PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO

206 MATEMÁTICAS II. SEPTIEMBRE 2018

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a todas las cuestiones de una de las opciones A o B. No está permitido utilizar calculadoras programables ni que realicen cálculo simbólico, integrales o gráficas.

OPCIÓN A: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX = A + A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 p.]** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) **[1 p.]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x + senx)}{x}$.

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int senx\, e^{\cos x} dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x=0$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = senx\, e^{\cos x}$.

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases} 2x - y + 3z = 3 \\ x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \text{ y } s: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$$

a) **[1,25 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1,25 p.]** Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) **[0,5 p.]** Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

OPCIÓN B: No es necesario responder a las cuestiones en el mismo orden en que están enunciadas. Antes bien, se recomienda al alumno que empiece por aquellas cuestiones que le resulten más sencillas.

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).
b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x) = x\sqrt{18 - x^2}$ con $-4 < x < 4$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.
b) **[1 p.]** Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$
b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = x\ln x$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P = (1,\ 1,\ 3)$ y $Q = (1,\ 5,\ 0)$ y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r: \begin{cases} 2x - y - 2z = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Compruebe que el punto ***P*** no está en la recta ***r*** y que el punto ***Q*** si lo está.
b) **[1,25 p.]** Determine el punto ***R*** de la recta ***r*** tal que el triángulo ***PQR*** sea un triángulo rectángulo en ***P*** (es decir, con ángulo recto en el vértice ***P***).
c) **[0,75 p.]** Calcule el área de dicho triángulo ***PQR.***

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

SOLUCIONES

CUESTIÓN A.1: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$

a) **[1 p.]** Compruebe que la matriz ***A*** es regular (o invertible) y calcule su inversa.

b) **[1,5 p.]** Determine la matriz X que cumple la ecuación $AX=A+A^T$, donde A^T es la matriz traspuesta de ***A***.

a) Para que sea regular una matriz debe tener determinante no nulo:

$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$ La matriz A es regular.

- **<u>Método 1 (Fórmula)</u>**

  Para calcular su inversa aplicamos la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Adj(A^T)=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}{1}=\boxed{\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$$

- **<u>Método 2 (Sistema)</u>**

  Otra forma de hallar la inversa es:

$A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ cumpliendo:

$$A\cdot A^{-1}=Id$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2a+c & -2b+d\\ 3a-2c & 3b-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}-2a+c=1\\ -2b+d=0\\ 3a-2c=0\\ 3b-2d=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}-2a+c=1\\ 3a-2c=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4a+2c=2\\ 3a-2c=0\end{array}\right\}\\ \overline{-a\quad =2}\Rightarrow\boxed{a=-2}\Rightarrow -6-2c=0\Rightarrow -2c=6\Rightarrow\boxed{c=-3}\\ \left.\begin{array}{l}-2b+d=0\\ 3b-2d=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4b+2d=0\\ 3b-2d=1\end{array}\right\}\\ \overline{-b\quad =1}\Rightarrow\boxed{b=-1}\Rightarrow -3-2d=1\Rightarrow -2d=4\Rightarrow\boxed{d=-2}\end{array}\right.$$

La matriz inversa es:

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}}$$

b) Despejando en la ecuación matricial:

$$AX = A + A^T \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}\left(A + A^T\right) \Rightarrow X = A^{-1}\left(A + A^T\right)$$

Calculemos la expresión:

$$X = A^{-1}\left(A + A^T\right) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-4 & -8+4 \\ 12-8 & -12+8 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A.2: Calcule los siguientes límites:

a) **[1 p.]** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)$.

b) **[1 p.]** $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+senx\right)}{x}$.

a)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\infty-\infty=\text{Indeterminación (Conjugado)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+2-\cancel{x^2}+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\frac{4}{+\infty}=\boxed{0}$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos x+senx\right)}{x}=\frac{\ln(1+0)}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{-senx+\cos x}{\cos x+senx}=\frac{0+1}{1+0}=\boxed{1}$$

CUESTIÓN A.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int senx\, e^{\cos x} dx$

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje **OX**, las rectas verticales $x=0$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=senx\, e^{\cos x}$.

a)

$$\int senx\, e^{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos con cambio de variable} \\ \cos x = t \Rightarrow -senxdx = dt \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{-senx} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \cancel{senx}\; e^t \frac{dt}{-\cancel{senx}} = -\int e^t dt = -e^t =$$

$$= \{\text{Deshaciendo el cambio de variable}\} = \boxed{-e^{\cos x}+K}$$

b) El área del recinto se calcula con una integral definida, necesitando calcular los límites de integración. Estos límites son los indicados por las rectas verticales (0 y $\pi/2$) siempre que la función no cruce el eje OX.
Comprobémoslo igualando la función a 0:

$$senx\, e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} senx = 0 \Rightarrow x = 0 + 2\pi k;\ x = \pi + 2\pi k \\ e^{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{Imposible} \end{array} \right.$$

No existe ningún valor ya que solo es entre 0 y $\pi/2$

$$Área = \left| \int_0^{\pi/2} senx\, e^{\cos x} dx \right| = \left| \left[-e^{\cos x} \right]_0^{\pi/2} \right| = \left| \left(-e^{\cos \pi/2} \right) - \left(-e^{\cos 0} \right) \right| = \left| -1 + e \right|$$

$$Área = \boxed{1'71\, u^2}$$

CUESTIÓN A.4:

Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases} \text{ y } s:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}.$$

a) **[1,25 p.]** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **[1,25 p.]** Determine la ecuación (en cualquiera de sus formas) del plano que contiene a ambas rectas.

a) Averigüemos el vector director de cada una de las rectas y veamos si son proporcionales, en cuyo caso serán paralelas o coincidentes.

El vector director de la recta r se determina con el producto vectorial de los vectores normales a cada plano:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases} \Rightarrow \vec{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & -1 & 3\\1 & 3 & 5\end{vmatrix}=-5i+3j+6k-(-k+10j+9i)$$

$$\vec{v_r}=-14i-7j+7k=(-14,-7,7)$$

y el vector director de la recta s aparece en la expresión de su ecuación $s:\frac{x-5}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$

$$\vec{v_s}=(2,1,-1)$$

Se observa que $\frac{-14}{2}=\frac{-7}{1}=\frac{7}{-1}$. Podrían ser paralelas o coincidentes. Pero el punto $P_s(5,0,0)$ que pertenece a la recta s no pertenece a la recta r:

$$r:\begin{cases}2x-y+3z=3\\x+3y+5z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}10-0+0=3\\5+0+0=1\end{cases}$$ No es cierta ninguna de las dos igualdades

$\boxed{\textbf{Las rectas r y s son paralelas}}$

b) Necesitamos dos vectores directores del plano y un punto. Tenemos un vector (el director de cualquiera de las dos rectas) y un punto (el de la recta s). Obtengamos un punto de r, dando a z=0, resolvemos el sistema de ecuaciones que nos queda para hallar las otras dos coordenadas del punto buscado

$$\left.\begin{array}{l}2x-y=3\\x+3y=1\end{array}\right\} \Rightarrow x=1-3y \Rightarrow 2(1-3y)-y=3 \Rightarrow 2-6y-y=3$$

$$-7y=1 \Rightarrow y=\frac{-1}{7}$$

$$x=1-3\cdot\frac{-1}{7}=1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}$$

El punto es $P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right)$

Tenemos $P_s(5,0,0)$ y $P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right)$, con lo que formamos otro vector director del plano:

$$\overrightarrow{u_\pi} = P_r\left(\frac{10}{7},\frac{-1}{7},0\right) - P_s(5,0,0) = \left(\frac{-25}{7},\frac{-1}{7},0\right)$$

El plano que pasa por $P_s(5,0,0)$ y tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_s} = (2,1,-1)$ y $\overrightarrow{u_\pi} = \left(\frac{-25}{7},\frac{-1}{7},0\right)$ tiene las ecuaciones paramétricas:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} x = 5 + 2\lambda - \frac{25}{7}\alpha \\ y = 0 + \lambda - \frac{1}{7}\alpha \\ z = 0 - \lambda \end{array}\right\}}$$

CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.

a) Elegido un estudiante al azar, se pide:

a.1) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?

a.2) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?

b) **[0,5 p.]** Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿Cuál es la probabilidad de que sea una chica?

a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10		
Chicas			25
	30		40

De estos datos completamos el resto de datos:

	Aprueban matemáticas	No aprueban matemáticas	
Chicos	10	**5**	**15**
Chicas	**20**	**5**	25
	30	**10**	40

a.1) $\text{Probabilidad de no aprobar las matemáticas} = \frac{10}{40} = 0,25 = 25\%$

a.2) $\text{Probabilidad de que sea chica y apruebe las matemáticas} = \frac{20}{40} = 0,5 = 50\%$

b)

Probabilidad de que sea chica condicionado a que ha aprobado las matemáticas =

$$= \frac{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas y sea chica}}{\text{Probabilidad de que apruebe las matemáticas}} = \frac{20}{30} = 0,66 = 66\%$$

CUESTIÓN B.1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + az = 0 \\ x + y + az = 0 \\ 2x + (a-1)y + az = 0 \end{cases}$$

a) **[1,25 p.]** Determine los valores del parámetro ***a*** para los que el sistema tiene únicamente la solución trivial (0, 0, 0).

b) **[1,25 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor del parámetro $a = 2$.

a) Estudiemos el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema:

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{pmatrix}$ Su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & a-1 & a \end{vmatrix} = a^2 + 2a + a(a-1) - \left(2a + a + a^2(a-1)\right) =$$

$$= a^2 + 2a + a^2 - \text{a} - 2a - a - a^3 + a^2 = -a^3 + 3a^2 - 2a$$

Igualándolo a cero:

$$-a^3 + 3a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a\left(-a^2 + 3a - 2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} x = \dfrac{-3+1}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1 \\ x = \dfrac{-3-1}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \end{cases} \end{cases}$$

El sistema tiene una única solución (0,0,0) **cuando a es distinto de 0, 1 y 2**.

b) Para a = 2 el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Sustituyendo el valor en el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Este sistema tiene la primera y la tercera ecuación iguales, luego es equivalente a

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Dejemos **z** como parámetro y resolvámoslo:

$$\begin{cases} 2x+y=-2z \\ x+y=-2z \end{cases} \Rightarrow x=-2z-y \text{ (sustituimos en la 1ª ecuación)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-2z-y)+y=-2z \Rightarrow -4z-2y+y=-2z \Rightarrow -y=2z \Rightarrow y=-2z$$

Volviendo atrás y sustituyendo: $x=-2z-(-2z)=0$

La solución es $\boxed{x=0;\ y=-2z;\ z=z}$

CUESTIÓN B.2: [2 p.] Considere la función $f(x)=x\sqrt{18-x^2}$ con $-4<x<4$.

a) **[1 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus puntos críticos.

b) **[1 p.]** Justifique si la función $f(x)$ tiene algún máximo o mínimo.

a)

$$f(x)=x\sqrt{18-x^2} \Rightarrow f'(x)=1\cdot\sqrt{18-x^2}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{18-x^2}}\cdot(-2x)=$$

$$f'(x)=\sqrt{18-x^2}+\frac{-2x^2}{2\sqrt{18-x^2}}=\boxed{\sqrt{18-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

Podemos simplificar un poco:

$$f'(x)=\sqrt{18-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\frac{\left(\sqrt{18-x^2}\right)^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\frac{18-x^2-x^2}{\sqrt{18-x^2}}=\boxed{\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}}$$

b) Si igualamos a cero la derivada:

$$\frac{18-2x^2}{\sqrt{18-x^2}}=0 \Rightarrow 18-2x^2=0 \Rightarrow 18=2x^2 \Rightarrow 9=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

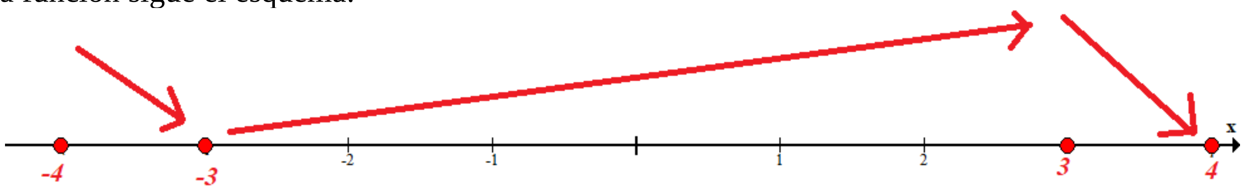
Estos dos posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión están dentro del dominio de la función (-4, 4), pero comprobemos como cambia el signo de la derivada primera para ver cual de estas tres posibilidades corresponde a cada uno de los dos valores.

Tomemos un valor menor que –3, por ejemplo –4 → $f'(-4)=\frac{18-2\cdot 16}{\sqrt{18-16}}=\frac{-14}{\sqrt{2}}<0$

Tomemos un valor entre –3 y 3, por ejemplo 0 → $f'(0)=\frac{18-2\cdot 0}{\sqrt{18-0}}=\frac{18}{\sqrt{18}}>0$

Tomemos un valor mayor que 3, por ejemplo 4 → $f'(4)=\frac{18-2\cdot 16}{\sqrt{18-16}}=\frac{-14}{\sqrt{2}}<0$

La función sigue el esquema:



Luego $\boxed{x=-3}$ **es un mínimo y** $\boxed{x=3}$ **es un máximo**.

CUESTIÓN B.3:

a) **[1 p.]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x \ln x \, dx$

b) **[0,5 p.]** Determine la primitiva de la función $f(x) = x \ln x$ que pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

a) Utilicemos el método de integración por partes:

$$\int x \ln x \, dx = \int u dv = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \to v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= u \cdot v - \int v du = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx =$$

$$= \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \boxed{\frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K}$$

b) La primitiva de $f(x) = x \ln x$ es $F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + K$, para averiguar el valor de K para que pase por (1, 0) basta sustituir $F(1) = 0$:

$$F(1) = \frac{1^2 \cdot \ln(1)}{2} - \frac{1^2}{4} + K = 0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{4} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{4}$$

La primitiva pedida es $\boxed{F(x) = \frac{x^2 \cdot \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}}$

CUESTIÓN B.4:

Considere los puntos $P=(1,\ 1,\ 3)$ y $Q=(1,\ 5,\ 0)$, y la recta ***r*** dada por la ecuación:

$$r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\ -x+y\qquad =4\end{cases}$$

a) **[0,5 p.]** Compruebe que el punto ***P*** no está en la recta ***r*** y que el punto ***Q*** si lo está.

b) **[1,25 p.]** Determine el punto ***R*** de la recta ***r*** tal que el triángulo ***PQR*** sea un triángulo rectángulo en ***P*** (es decir, con ángulo recto en el vértice ***P***).

c) **[0,75 p.]** Calcule el área de dicho triángulo ***PQR.***

a) Para que el punto P esté en la recta debe cumplir las dos ecuaciones al sustituir en ella sus coordenadas:

$$\left.\begin{array}{l}P(1,1,3)\\ r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\ -x+y\qquad =4\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2-1-2\cdot 3=-3\\ -1+1\qquad =4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-5=-3\\ 0=4\end{cases}$$

No es cierta ninguna de las igualdades, el punto P no pertenece a la recta ***r*.**

Hacemos lo mismo con el punto Q

$$\left.\begin{array}{l}P(1,5,0)\\ r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\ -x+y\qquad =4\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}2-5-2\cdot 0=-3\\ -1+5\qquad =4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3=-3\\ 4=4\end{cases}$$

Ahora si son ciertas las dos igualdades, el punto Q si pertenece a la recta ***r***.

b) Debemos encontrar un punto R de la recta ***r*** tal que el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ sea cero.

Hallemos otro punto S cualquiera de la recta ***r*** y así determinaremos el vector director $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QS}$.

También podemos hallar el vector director de la recta con el producto vectorial de los vectores normales a cada uno de los planos que la definen.
$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2j+2k-(k-2i)=2i+2j+k=(2,2,1)$

En la ecuación de la recta $r:\begin{cases}2x-y-2z=-3\\ -x+y\qquad =4\end{cases}$

Demos el valor x = 0 y en la segunda ecuación obtendremos y = 4. Sustituyendo en la primera ecuación: $0-4-2z=-3\Rightarrow -2z=1\Rightarrow z=-\frac{1}{2}$

El punto $S(0,4,-1/2)$

$\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QS}=S-Q=(0,4,-1/2)-(1,5,0)=(-1,-1,-0'5)$ que multiplicándolo por -2 nos queda el vector director de la recta $\overrightarrow{u_r}=(2,2,1)$

Así cualquier punto de la recta ***r*** sigue las ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,2,1)\\ Q(1,5,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=5+2\lambda\\ z=0+\lambda\end{cases}$$

El punto R pedido tiene las coordenadas $(1+2\lambda,\,5+2\lambda,\,\lambda)$

$$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(1,5,0)-(1,1,3)=(0,4,-3)$$

$$\overrightarrow{PR}=R-P=(1+2\lambda,\,5+2\lambda,\,\lambda)-(1,1,3)=(2\lambda,\,4+2\lambda,\,\lambda-3)$$

Y el producto escalar de ambos vectores:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(0,4,-3)(2\lambda,\,4+2\lambda,\,\lambda-3)=0+4(4+2\lambda)-3(\lambda-3)=16+8\lambda-3\lambda+9=25+5\lambda$$

Igualándolo a cero

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0\\ 25+5\lambda=0\\ 5\lambda=-25\\ \lambda=-5\end{array}$$

El punto R pedido es

$$(1+2\lambda,\,5+2\lambda,\,\lambda)=(1-10,5-10,-5)=(-9,-5,-5)$$

$$\boxed{R=(-9,-5,-5)}$$

c) El área del triángulo PQR al ser rectángulo en P es igual a la longitud de la base (módulo del vector PR por la longitud de la altura (módulo del vector PQ) partido por 2.

$$\overrightarrow{PR}=R-P=(-9,-5,-5)-(1,1,3)=(-10,-6,-8)$$

$$Área=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{0^2+4^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{10^2+6^2+8^2}}{2}=\frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{200}}{2}=\boxed{25\sqrt{2}\ u^2}$$

También se puede realizar por la fórmula:

Área del paralelogramo definido por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial de los vectores partido por 2.

$$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 0 & 4 & -3\\ -10 & -6 & -8\end{vmatrix}=-32i+30j-(-40k+18i)=-50i+30j+40k=(-50,30,40)$$

$$\text{Área del triángulo PQR}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|}{2}=\frac{\sqrt{50^2+30^2+40^2}}{2}=\frac{\sqrt{5000}}{2}=\boxed{25\sqrt{2}\ u^2}$$

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40% de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30% lee revistas del corazón y el 20% lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar se pide:

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?
b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?
c) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

a) Construyamos una tabla reuniendo los datos proporcionados:

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20		40
No lee periódico			
	30		100

De estos datos completamos el resto de datos:

	Lee revistas del corazón	No lee revistas del corazón	
Lee periódico	20	**20**	40
No lee periódico	**10**	**50**	**60**
	30	**70**	100

Probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones =
= Lee el periódico y no revistas + Lee revistas y no el periódico + Lee ambos tipos de publicaciones = 20 + 10 + 20 = 50 = 50% = **0'5**

b) Probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicación (en el cruce de no leer corazón y no leer periódico) = 50% = **0'5**

c) Probabilidad solo lea revistas del corazón = 10 % = **0'1**