GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: EXEMPLE 2020	CONVOCATORIA: EJEMPLO 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$, donde α un parámetro real,

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $\alpha = -1$. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x + y + z = 0$. (3 *puntos*)

Problema 2. Se da el plano $\pi : 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

Problema 3. Se da la función real h definida por $h(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y=0$, $x=1$, $x=5$ y la curva $y=h(x)$, cuando $1 \le x \le 5$. (3 + 2 *puntos*)

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX = \alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

Problema 5. Se dan en el espacio la recta $r:\dfrac{x-\alpha}{-1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x+2y+3z=6$

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:**

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha=6$ y $\beta=3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

Problema 6. Un proyectil está unido al punto (0,2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y=4-x^2$ de extremos (−2,0) y (2,0).

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:**

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $\left(x,4-x^2\right)$ de la curva $y=4-x^2$ y el punto (0,2). (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2\le x\le 2$. (2 *puntos*)

c) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2\le x\le 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=2-|x|$ cuando $-2\le x\le 2$. (4 *puntos*)

Soluciones

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x \quad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \end{cases}$, donde α un parámetro real,

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y determinado. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando α=−1. (3 *puntos*)

c) El valor de α para que el sistema tenga una solución (x,y,z) que verifique $x+y+z=0$.(3 *puntos*)

a) La matriz de los coeficientes asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ con determinante } |A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-20-3+18+4=-1\neq 0$$

Por lo que el rango de la matriz de los coeficientes es siempre 3 al igual que el rango de la ampliada y el número de incógnitas. El sistema es siempre COMPATIBLE DETERMINADO.

b) Para α $=-1$ el sistema es compatible determinado y podemos resolverlo utilizando la regla de Cramer.

$\begin{cases} 2x \quad +3z=-1 \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=0 \end{cases}$ Tiene soluciones:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{10-15-2}{-1}=7 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{50-6-45+5}{-1}=-4$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{1-6+10}{-1}=-5$$

c) Añadimos al sistema $\begin{cases} 2x \quad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \end{cases}$ una ecuación más $x+y+z=0$ y averiguamos el valor de ∝.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x \quad +3z=\alpha \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=\alpha+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{Ecuación 2ª - 2} \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & & +3z & =\alpha \\ -2x & -2y & -2z & =0 \\ \hline & -2y & +z & =\alpha \end{array} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & =5 \\ -x & -y & -z & =0 \\ \hline & -3y & +z & =5 \end{array} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Ecuación 4ª - 3} \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & -y & +5z & =\alpha+1 \\ -3x & -3y & -3z & =0 \\ \hline & -4y & +2z & =\alpha+1 \end{array} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+\ y+z=0 \\ -2y+z=\alpha \\ -3y+z=5 \\ -4y+2z=\alpha+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2 \cdot \text{Ecuación 3ª - 3} \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrl} -6y & +2z & =10 \\ 6y & -3z & =-3\alpha \\ \hline & -z & =-3\alpha+10 \end{array} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Ecuación 4ª - 2} \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrl} -4y & +2z & =\alpha+1 \\ 4y & -2z & =-2\alpha \\ \hline & 0 & =-\alpha+1 \end{array} \end{Bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+\ y+z=0 \\ -2y+z=\alpha \\ -z=-3\alpha+10 \\ 0=-\alpha+1 \end{matrix}\right\}$$

Para que este sistema tenga solución debe cumplirse que la cuarta ecuación sea cierta, es decir, $0=-\alpha+1 \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$

Problema 2. Se da el plano $\pi: 2x+y+2z=8$ y el punto $P=(10,0,10)$.
Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:
a) La distancia del punto P al plano π. (3 *puntos*)
b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. (4 *puntos*)
c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. (3 *puntos*)

a) Utilicemos la fórmula.

$$\left.\begin{array}{l} P(10,0,10) \\ \pi: 2x+y+2z-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Distancia(P,\pi) = \frac{|20+0+20-8|}{\sqrt{4+1+4}} = \boxed{\frac{32}{3}\,u}$$

b) Hallemos los puntos de intersección del plano **π** con cada uno de los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y+2z=8 \\ eje\ OX \to \left.\begin{array}{r} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4 \Rightarrow A(4,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y+2z=8 \\ eje\ OY \to \left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow y=8 \Rightarrow B(0,8,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y+2z=8 \\ eje\ OZ \to \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=8 \Rightarrow z=4 \Rightarrow C(0,0,4)$$

El área del triángulo de vértices A, B y C es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que unen A con B y A con C.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,8,0)-(4,0,0)=(-4,8,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,4)-(4,0,0)=(-4,0,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32i+32k+16j=(32,16,32)$$

$$Área\ triángulo\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{32^2+16^2+32^2}}{2} = \frac{48}{2} = \boxed{24\,u^2}$$

c) El volumen del tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores que unen uno de sus vértices con los demás.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,8,0)-(4,0,0)=(-4,8,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,4)-(4,0,0)=(-4,0,4) \\ \overrightarrow{AP}=(10,0,10)-(4,0,0)=(6,0,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 192+320=512$$

Volumen del tetraedro = $\frac{512}{6} = \boxed{85,33\,u^3}$

Problema 3. Se da la función real h definida por $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$. (1 + 2 *puntos*)

b) La asíntota de la curva $y=h(x)$. (2 *puntos*)

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h(x)dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y=0$, $x=1$, $x=5$ y la curva $y=h(x)$, cuando $1\le x\le 5$. (3 + 2 *puntos*)

a) El dominio de la función $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ son todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2+2x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\text{No tiene solución}$$

El dominio es $\mathbb{R}$

Calculamos los límites pedidos.

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\boxed{\frac{-3}{5}}$$

b) Esta curva no presenta asíntotas verticales, pues su dominio es $\mathbb{R}$. Tampoco presenta asíntotas horizontales, pues hemos visto que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\boxed{+\infty}$.

Solo nos queda hallar su asíntota oblicua.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty} h(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}+x^2+\cancel{5x}-3\cancel{-x^3}-2x^2\cancel{-5x}}{x^2+2x+5}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1$$

La asíntota oblicua es $\boxed{y=x-1}$

c)

$$\int h(x)dx = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx = \{\text{Realicemos la división}\}$$

$$\begin{array}{rrrrl}
x^3 & +x^2 & +5x & -3 & \underline{|x^2 \quad +2x \quad +5} \\
-x^3 & -2x^2 & -5x & & x \quad -1 \\
\hline
0 & -x^2 & 0 & -3 & \\
 & x^2 & 2x & 5 & \\
\hline
 & 0 & 2x & 2 &
\end{array}$$

La integral queda

$$\int x-1+\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \int xdx - \int dx + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx = \boxed{\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x^2+2x+5\right)+C}$$

Para calcular el área pedida debemos comprobar si la función $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ y la recta y = 0 se cortan.

$$\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=0 \Rightarrow x^3+x^2+5x-3=0 \Rightarrow$$

No es fácil resolver esta ecuación, por Ruffini no sale solución.

Comprobemos si cambia de signo en el intervalo [1, 5]

x	$h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$
1	$4/8>0$
2	$+/+>0$
3	$+/+>0$
4	$+/+>0$
5	$+/+>0$

La conclusión es que la función $h(x)=\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ es siempre positiva en el intervalo [1,5] y el área pedida es la integral definida de la función con límites de integración 1 y 5.

$$Área = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}dx = \left[\frac{x^2}{2}-x+\ln\left(x^2+2x+5\right)\right]_1^5 =$$

$$= \left[\frac{5^2}{2}-5+\ln\left(5^2+10+5\right)\right]-\left[\frac{1^2}{2}-1+\ln\left(1^2+2+5\right)\right]=$$

$$=\frac{15}{2}+\ln 40+\frac{1}{2}-\ln 8 = \boxed{8+\ln 5\, u^2}$$

Problema 4. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $AX=\alpha X$ solo admite una solución. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX=5X$. (3 *puntos*)

c) Comprobar que $X=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX=2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor β tal que $A^{100}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}$. (3 *puntos*)

a)

$$AX=\alpha X \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+4y\\ -x+6y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}x+4y=\alpha x\\ -x+6y=\alpha y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(1-\alpha)x+4y=0\\ -x+(6-\alpha)y=0\end{array}\right\}$$

El sistema tiene una única solución cuando el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula.

$$\begin{vmatrix}1-\alpha & 4\\ -1 & 6-\alpha\end{vmatrix}=6-\alpha-6\alpha+\alpha^2+4=\alpha^2-7\alpha+10=0$$

$$\alpha=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}\alpha=\dfrac{7+3}{2}=5\\ \alpha=\dfrac{7-3}{2}=2\end{cases}$$

Tiene solución única cuando es $\alpha\neq 2 \quad y\ \alpha\neq 5$

b)

$$AX=5X\Rightarrow\left.\begin{array}{l}(1-5)x+4y=0\\ -x+(6-5)y=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-4x+4y=0\\ -x+y=0\end{array}\right\}\Rightarrow -x+y=0\Rightarrow x=y$$

Las soluciones son $X=\begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}$, para cualquier valor x ∈ R

c)

$$\left.\begin{array}{l}Para\ X=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\\ AX=2X\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4+4\\ -4+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 2\end{pmatrix}$$

Esto es evidentemente cierto y es solución de la ecuación.

Vayamos multiplicando por la matriz A la ecuación $AX=2X$

$$AX=2X\Rightarrow AAX=A2X\Rightarrow A^2X=2AX=2\cdot 2X=2^2X$$

$$A^2X=2^2X$$

Multiplico por la matriz A de nuevo

$$AA^2X=A2^2X\Rightarrow A^3X=2^2AX=2^2 2X=2^3X$$

$$A^3X=2^3X$$

Repitiendo esta operación las veces necesarias se llegaría a la igualdad:
$A^{100}X = 2^{100}X$, por lo que el valor de β es 2^{100}.

Problema 5. Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi : x+2y+3z=6$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. (5 *puntos*)

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha=6$ y $\beta=3$. (3 *puntos*)

c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y que no corta al plano π. (2 *puntos*)

a) La posición relativa de plano y recta depende, inicialmente, del vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,3)$ y el director de la recta $\vec{v_r}=(-1,-4,\beta)$.

Calculamos su producto escalar, si este es cero los vectores son perpendiculares y por tanto plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano, si es distinto de cero son secantes.

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=(-1,-4,\beta)\cdot(1,2,3)=-1-8+3\beta=0 \Rightarrow \beta=3$$

Si $\beta \neq 3$ el producto escalar es no nulo y plano y recta son SECANTES. Se cortan en un punto.

Si $\beta=3$ el producto escalar es nulo y debemos ver si son paralelos o la recta está contenida en el plano. Para ello consideramos el vector director de la recta, un vector del plano y un tercer vector que une un punto de la recta $P_r(\alpha,0,0)$ con un punto del plano Q(0,0,2).

$$\pi : x+2y+3z=6 \Rightarrow \begin{cases} Q(0,0,2)\in\pi \\ R(6,0,0)\in\pi \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{QR}=(6,0,0)-(0,0,2)=(6,0,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi}=(6,0,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(-1,-4,3) \\ \overrightarrow{P_rQ}=(\alpha,0,0)-(0,0,2)=(\alpha,0,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ \alpha & 0 & -2 \end{vmatrix} = 48-8\alpha=0 \Rightarrow \alpha=6$$

Siendo $\beta=3$, si $\alpha=6$ la recta está contenida en el plano. Si $\alpha\neq 6$ la recta es paralela al plano.

b) Cuando $\propto = 6$ y $\beta = 3$ hemos visto que la recta está contenida en el plano y por tanto la distancia es 0.

c) Para que un plano no corte a otro deben de ser paralelos y por tanto deben tener el mismo vector normal. El plano pedido tiene vector normal $\vec{n}=(1,2,3)$ y pasa por el punto (0,0,0)

$$\left.\begin{array}{l} \pi': x+2y+3z+D=0 \\ \text{Pasa por } (0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 0+0+0+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \boxed{\pi': x+2y+3z=0}$$

Problema 6. Un proyectil está unido al punto (0,2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

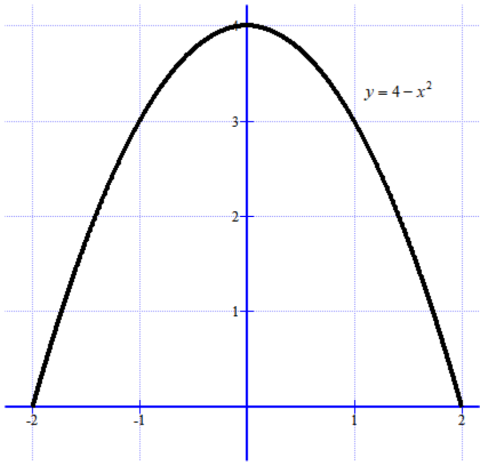
a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $\left(x, 4-x^2\right)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto (0,2). (2 *puntos*)

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

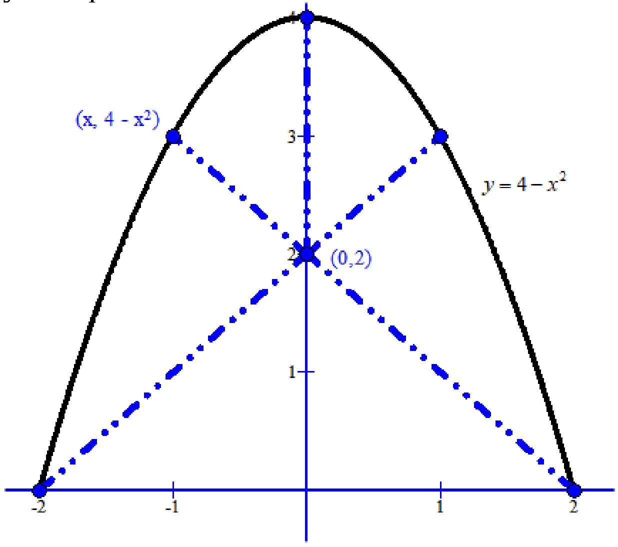
c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$. (2 *puntos*)

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$. (4 *puntos*)

a) La trayectoria del proyectil es:



Le añadimos la cuerda y nos queda la situación



Expresemos la distancia del punto (0,2) a uno cualquiera de la gráfica $(x, 4-x^2)$.

$$f(x) = \text{distancia}\left((0,2),(x,4-x^2)\right) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(4-x^2-2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(2-x^2\right)^2} = \sqrt{x^2 + 4 + x^4 - 4x^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

b) Hallamos el máximo de la expresión de *f(x)*.

$$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}$$

Igualamos a cero la derivada

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}=0 \Rightarrow 2x^3-3x=0 \Rightarrow$$

$$x\left(2x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x^2-3=0 \Rightarrow x^2=\frac{3}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm 1,22 \end{cases}$$

Veamos que ocurre en los intervalos en que se divide el intervalo [-2,2].

- En $\left[-2,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos el valor x = –1,5 →

  $f'(-1,5)=\frac{2(-1,5)^3-3(-1,5)}{\sqrt{(-1,5)^4-3(-1,5)^2+4}}=\frac{-2,25}{+}<0$. La función decrece.

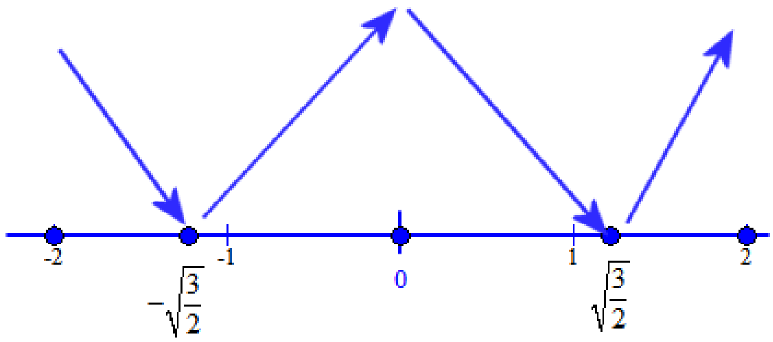
- En $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$ tomamos el valor x = –1 → $f'(-1)=\frac{2(-1)^3-3(-1)}{\sqrt{(-1)^4-3(-1)^2+4}}=\frac{1}{+}>0$ la función crece.

- En $\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ tomamos el valor x = 1 → $f'(1)=\frac{2(1)^3-3(1)}{\sqrt{(1)^4-3(1)^2+4}}=\frac{-1}{+}<0$ la función decrece.

- En $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},2\right]$ tomamos el valor x = 1,5 → $f'(1,5)=\frac{2(1,5)^3-3(1,5)}{\sqrt{(-1,5)^4-3(-1,5)^2+4}}=\frac{2,25}{+}>0$

La función crece.

El esquema que representa la el crecimiento y decrecimiento de la función es:



La máxima distancia estaría en x = 0 (máximo local) o en los extremos x = –2 o en x = 2.
En el dibujo inicial se aprecia que la distancia es mayor en x = 2 y en x = –2, comprobémoslo.

$$f(-2)=\sqrt{(-2)^4-3(-2)^2+4}=\sqrt{16-12+4}=\sqrt{8}$$

$$f(0)=\sqrt{0^4-3(0)^2+4}=\sqrt{4}$$

$$f(2)=\sqrt{(2)^4-3(2)^2+4}=\sqrt{16-12+4}=\sqrt{8}$$

La máxima distancia se produce en los puntos (2,0) y en (–2,0).

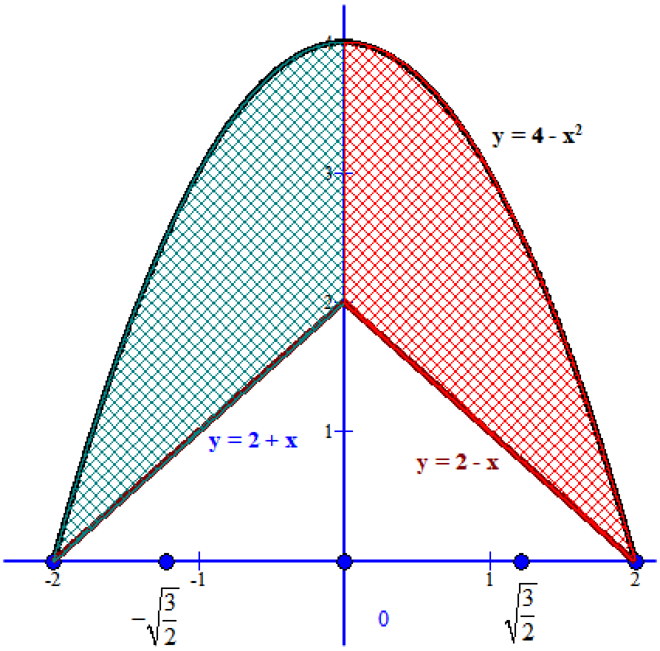
c) La mínima distancia se produce en $x=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ y en $x=\sqrt{\frac{3}{2}}$ como se ha comprobado en el apartado anterior.

Como $y(-\sqrt{\frac{3}{2}})=4-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$; $y(\sqrt{\frac{3}{2}})=4-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

Los puntos son $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)$

d) Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.

La función $y=2-|x|=\begin{cases}2+x & si \quad -2<x<0\\ 2-x & si \quad 0<x<2\end{cases}$. Por lo que dividimos el recinto en dos partes.



$$Área=\int_{-2}^{0}4-x^2-(2+x)\,dx+\int_{0}^{2}4-x^2-(2-x)\,dx=$$

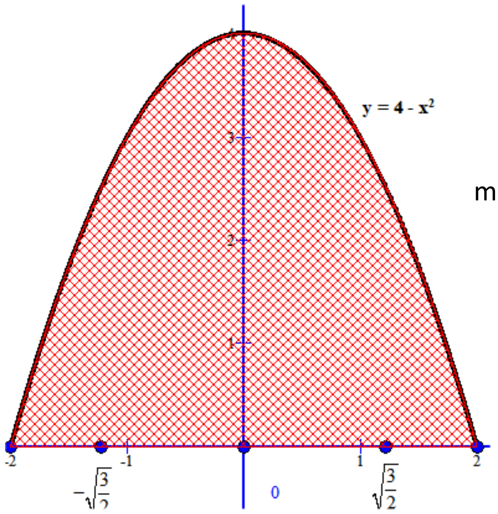
$$=\int_{-2}^{0}2-x^2-xdx+\int_{0}^{2}2-x^2+xdx=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{2}=$$

$$=\left[2\cdot 0-\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}\right]-\left[2(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}\right]+\left[2(2)-\frac{(2)^3}{3}+\frac{(2)^2}{2}\right]-\left[2\cdot 0-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}\right]=$$

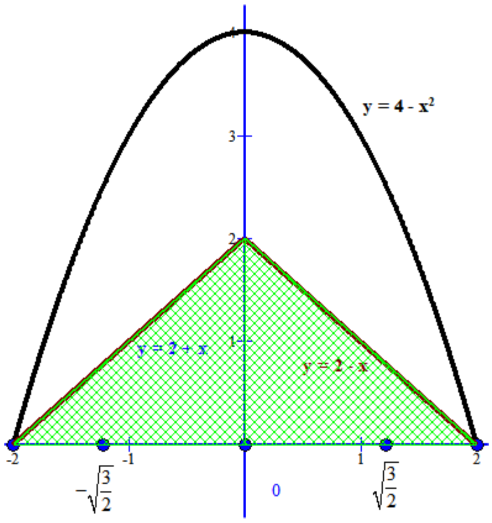
$$=4-\frac{8}{3}+2+4-\frac{8}{3}+2=12-\frac{16}{3}=\frac{36-16}{3}=\boxed{\frac{20}{3}u^2}$$

OTRA FORMA DE HACERLO.

Aprovechando la simetría y sencillez de la figura



menos



El área primera la calculamos con una integral definida y la segunda con la fórmula del área de un triángulo de base 4 y altura 2.

Área bajo la parábola es:

$$\int_{-2}^{2} 4-x^2dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}=\left[4\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right]-\left[4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right]=8-\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}=16-\frac{16}{3}$$

Y el área del triángulo es $\acute{A}rea=\frac{4\cdot 2}{2}=4$

El área pedida es $16-\frac{16}{3}-4=12-\frac{16}{3}=\boxed{\frac{20}{3}u^2}$