Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade **Código: 20**

CONVOCATORIA ORDINARIA 2020

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. **Números y Álgebra:**
   a. Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A + I es invertible despeja X en la ecuación $A-X=AX$
   b. Si $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ calcula X tal que $A-X=AX$.

2. **Números y Álgebra:**

   Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ my+(3-m)z=-6 \\ 2x-y+mz=6 \end{cases}$

3. **Análisis**
   a. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty) \end{cases}$, diga que relación tiene que existir entre a y b para que *f* sea continua y cuales tienen que ser sus valores para que *f* sea derivable.

   b. Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta x = 4 y la gráfica de $f(x)=\begin{cases} \ln x & si \quad x\in(0,e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x\in(e,\infty) \end{cases}$

4. **Análisis:**
   a. De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y=4-x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
   b. Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

5. **Geometría:**
   a. Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1: mx-y+2=0$ y $\pi_2: 2x+3y=0$ en función del parámetro *m*.
   b. Obtenga la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0,0,0), B(1,0,1) y C(0,1,0).

6. **Geometría:**

a. Obtenga la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1,–3,0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$

b. Calcule la distancia del punto Q(1,1,1) al plano $\pi : -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

7. Estadística y Probabilidad:

El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

8. Estadística y Probabilidad:

En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:
a. Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A + I es invertible despeja X en la ecuación $A-X=AX$
b. Si $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ calcula X tal que $A-X=AX$.

a. $A-X=AX \Rightarrow A=AX+X \Rightarrow A=(A+I)X$

Como A + I es invertible, existe $(A+I)^{-1}$ y se cumple:

$A=(A+I)X \Rightarrow (A+I)^{-1}A=(A+I)^{-1}(A+I)X \Rightarrow (A+I)^{-1}A=I\cdot X=X$

$\boxed{X=(A+I)^{-1}A}$

b. Si $A-X=AX$ entonces $X=(A+I)^{-1}A$. Para hallar X utilizando esta igualdad necesitamos obtener $(A+I)^{-1}$:

$$A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

$|A+I|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4+1=5\neq 0 \Rightarrow$ La matriz $A+I$ es invertible.

$$(A+I)^{-1}=\frac{Adj\left(A+I\right)^T}{|A+I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{pmatrix}}{5}=\frac{\begin{pmatrix}+4 & -(-1)\\ -1 & +1\end{pmatrix}}{5}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo que:

$$X=(A+I)^{-1}A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0+1 & -4+3\\ 0+1 & 1+3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discute, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ my + (3-m)z = -6 \\ 2x - y + mz = 6 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \text{ y su determinante vale}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 2(3-m) + 0 - \left(6m + 0 - 2(3-m)\right) = 2m^2 - 6m$$

Si igualamos a cero:

$$2m^2 - 6m = 0 \Rightarrow 2m(m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

Distinguiremos tres casos diferentes:

CASO 1. $m \neq 0; \quad m \neq 3$

El rango de la matriz A es 3 al igual que el de la ampliada e igual al número de incógnitas. En este caso el sistema tiene solución única (**Sistema Compatible Determinado**)

CASO 2. $m = 0$

El sistema quedaría:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Que se puede resolver:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \boxed{z = -2} \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3(-2) = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 6 = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 6}$$

El sistema tiene infinitas soluciones:

$\begin{cases} x = x \\ y = 2x - 6 \\ z = -2 \end{cases}$ Es un **sistema compatible indeterminado**

CASO 3. $m = 3$

El sistema quedaría:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 3y = -6 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, ya que la primera y la tercera ecuación no se pueden cumplir al mismo tiempo. **Sistema Incompatible**

3. Análisis

a. Dada la función $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$, diga que relación tiene que existir entre a y b para que *f* sea continua y cuales tienen que ser sus valores para que *f* sea derivable.

b. Calcular el área encerrada entre el eje X, la recta x = 4 y la gráfica de

$$f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$$

a. Si la función $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$ es continua debe cumplirse que:

- $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}(ax+b)=a\cdot e+b$
- $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}(\ln x)=\ln e=1$
- Existe f(e) = lne = 1
- Los tres valores son iguales → $a\cdot e+b=1$

  Para que la función sea ***continua*** los parámetros a y b deben cumplir $\boxed{a\cdot e+b=1}$

La función $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ ax+b & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$ es derivable en los valores distintos de x = e y su derivada es $f\,'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & si \quad x\in(0,e) \\ a & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$.

También debe serlo en x = e y debe cumplirse que:

$f\,'(e^+)=f\,'(e^-)\Rightarrow \dfrac{1}{e}=a\Rightarrow a=\dfrac{1}{e}$ y como debe ser continua, se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot e+b=1 \\ a=\dfrac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{e}\cdot e+b=1\Rightarrow 1+b=1\Rightarrow b=0$$

Para que la función sea ***derivable*** los parámetros a y b deben cumplir $\boxed{b=0}$ y $\boxed{a=\dfrac{1}{e}}$

b. Averigüemos los puntos de corte con el eje X de la función $f(x)=\begin{cases}\ln x & si \quad x\in(0,e] \\ \dfrac{x}{e} & si \quad x\in(e,\infty)\end{cases}$

- Lnx = 0 →x = 1 que pertenece al intervalo (0, e]
- $\dfrac{x}{e}=0\Rightarrow x=0$ que no pertenece al intervalo (e,∞)

Por lo que el área pedida es la integral definida entre 1 y 4 de la función *f(x),* como en ese intervalo está incluido el valor x = e, separamos la integral definida en dos:

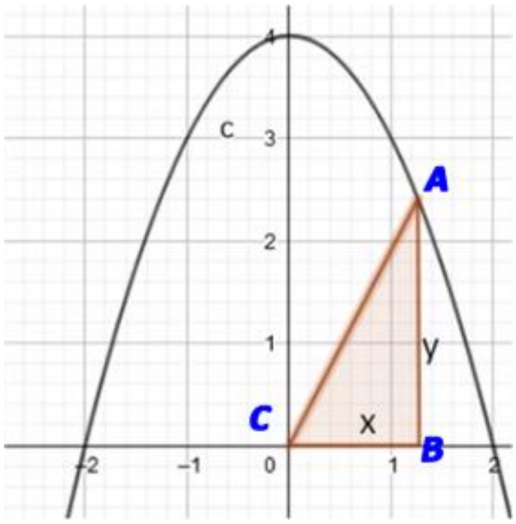
$$\acute{A}rea=\left|\int_1^e f(x)\,\mathrm{dx}\right|+\left|\int_e^4 f(x)dx\right|=\left|\int_1^e \mathrm{lnxdx}\right|+\left|\int_e^4 \frac{x}{e}dx\right|=\left|\left[x\left(\ln x-1\right)\right]_1^e\right|+\left|\left[\frac{x^2}{2e}\right]_e^4\right|=$$

$$=\left|\left(\mathrm{e(lne-1)}\right)-\left(1\cdot(\ln 1-1)\right)\right|+\left|\left(\frac{4^2}{2e}\right)-\left(\frac{e^2}{2e}\right)\right|=1+\left|\frac{16-e^2}{2e}\right|=1+\left|\frac{16}{2e}-\frac{e^2}{2e}\right|=\boxed{1+\frac{8}{e}-\frac{e}{2}\,u^2=2,58\,u^2}$$

4. Análisis:
a. De entre todos los triángulos rectángulos contenidos en el primer cuadrante que tienen un vértice en el origen, otro sobre la parábola $y = 4 - x^2$, un cateto sobre el eje X y el otro paralelo al eje Y, obtén los catetos y la hipotenusa de aquel cuya área es máxima.
b. Enuncia el teorema de Bolzano y Rolle.

a) Dibujemos la parábola y situamos el vértice en el origen y los catetos como se indica. La situación planteada queda

x	$y = 4 - x^2$
-2	0
-1	3
0	4
2	0



El vértice A situado en la parábola tiene coordenadas $\left(x, 4-x^2\right)$. El vértice B tiene coordenadas $\left(x, 0\right)$ y el C(0,0).

El área del triángulo depende del valor x y su expresión es:

$$f(x) = \frac{x\left(4-x^2\right)}{2} = \frac{4x - x^3}{2}$$

Hallemos su máximo haciendo uso de la derivada.

$$f(x) = \frac{4x - x^3}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4 - 3x^2}{2}$$

Igualamos a cero

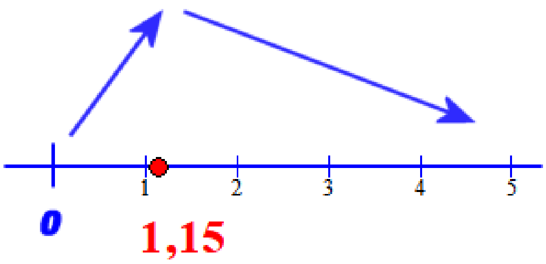
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4-3x^2}{2} = 0 \Rightarrow 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4}{3}} = 1{,}15$$

Solo nos sirve el valor positivo de la raíz. Veamos el signo de la derivada antes y después de 1,15.

En $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos el valor x = 1 y la derivada vale $f'(1) = \frac{4 - 3 \cdot 1^2}{2} = \frac{1}{2} > 0$

La función crece en $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$ tomamos el valor x = 2 y la derivada vale $f'(2) = \frac{4 - 3 \cdot 2^2}{2} = \frac{-8}{2} = -4 < 0$ La función decrece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right)$



El área alcanza un valor máximo en $x=\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$. Los catetos son $x=\sqrt{\frac{4}{3}}=1{,}15$

$y=4-x^2=4-\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$ y la hipotenusa

$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{12}{9}+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{76}{9}}=\frac{\sqrt{76}}{3}$.

Resumiendo los catetos son $x=\sqrt{\frac{4}{3}}$; $y=\frac{8}{3}$. La hipotenusa es $\frac{\sqrt{76}}{3}$

5. Geometría:
a. Estudie la posición relativa de los planos $\pi_1 : mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$ en función del parámetro *m*.
b. Obtenga la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A(0,0,0), B(1,0,1) y C(0,1,0).

a. Su posición relativa depende, en gran parte de sus vectores normales. Veamos si son proporcionales (planos paralelos o coincidentes)

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : mx - y + 2 = 0 \\ \pi_2 : 2x + 3y = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1} = (m, -1, 0) \\ \overrightarrow{n_2} = (2, 3, 0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} // \overrightarrow{n_2} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{-1}{3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{m}{2} = \frac{-1}{3} \Rightarrow m = \frac{-2}{3} \\ \frac{-1}{3} = \frac{0}{0} \Rightarrow 0 = 0\end{array}\right.$$

Hay dos casos diferentes:

CASO 1. $m \neq \frac{-2}{3}$. En este caso los vectores no son proporcionales y por tanto los planos no son ni coincidentes ni paralelos, es decir, se cortan.

CASO 2. $m = \frac{-2}{3}$. En este caso los vectores normales son proporcionales y por tanto los planos o son coincidentes o paralelos.

Nuestros planos quedarían con ecuaciones: $\pi_1 : \frac{-2}{3}x - y + 2 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$.

Cambiando el signo y quitando denominadores en la ecuación del primer plano: $\pi_1 : 2x + 3y - 6 = 0$ y $\pi_2 : 2x + 3y = 0$. Estos planos son paralelos, pues tienen vectores normales proporcionales y la constante es distinta (–6 ≠ 0).

b. La ecuación implícita del plano que pasa por 3 puntos se obtiene a partir de uno de esos puntos y dos vectores que unan dichos puntos:

$$\left.\begin{array}{l}A(0,0,0) \\ B(1,0,1) \\ C(0,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A(0,0,0) \\ \overrightarrow{AB} = (1,0,1) - (0,0,0) = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,0) - (0,0,0) = (0,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\pi : 0 + 0 + z - (0 + 0 + x) = 0$

$\pi : z - x = 0$

$\boxed{\pi : x - z = 0}$

6. Geometría:
a. Obtenga la ecuación implícita del plano que pasa por el punto P(1,–3,0) y es perpendicular a la recta $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-z=0 \end{cases}$

b. Calcule la distancia del punto Q(1,1,1) al plano $\pi: -x+y+z+4=0$ y el punto simétrico de Q respecto de π.

a. El plano pedido es perpendicular a la recta, por lo que tiene como vector normal el director de dicha recta. Averigüemos dicho vector director haciendo el producto vectorial de los normales de los planos que la definen:

$$\vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i+k-(-j+2i) = -i+j+k = (-1,1,1)$$

El plano pedido tiene vector normal $\vec{n} = (-1,1,1)$ y su ecuación es $\pi: -x+y+z+D=0$, como además pasa por el punto P(1,–3,0), debe cumplirse:

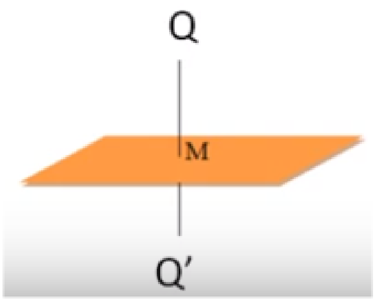
–1 – 3 + 0 + D = 0 → D = 4

El plano es $\boxed{\pi: -x+y+z+4=0}$

b. Utilicemos la fórmula de la distancia:

$$d(Q,\pi) = \left| \frac{-1+1+1+4}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}} \right| = \frac{5}{\sqrt{3}}\ u$$

Llamemos Q´ al simétrico de Q(1,1,1) respecto del plano $\pi: -x+y+z+4=0$.



Y llamamos M al punto de corte del plano π con la recta que contiene a Q y Q´.

Esta recta tiene como vector director el normal del plano $\vec{v_r} = (-1,1,1)$ y pasa por Q(1,1,1), por lo que su ecuación es $r: \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1+\alpha \end{cases}$

El punto M está en la recta, luego M($1-\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha$)

El punto M está en el plano $\pi: -x+y+z+4=0$, luego se cumple:

$$-(1-\alpha)+(1+\alpha)+(1+\alpha)+4=0 \Rightarrow 3\alpha=-5 \Rightarrow \alpha=\frac{-5}{3}$$

El punto M tiene coordenadas $M\left(\frac{8}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

Como M es el punto medio del segmento QQ´ entonces:

$$M=\frac{Q+Q'}{2}\Rightarrow 2M=Q+Q'\Rightarrow 2M-Q=Q'$$

$$Q'=2\left(\frac{8}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3}\right)-(1,1,1)=\left(\frac{16}{3},\frac{-4}{3},\frac{-4}{3}\right)-(1,1,1)=\left(\frac{13}{3},\frac{-7}{3},\frac{-7}{3}\right)$$

$$\boxed{Q'=\left(\frac{13}{3},\frac{-7}{3},\frac{-7}{3}\right)}$$

7. Estadística y Probabilidad:
El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si se elige al azar a un habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni camelias ni rosas; de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamente tenga rosas o solamente tenga camelias.

Construyamos una tabla de contingencia que nos aclare la situación:

	Tiene rosas	No tiene rosas	
Tiene camelias	**21 %**		**40 %**
No tiene camelias			
	35 %		**100 %**

Completando la tabla:

	Tiene rosas	No tiene rosas	
Tiene camelias	**21 %**	**19 %**	**40 %**
No tiene camelias	**14%**	**46 %**	**60 %**
	35 %	**65%**	**100 %**

Calculemos las probabilidades pedidas usando la información de la tabla:

P(Tenga camelias o rosas) = 21 + 19 +14 = 54 % = 0,54

P(No tenga ni camelias ni rosas) = 46 % = 0,46

P(Tenga camelias, sabiendo que tiene rosas) = $\frac{21}{35} = 0,6$

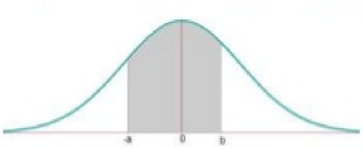
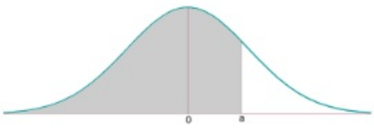
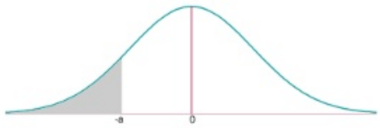
P(Tenga rosas, sabiendo que tiene camelias) = $\frac{21}{40} = 0,525$

P(Solamente tenga rosas o solamente tenga camelias) = P(Tiene rosas y no camelias) + P(Tiene camelias y no rosas) = 14 + 19 =33 % = 0,33

8. Estadística y Probabilidad:
En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25º C y desviación típica 4º C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21ºC y 27.2ºC. ¿En cuántos días del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

X = N(25, 4)

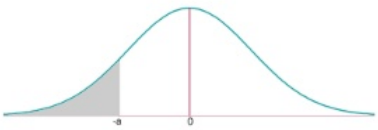
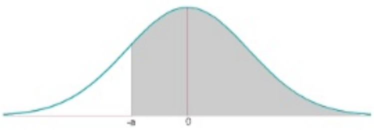
$P(21 < X < 27.2) = P(X < 27.2) - P(X < 21) =$

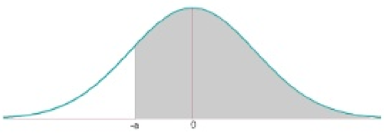
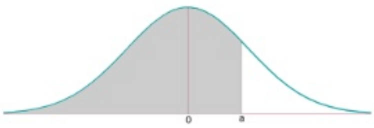
 =  – 

Tipificamos la variable:

$$P(X < 27.2) - P(X < 21) = P\left(\frac{X-25}{4} < \frac{27.2-25}{4}\right) - P\left(\frac{X-25}{4} < \frac{21-25}{4}\right) =$$

$$= P(Z < 0{,}55) - P(Z < -1) =$$

Como  = 1 – 

Y  = 

$$= P(Z < 0{,}55) - (1 - P(Z < 1)) =$$

Buscamos en la tabla de la N(0, 1) y queda:

$$P(21 < X < 27.2) = 0.7088 - (1 - 0.8413) = 0.5501$$

0.5501 es la probabilidad de que un día el rango de temperaturas sea el indicado.

¿Cuántos días de un mes de 31 días va a pasar esto?

$$0.5501 \cdot 31 = 17.0531$$

Aproximadamente 17 días.