv=e^{2x}dx\rightarrow v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=$$

$$=(2x-3)\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}2dx=2x\frac{1}{2}e^{2x}-3\frac{1}{2}e^{2x}-\int e^{2x}dx=$$

$$=xe^{2x}-\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}=\boxed{xe^{2x}-2e^{2x}+K}$$

Como $F(0)=0$, entonces:

$$\left.\begin{array}{r}F(x)=xe^{2x}-2e^{2x}+K\\ F(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=0\cdot e^{0}-2\cdot e^{0}+K\Rightarrow -2+K=0\Rightarrow K=2$$

La primitiva buscada es $F(x)=xe^{2x}-2e^{2x}+2$

8. Dadas las funciones $f(x) = -2x-4$ y $g(x) = -x^2+4$. Calcular el área de la región limitada por sus gráficas. (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -2x-4 \\ g(x) = -x^2+4 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -2x-4 = -x^2+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4(-8)}}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2\pm\sqrt{36}}{2} = \begin{cases} \frac{2+6}{2} = \boxed{4=x} \\ \frac{2-6}{2} = \boxed{-2=x} \end{cases}$$

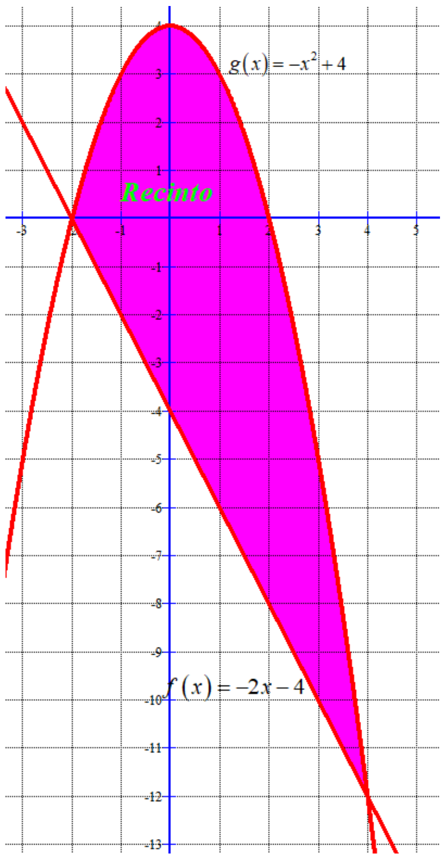
La región limitada por las gráficas de las funciones empieza en *x = –2* y acaba en *x = 4.* El área de dicho recinto es el valor absoluto de la integral definida entre –2 y 4 de la diferencia de las funciones.

$$Área = \left| \int_{-2}^{4} -x^2+4-(-2x-4)\,dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{4} -x^2+2x+8dx \right| = \left| \left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x \right]_{-2}^{4} \right| =$$

$$= \left| \left[-\frac{4^3}{3}+4^2+32 \right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2-16 \right] \right| =$$

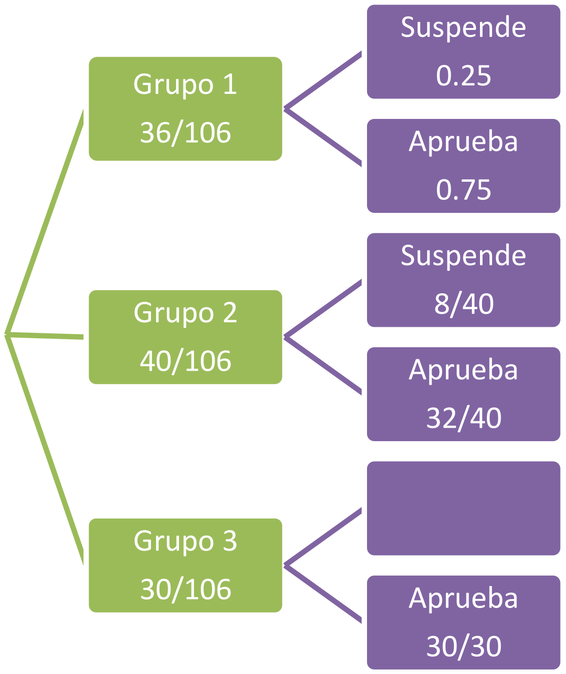
$$= \left| -\frac{64}{3}+48-\frac{8}{3}-4+16 \right| = \boxed{\frac{108}{3} = 36\,u^2}$$



9. En un instituto hay tres grupos de 2º de Bachillerato. El grupo 1 tiene 36 alumnos y han suspendido el 25 %, en el grupo 2 hay 40 alumnos y 8 de los alumnos han suspendido, y en el grupo 3 hay 30 alumnos todos aprobados. Si elegimos un alumno al azar, calcular la probabilidad de que:
a) Haya aprobado y sea del grupo 1. (1,25 puntos)
b) Sabiendo que el alumno ha aprobado, que sea del grupo 2. (1,25 puntos)

El total de alumnos entre los tres grupos es de 36 + 40 + 30 = 106 alumnos.

Realizamos un diagrama de árbol.



Atendiendo a lo que refleja el diagrama respondemos a lo planteado.

a) $P(Aprobado \cap Grupo1) = P(Grupo1)P(Aprobado / Grupo1) = \frac{36}{106} \cdot 0.75 = \boxed{0.2547}$

b)

$$P(Grupo2 / Aprobado) = \frac{P(Grupo2 \cap Aprobado)}{P(Aprobado)} =$$

$$= \frac{P(Grupo2)P(Aprobado / Grupo2)}{P(Aprobado)} =$$

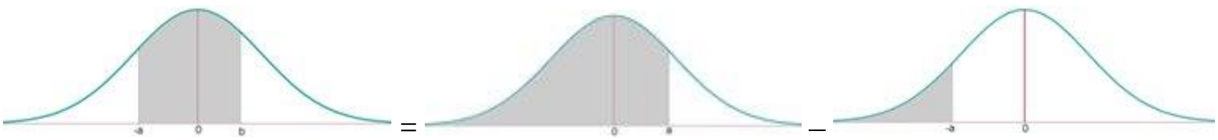
$$= \frac{\frac{40}{106} \cdot \frac{32}{40}}{\frac{36}{106} \cdot 0.75 + \frac{40}{106} \cdot \frac{32}{40} + \frac{30}{106} \cdot \frac{30}{30}} = \frac{\frac{32}{106}}{\frac{27+32+30}{106}} = \boxed{\frac{32}{89} = 0.3595}$$

10. Una empresa cárnica produce cerdos y ha comprobado que el peso de los animales recién nacidos sigue una distribución normal de media 4,2 kg y desviación típica 0,5 kg. Calcular:
a) La probabilidad de que un animal elegido al azar pese entre 3,7 y 4,7 kg. (1,25 puntos)
b) ¿Qué peso debería tener un animal recién nacido para que esté por encima del 30 %? (1,25 puntos)

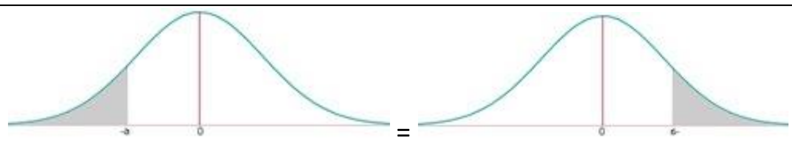
X = Peso de un animal recién nacido. X = N(4.2, 0.5)

a)

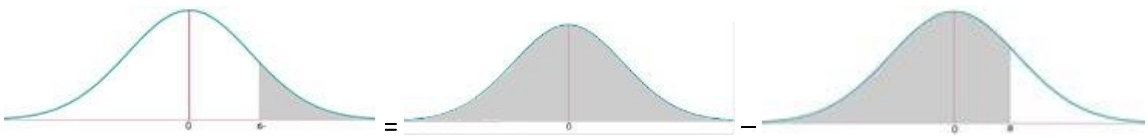
$$P(3,7 \le X \le 4,7) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{3,7-4,2}{0,5} \le Z \le \frac{4,7-4,2}{0,5}\right) = P(-1 \le Z \le 1) =$$



$$= P(Z \le 1) - P(Z \le -1) = \ldots$$



$$P(Z \le -1) = P(Z \ge 1)$$



$$P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1)$$

$$\ldots = P(Z \le 1) - [1 - P(Z \le 1)] = \{\text{Miro la tabla}\} =$$

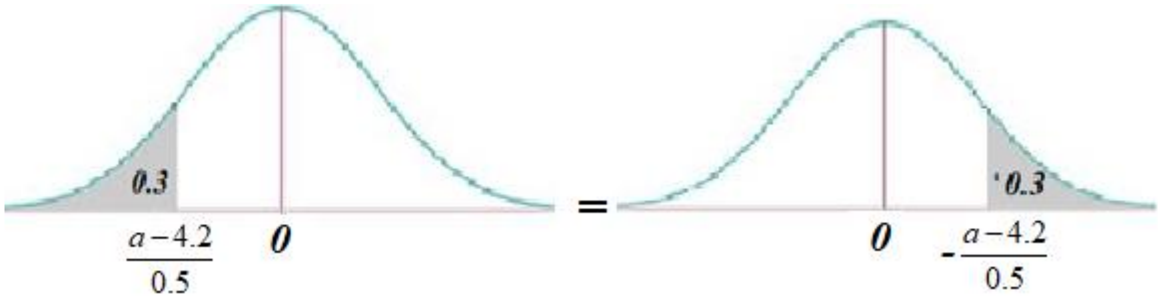
z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413

$$= 0,8413 - [1 - 0,8413] = \boxed{0,6826}$$

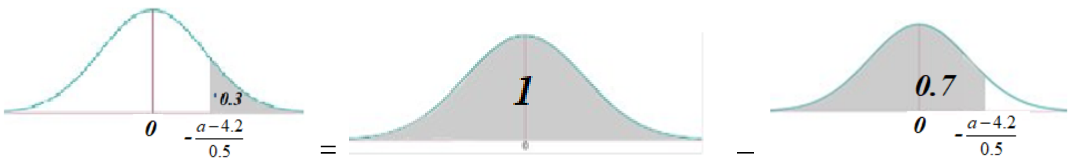
b) Llamamos al peso "a". Se debe cumplir que $P(X \le a) = 30\% = 0.3$.

Tipificamos y tenemos que hallar cuando $P(X \le a) = P\left(Z \le \frac{a-4.2}{0.5}\right) = 0.3$

Como 0.3 es menor que 0.5 el valor $\frac{a-4.2}{0.5}$ es más pequeño que la media 0. Y ese valor de probabilidad 0.3 no aparece en la tabla de la N(0,1).
Debemos de ajustar a otro valor mayor que la media que podamos buscar en la tabla.



$$P\left(X \le \frac{a-4.2}{0.5}\right) = P\left(X \ge -\frac{a-4.2}{0.5}\right)$$



$$P\left(X \ge -\frac{a-4.2}{0.5}\right) = 1 - P\left(X \le -\frac{a-4.2}{0.5}\right)$$

Resumiendo: $P\left(X \le \frac{a-4.2}{0.5}\right) = 0.3 \Rightarrow P\left(X \le -\frac{a-4.2}{0.5}\right) = 0.7$
Ahora si podemos buscar en la tabla de la N(0, 1) el valor de probabilidad 0.7.

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019

$$-\frac{a-4.2}{0.5} = 0.525 \Rightarrow -a + 4.2 = 2.625 \Rightarrow \boxed{a = 4.2 - 2.625 = 1.575}$$

El peso que debería tener un animal recién nacido para que esté por encima del 30 % es de 1.575 kg