	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2020-2021** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2,5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.
b) (0.75 puntos) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.
c) (1.25 puntos) Para $x = 1$, calcular $(AB^t)^{2020}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & si\ x \le 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & si\ x > 1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de *f*.
b) (1 punto) Halla las asíntotas de *f*.
c) (1 punto) Determina el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $\frac{-1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Se consideran los puntos A(3, 1, 2), B(0, 3, 4) y P(–1, 1, 0). Se pide:

a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta *r* que contiene a A y P, y de la recta *s* que contiene a B y al punto C(2, –1, –2).
c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un instituto uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X = 0)$.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y el vector $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinar el valor o valores de a para los que se verifica:

a) (0.5 puntos) $B^t\,(A + A^t)B = 6$:
b) (1.0 puntos) El sistema de $AX = B$ no tiene solución.
c) (1.0 puntos) $A = A^{-1}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=x^6-4x^4$, se pide:

a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos locales, y determinar si son o no globales.
c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje $y = 0$ y la gráfica de f.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta s.
b) (0.5 punto) Determinar la posición relativa de r y s.
c) (1.25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una médico experto diagnóstica posibles enfermos de una dolencia, fallando en reconocerla en el 5% de los casos que la padecen y diagnosticándola equivocadamente en el 10% de los sanos. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad es padecida por 50 de cada diez mil personas. Si una persona al azar se somete a reconocimiento, calcule la probabilidad de:

a) (0.5 puntos) Que sea diagnosticada como enferma.
b) (1 punto) Que esté enferma si la diagnostican como tal.
c) (0.5 puntos) Que no esté enferma si la diagnostican sana.
d) (0.5 puntos) Que sea mal diagnosticada.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales A tiene inversa.
b) (0.75 puntos) Para $x = -1$, calcular la inversa de A.
c) (1.25 puntos) Para $x = 1$, calcular $(AB^t)^{2020}$.

a) A tiene inversa si su determinante no vale cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & x-1 \\ x+1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0+(x-1)(x+1)+0-0-3-0 = x^2-1-3 = x^2-4$$

$$|A| = 0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de x distinto de 2 y –2.

b) Para $x = -1$ la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -3 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) Para $x = 1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos AB^t, su cuadrado y su cubo en busca de una regla que permita deducir como es la potencia 2020.

$$AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(AB^t\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(AB^t\right)^3 = \left(AB^t\right)^2 AB^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

Como 2020 = 3 · 673 + 1 tenemos que:

$$\left(AB^t\right)^{2020} = \left[\left(AB^t\right)^3\right]^{673} \cdot AB^t = \left[-Id\right]^{673} \cdot AB^t = -Id \cdot AB^t = -AB^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} & si\ x\leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & si\ x>1 \end{cases}$$

a) (0.5 puntos) Estudia la continuidad de *f*.
b) (1 punto) Halla las asíntotas de *f*.
c) (1 punto) Determina el valor de $x_0 < 1$ que verifica que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente $\frac{-1}{2}$. Escribe la ecuación de dicha recta tangente.

a) En el intervalo $(-\infty,1)$ la función es $f(x)=\frac{2}{x+1}$. Esta función es continua salvo en $x=-1$ que anula el denominador.
En el intervalo $(1.+\infty)$ la función es $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$. Esta función es continua pues existe el logaritmo neperiano ($x > 0$) y el denominador se anula en $x = 1$ que no pertenece a este intervalo.

Estudiemos la continuidad en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{2}{1+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x+1}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x-1}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=1\Rightarrow \text{Es continua en } x=1$$

f(x) es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$.

b)
Asíntota vertical. $x=-1$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{0}=\infty$$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x+1}=\frac{2}{\infty}=0$$

La asíntota horizontal es $y=0$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener una asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo:

La función tiene una asíntota vertical → $x=-1$ y una asíntota horizontal → $y=0$

c) Si la pendiente de la recta tangente es $\frac{-1}{2}$ la derivada debe tomar ese valor. Y como buscamos un valor menor que 1 la función es $f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}$. Calculamos su derivada e igualamos a cero.

$$f\left(x\right)=\frac{2}{x+1}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{-2}{\left(x+1\right)^2}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{-1}{2}\Rightarrow\frac{-2}{\left(x+1\right)^2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow -4=-\left(x+1\right)^2\Rightarrow 4=\left(x+1\right)^2\Rightarrow\begin{cases}x+1=2\Rightarrow x=1\\ x+1=-2\Rightarrow x=-3\end{cases}$$

De los dos valores obtenidos solo es valido $x = -3$ pues es el único menor que 1.

$$f\left(-3\right)=\frac{2}{-3+1}=\frac{2}{-2}=-1 \text{ y } f'\left(-3\right)=\frac{-1}{2}$$

$$y-\left(-1\right)=-\frac{1}{2}\left(x-\left(-3\right)\right)\Rightarrow y+1=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-1$$

Recta tangente en $x=-3$ es $\boxed{y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}}$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se consideran los puntos A(3, 1, 2), B(0, 3, 4) y P(–1, 1, 0). Se pide:
a) (0.75 puntos) Determinar las coordenadas de un punto Q sabiendo que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes, tienen sentidos opuestos y tienen el mismo módulo.
b) (1 punto) Determinar las coordenadas del punto de intersección de la recta *r* que contiene a A y P, y de la recta *s* que contiene a B y al punto C(2, –1, –2).
c) (0.75 puntos) Calcular el coseno del ángulo formado por $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$.

a) $\overrightarrow{AB}=(0,3,4)-(3,1,2)=(-3,2,2)$.

$Q(a,b,c)\Rightarrow \overrightarrow{PQ}=(a,b,c)-(-1,1,0)=(a+1,b-1,c)$

Si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes entonces sus coordenadas son proporcionales. Si además son de sentidos opuestos y con el mismo módulo entonces tienen las mismas coordenadas, pero cambiadas de signo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(-3,2,2)\\ \overrightarrow{PQ}=(a+1,b-1,c)\\ \overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+1,b-1,c)=-(-3,2,2)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}a+1=3\rightarrow \boxed{a=2}\\ b-1=-2\rightarrow \boxed{b=-1}\Rightarrow \boxed{Q(2,-1,-2)}\\ \boxed{c=-2}\end{array}\right.$$

b) Hallamos las ecuaciones de las rectas.

$$A(3,\ 1,\ 2)\ y\ P(-1,\ 1,\ 0)\Rightarrow \overrightarrow{AP}=(-1,\ 1,\ 0)-(3,\ 1,\ 2)=(-4,0,-2)$$

$$r\equiv \left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=\overrightarrow{AP}=(-4,0,-2)\\ A(3,\ 1,\ 2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=3-4t\\ y=1\\ z=2-2t\end{array}\right.$$

$$B(0,\ 3,\ 4)\ y\ C(2,-1,-2)\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(2,-1,-2)-(0,3,4)=(2,-4,-6)$$

$$s\equiv \left.\begin{array}{l}\vec{v}_s=\overrightarrow{BC}=(2,-4,-6)\\ B(0,\ 3,\ 4)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=3-4\lambda\\ z=4-6\lambda\end{array}\right.$$

Encuentro el punto de intersección resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}s\equiv\left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=3-4\lambda\\ z=4-6\lambda\end{array}\right.\\ r\equiv\left\{\begin{array}{l}x=3-4t\\ y=1\\ z=2-2t\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\lambda=3-4t\\ 3-4\lambda=1\\ 4-6\lambda=2-2t\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2\lambda=3-4t\\ \lambda=\dfrac{1-3}{-4}=\dfrac{1}{2}\\ 4-6\lambda=2-2t\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 3 - 4t \\ 4 - 3 = 2 - 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 = -4t \\ -1 = -2t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 4\frac{1}{2} = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 - 2\frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

El punto intersección es $M(1,1,1)$

c) $A(3,\ 1,\ 2)\ y\ P(-1,\ 1,\ 0) \Rightarrow \overrightarrow{PA} = (3,\ 1,\ 2) - (-1,\ 1,\ 0) = (4,0,2)$

$B(0,3,4)\ y\ P(-1,\ 1,\ 0) \Rightarrow \overrightarrow{PB} = (0,3,4) - (-1,1,0) = (1,2,4)$

$$\cos\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}\right) = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA}}{\left|\overrightarrow{PB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PA}\right|} = \frac{(1,2,4)(4,0,2)}{\sqrt{1^2+2^2+4^2}\sqrt{4^2+0^2+2^2}} = \frac{4+8}{\sqrt{21}\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{420}} = \boxed{\frac{\sqrt{420}}{35}}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un instituto uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que practican baloncesto. Se pide:
a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular *P(X = 0)*.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

a) **X = N**úmero de estudiantes que practican baloncesto en un grupo de 6**.**

Como la probabilidad de que un alumno practique baloncesto es igual a 1/4. Es igual para los seis elegidos. X es una variable binomial con parámetros *n = 6* y *p = 0.25*.
La probabilidad de no practicar baloncesto es *q = 1 – 0.25 = 0.75.*

$$P(X=0)=\binom{6}{0}0.25^0\cdot 0.75^6=\boxed{0.18}$$

b) $P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)=\binom{6}{5}0.25^5\cdot 0.75^1+\binom{6}{6}0.25^6\cdot 0.75^0=\boxed{0.004638}$

c) $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{6}{0}0.25^0\cdot 0.75^6=\boxed{0.82}$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ a & -3 & a\\ a-1 & -3 & a\end{pmatrix}$ y el vector $B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, determinar el valor o valores de a para los que se verifica:

a) (0.5 puntos) $B^t\,(A+A^t)B=6$:

b) (1.0 puntos) El sistema de $AX=B$ no tiene solución.

c) (1.0 puntos) $A=A^{-1}$.

a) Obtenemos la expresión de $B^t\,(A+A^t)B$.

$$B^t\left(A+A^t\right)B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ a & -3 & a\\ a-1 & -3 & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a & a-1\\ 1 & -3 & -3\\ -1 & a & a\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a+1 & a-2\\ a+1 & -6 & a-3\\ a-2 & a-3 & 2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+1+2a-4 & -6+2a-6 & a-3+4a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=$$

$$1\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 3\longrightarrow 1\times 3$$

$$=\begin{pmatrix}3a-3 & 2a-12 & 5a-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\left(2a-12+10a-6\right)=12a-18$$

$$1\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 1\longrightarrow 1\times 1$$

Para que sea igual a 6 se debe cumplir $12a-18=6$ → $12a=24$ → $\boxed{a=2}$

b) Este sistema no tiene solución cuando el determinante de A es nulo.

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ a & -3 & a\\ a-1 & -3 & a\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ a & -3 & a\\ a-1 & -3 & a\end{vmatrix}=a^2-a+3a-3a+3-a^2=-a+3$$

$$|A|=0\Rightarrow -a+3=0\Rightarrow\boxed{a=3}$$

Para $a=3$ la matriz A es $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 3\\ 2 & -3 & 3\end{pmatrix}$. El rango de A es 2 pues su determinante es nulo (rango de A menor que 3) y el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3\neq 0$.

Y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango 3 pues el menor que resulta de quitar la 2ª columna (proporcional a la 3ª) tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2+6=4\neq 0$.

Rango A = 2 ≠ 3 = Rango A/B → Sistema incompatible para $a = 3$.

c)

Si $A = A^{-1}$ entonces $A \cdot A = A^{-1} \cdot A$ → $A \cdot A = Id$.

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-a+1 & -3+3 & a-a \\ -3a+a^2-a & a+9-3a & -a-3a+a^2 \\ -3a+a^2-a & a-1+9-3a & 1-a-3a+a^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 8-2a & a^2-4a+1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = Id \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2-4a & 9-2a & a^2-4a \\ a^2-4a & 8-2a & a^2-4a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-4a=0 \to a(a-4)=0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=4 \end{cases} \\ 9-2a=1 \to -2a=-8 \to a=4 \\ 8-2a=0 \to -2a=-8 \to a=4 \\ a^2-4a+1=1 \to a^2-4a=0 \to \begin{cases} a=0 \\ a=4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=4}$$ Solo con este valor se cumple todo.

El valor buscado es $a = 4$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=x^6-4x^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) (1 punto) Encontrar sus máximos y mínimos locales, y determinar si son o no globales.
c) (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por el eje *y = 0* y la gráfica de *f*.

a) Consideramos su derivada y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x^6-4x^4 \Rightarrow f\,'(x)=6x^5-16x^3$$

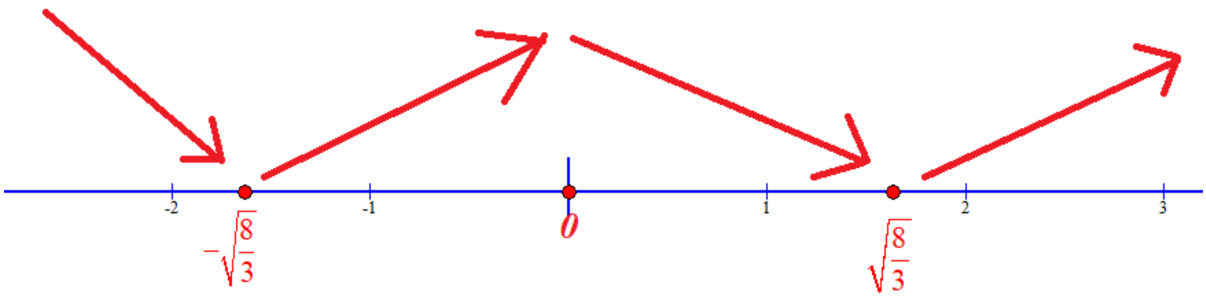
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 6x^5-16x^3=0 \Rightarrow 2x^3\left(3x^2-8\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3x^2-8=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{8}{3}} \end{cases}$$

Analizamos la evolución de la función con el signo de la derivada antes, entre y después de los puntos críticos.

- En $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$ tomo *x = –3* y la derivada vale $f\,'(-3)=6\left(-3\right)^5-16\left(-3\right)^3=-297<0$, la función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$.
- En $\left(-\sqrt{\dfrac{8}{3}},0\right)$ tomo *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=6\left(-1\right)^5-16\left(-1\right)^3=10>0$, la función crece en $\left(-\sqrt{\dfrac{8}{3}},0\right)$.
- En $\left(0,\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$ tomo *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=6-16=-10<0$, la función decrece en $\left(0,\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$.
- En $\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}},+\infty\right)$ tomo *x = 3* y la derivada vale $f\,'(3)=6\cdot 3^5-16\cdot 3^3=297>0$, la función crece en $\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}},+\infty\right)$.

Resumiendo:
La función decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)\cup\left(0,\sqrt{\dfrac{8}{3}}\right)$ y crece en $\left(-\sqrt{\dfrac{8}{3}},0\right)\cup\left(\sqrt{\dfrac{8}{3}},+\infty\right)$.

b) Dado el estudio del crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que la función evoluciona como el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x = 0$ y dos mínimos relativos en $x = -\sqrt{\frac{8}{3}}$ y $x = +\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Por la forma de la función los mínimos relativos lo son absolutos.

Calculamos el límite de la función cuando x va a + infinito y a – infinito y comprobamos si el máximo relativo lo es absoluto.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^6 - 4x^4 = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^6 - 4x^4 = +\infty$$

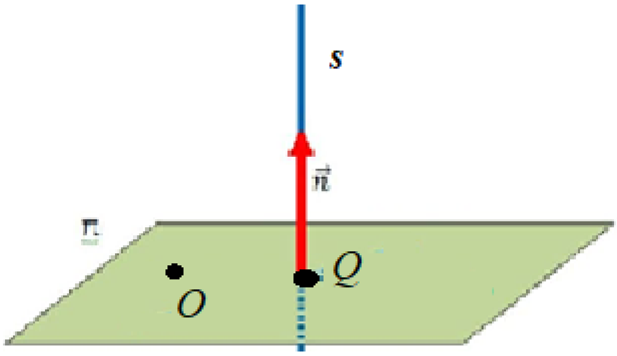
Por lo que el máximo relativo no lo es absoluto.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$

a) (0.75 puntos) Hallar la distancia del origen a la recta *s*.
b) (0.5 punto) Determinar la posición relativa de *r* y *s*.
c) (1.25 puntos) Escribir la ecuación de una recta perpendicular común a ambas rectas.

a) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta que pasa por el origen O. Determinamos el punto Q de intersección de recta y plano. La distancia del origen a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{OQ}$ que une el origen O con este punto Q.



El vector normal del plano es el director de la recta.

$$s \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)$$

$$\pi \equiv \begin{cases} \vec{n}=\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1) \\ O(0,0,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x-y+z+D=0 \\ O(0,0,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow 0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \pi \equiv 2x-y+z=0$$

Hallamos el punto Q de corte de plano π y recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x-y+z=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=-3+2\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-3+2\lambda)-2+\lambda+1+\lambda=0 \Rightarrow -6+4\lambda-2+\lambda+1+\lambda=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda-7=0 \Rightarrow \lambda=\frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x=-3+2\frac{7}{6}=\frac{-4}{6} \\ y=2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6} \\ z=1+\frac{7}{6}=\frac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{-4}{6},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{-4}{6},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{-4}{6},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)$.

La distancia del origen a la recta s es el módulo del vector $\overrightarrow{OQ}=\left(\frac{-4}{6},\frac{5}{6},\frac{13}{6}\right)$.

$$\text{Distancia}(O,s)=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{\left(\frac{-4}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{13}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{210}{36}}=\boxed{\frac{\sqrt{210}}{6}=2.415\,u}$$

b)

$$r\equiv\begin{cases}x+2z=1\\y+z=2\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1-2z\\y=2-z\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1-2t\\y=2-t\\z=t\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-2,-1,1)\\P_r(1,2,0)\end{cases}$$

$$s\equiv\begin{cases}x=-3+2\lambda\\y=2-\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)\\P_s(-3,2,1)\end{cases}$$

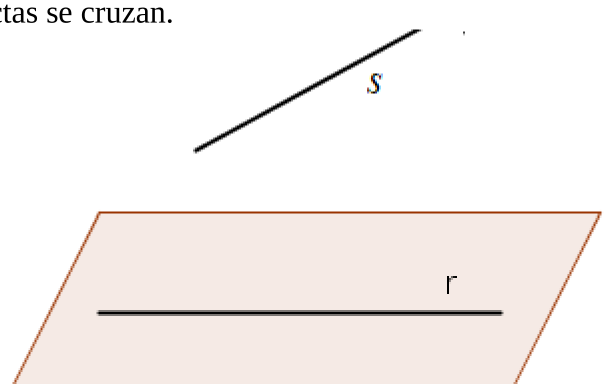
Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes, las rectas se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-2,-1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-2}{2}\neq\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}\Rightarrow\ \text{¡No son proporcionales!}$$

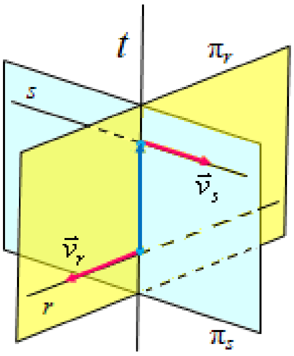
Hacemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-2,-1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)\\\overrightarrow{P_rP_s}=(-3,2,1)-(1,2,0)=(-4,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix}-2&-1&1\\2&-1&1\\-4&0&1\end{vmatrix}=2+4+0-4+2+0=4\neq0$$

Por ser no nulo las rectas se cruzan.



c) Para obtener la ecuación de la recta t perpendicular común a r y s consideramos dicha recta como la intersección de dos planos π_r que pasa por el punto P_r y con vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}$ y el plano π_s que pasa por el punto P_s y con vectores directores $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}$.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(-2,-1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-i+2j+2k+2k+2j+i=4j+4k=(0,4,4)$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-2,-1,1)\\ \pi_r\equiv\vec{v}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=(0,4,4)\\ P_r(1,2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_r\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$-4x+4-8z+8y-16-4x+4=0\Rightarrow -8x+8y-8z-8=0\Rightarrow \boxed{\pi_r\equiv x-y+z+1=0}$$

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}=\overrightarrow{v_s}=(2,-1,1)\\ \pi_s\equiv\vec{v}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=(0,4,4)\\ P_s(-3,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_r\equiv\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z-1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 4\end{vmatrix}=0$$

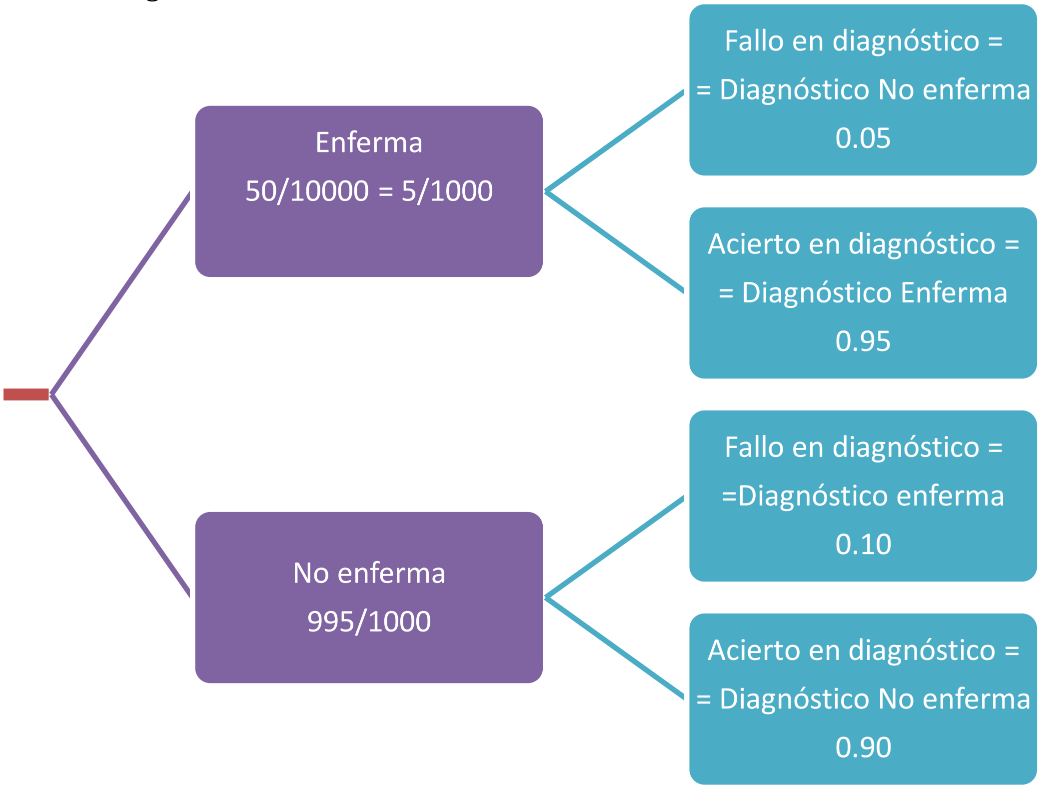
$$-4x-12+8z-8-8y+16-4x-12=0\Rightarrow -8x-8y+8z-16=0\Rightarrow \boxed{\pi_s\equiv x+y-z+2=0}$$

La recta t perpendicular común a las dos rectas r y s que se cruzan es:

$$t\equiv\begin{cases} x+y-z+2=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una médico experto diagnóstica posibles enfermos de una dolencia, fallando en reconocerla en el 5% de los casos que la padecen y diagnosticándola equivocadamente en el 10% de los sanos. Las estadísticas muestran que dicha enfermedad es padecida por 50 de cada diez mil personas. Si una persona al azar se somete a reconocimiento, calcule la probabilidad de:
a) (0.5 puntos) Que sea diagnosticada como enferma.
b) (1 punto) Que esté enferma si la diagnostican como tal.
c) (0.5 puntos) Que no esté enferma si la diagnostican sana.
d) (0.5 puntos) Que sea mal diagnosticada.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Llamemos E = Estar enferma y DE = Diagnóstico de enferma, por lo que $\overline{E}$ = No estar enferma y $\overline{DE}$ = Diagnóstico de no enferma.

$$P(\text{Diagnóstico de enferma}) = P(DE) =$$

$$= P(E)P(DE/E) + P(\overline{E})P(DE/\overline{E}) = \frac{5}{1000}\cdot 0.95 + \frac{995}{1000}\cdot 0.10 = \boxed{\frac{417}{4000} = 0.1042}$$

b) $$P(E/DE) = \frac{P(E\cap DE)}{P(DE)} = \frac{P(E)P(DE/E)}{P(DE)} = \frac{\frac{5}{1000}\cdot 0.95}{\frac{417}{4000}} = \boxed{\frac{19}{417} = 0.0455}$$

c) $P\left(\overline{E}/\overline{DE}\right)=\dfrac{P\left(\overline{E}\cap\overline{DE}\right)}{P\left(\overline{DE}\right)}=\dfrac{P\left(\overline{E}\right)P\left(\overline{DE}/\overline{E}\right)}{P\left(\overline{DE}\right)}=\dfrac{\dfrac{995}{1000}\cdot 0.9}{1-\dfrac{417}{4000}}=\boxed{\dfrac{3582}{3583}=0.9997}$

d)

$$P\left(Mal\ diagnóstico\right)=P\left(E\cap\overline{DE}\right)+P\left(\overline{E}\cap DE\right)=$$

$$=P\left(E\right)P\left(\overline{DE}/E\right)+P\left(\overline{E}\right)P\left(DE/\overline{E}\right)=\frac{5}{1000}0.05+\frac{995}{1000}0.1=$$

$$=\frac{25}{100000}+\frac{9950}{100000}=\frac{9975}{100000}=\boxed{\frac{399}{4000}=0.09975}$$