Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU) Universidad de Extremadura

Curso 2020-2021

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II   Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregiría el que ocupe el sexto lugar.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x no existe la inversa de A. **(0,5 puntos)**

b) Para $x = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - B = C$. **(1,5 puntos)**.

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ y & -3 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de x, y, z para que se verifique que $A^t \cdot B = C - z \cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 €, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 de tela con un beneficio de 100 €. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.

Calcular, justificando la respuesta:

a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos. **(1,5 puntos)**

b) El valor de dichos beneficios máximos. **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, C(x), en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \quad 0 \le x \le 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Las ventas de un producto (en miles de euros), V(t), en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \le t \le 6$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:

a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. **(1,5 puntos)**

b) Representar gráficamente la función V(t). **(0,5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

a) Determinar el área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 7x + 6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$. **(1 punto)**

b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x) = \frac{4x^2 + 1}{2(x^2 - 7x + 6)}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50%), mármol (40%) y artificial (10%). El 10% del granito, el 5% del mármol y el 1% de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas. **(1 punto)**

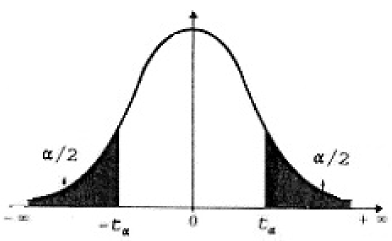
b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionarse para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X+2Y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ 2X-3Y=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -10 & 12 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 3\cdot \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 2^{\text{a}} \\ -2\cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \rightarrow \text{Nueva Ecuación } 1^{\text{a}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6X-4Y=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 4 & -10 \end{pmatrix} \\ 6X-9Y=\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -30 & 36 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 2^{\text{a}} + \text{Ecuación } 1^{\text{a}}\} \Rightarrow -13Y=\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -26 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{-1}{13}\begin{pmatrix} -13 & 0 \\ -26 & 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}} \Rightarrow \{\text{Sustituimos en ecuación } 1^{\text{a}}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3X+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&x&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\\5&-6\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de *x* no existe la inversa de A. **(0,5 puntos)**

b) Para *x = 2*, resuelve la ecuación matricial $A\cdot X-B=C$. **(1,5 puntos)**.

a) Vemos para qué valores de *x* se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&x&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=x-1$$

$$|A|=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$$

No existe la inversa de A para *x = 1*.

b) Para *x = 2* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ y tiene inversa. La calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

Despejamos de la ecuación.

$$A\cdot X-B=C\Rightarrow A\cdot X=B+C\Rightarrow X=A^{-1}\left(B+C\right)$$

Sustituimos el valor de las matrices.

$$X=A^{-1}\left(B+C\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\\5&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\3&0\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&5\\8&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1+8&5-6\\-1+16&5-12\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}2&-2\\7&-1\\15&-7\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ y & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, los valores de *x*, *y*, *z* para que se verifique que $A^t\cdot B=C-z\cdot I$, siendo A^t la matriz traspuesta de *A*.

$$A^t\cdot B=C-z\cdot I\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -8\end{pmatrix}-z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -2x+4y & x-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z & 1\\ 0 & -8-z\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-2=-z\\ 1=1\\ -2x+4y=0\\ x-12=-8-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{z=2}\\ x-2y=0\\ x=-8+12-z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=0\\ \boxed{x=4-2=2}\end{cases}\Rightarrow 2-2y=0\Rightarrow\boxed{y=1}$$

Los valores buscados son *x = 2*, *y = 1*, *z = 2*

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Un taller tapiza butacas y sillones. Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela con un beneficio de 40 €, mientras que para tapizar un sillón se necesitan 4 m^2 de tela con un beneficio de 100 €. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela y no puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones.
Calcular, justificando la respuesta:
a) El número de butacas y de sillones que deben tapizar diariamente para obtener unos beneficios máximos. **(1,5 puntos)**
b) El valor de dichos beneficios máximos. **(0,5 puntos)**

Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de butacas a tapizar diariamente, y = número de sillones a tapizar diariamente.

Se desea maximizar los beneficios, siendo estos de 40 € por butaca y 100 € por sillón.

$$B(x,y)=40x+100y$$

"Para tapizar una butaca se necesitan 2 m^2 de tela y 4 m^2 para tapizar un sillón. El taller dispone diariamente de un máximo de 100 m^2 de tela" → $2x+4y\le 100$

"No puede tapizar más de 40 butacas ni más de 20 sillones" → $x\le 40;\ \ y\le 20$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos todas estas ecuaciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y\le 100 \\ x\le 40;\ \ y\le 20 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y\le 50 \\ x\le 40;\ \ y\le 20 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=50$

x	$y=\frac{50-x}{2}$
0	25
10	20

$y=20$

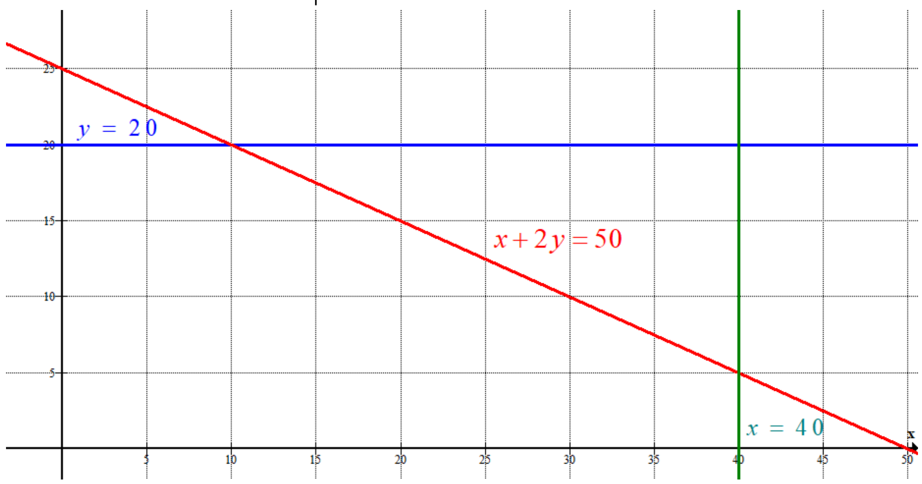
x	$y=20$
0	20
10	20

$x=40$

Recta vertical

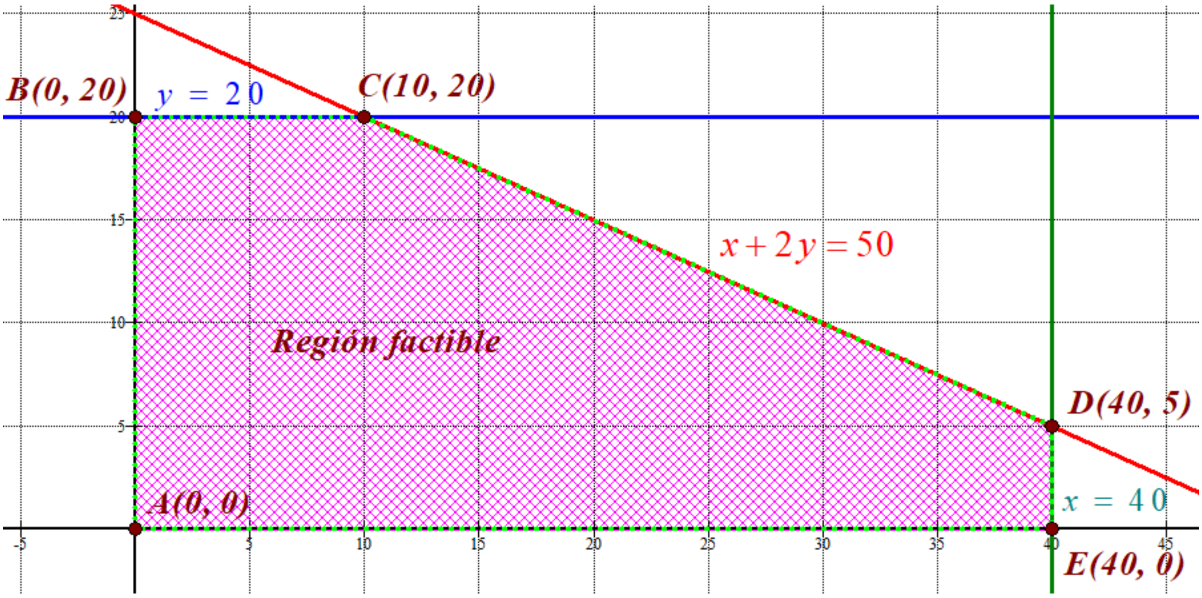
$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 50 \\ x\leq 40;\ \ y\leq 20 \\ x\geq 0;\ \ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja y azul y a la izquierda de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Beneficios $B(x,y)=40x+100y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 20) → $B(0,20)=0+2000=2000$

C(10, 20) → $B(10,20)=400+2000=2400$

D(40, 5) → $B(40,5)=1600+500=2100$

E(40, 0) → $B(40,0)=1600+0=1600$

El valor máximo es 2400 y se obtiene en el vértice C(10, 20).

a) El beneficio máximo se obtiene tapizando 10 butacas y 20 sillones.

b) El beneficio máximo que se puede conseguir sometido a las restricciones es 2400 €

PROBLEMA 5 (2 puntos)
El crecimiento (en cm) de una variedad de trigo, C(x), en función de la cantidad de fertilizante (en gramos por metro cuadrado) utilizada, x, viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \qquad 0 \leq x \leq 4$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que el crecimiento alcanza su mínimo con una dosis de 3 gramos por metro cuadrado y que para esta dosis las plantas de trigo crecen 8 cm.

Si alcanza su mínimo en $x = 3$ se debe cumplir que C ´(3) = 0.

$$\left.\begin{array}{r} C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \Rightarrow C'(x) = 6x^2 - 2Ax + B \\ C'(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3A + B = 0 \Rightarrow \boxed{54 - 6A + B = 0}$$

También se cumple que C(3) = 8.

$$\left.\begin{array}{r} C(x) = 2x^3 - Ax^2 + Bx + 35 \\ C(3) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 3^3 - A \cdot 3^2 + 3B + 35 = 8 \Rightarrow 54 - 9A + 3B = -27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9A + 3B = -81 \Rightarrow \boxed{3A - B = 27}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} -6A + B = -54 \\ 3A - B = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Sumo las dos ecuaciones}\} \Rightarrow -3A = -27 \Rightarrow \boxed{A = 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 - B = 27 \Rightarrow \boxed{B = 27 - 27 = 0}$$

Comprobamos que con $A = 9$ y $B = 0$ la función tiene un mínimo en $x = 3$. Para ello comprobamos que la derivada segunda es positiva.

$$C(x) = 2x^3 - 9x^2 + 35 \Rightarrow C'(x) = 6x^2 - 18x \Rightarrow C''(x) = 12x - 18 \Rightarrow C''(3) = 36 - 18 = 18 > 0$$

Se cumple que para $A = 9$ y $B = 0$ la función tiene un mínimo en $x = 3$

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Las ventas de un producto (en miles de euros), V(t), en los 6 primeros años desde que se lanzó al mercado, evolucionan de acuerdo con la siguiente función:

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \le t \le 6$$

Se pide determinar, razonando las respuestas:
a) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las ventas a lo largo de los 6 años. **(1,5 puntos)**
b) Representar gráficamente la función V(t). **(0,5 puntos)**

a) Analizamos la evolución del signo de la derivada.

$$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \Rightarrow V'(t) = 12t^2 - 48t + 36$$

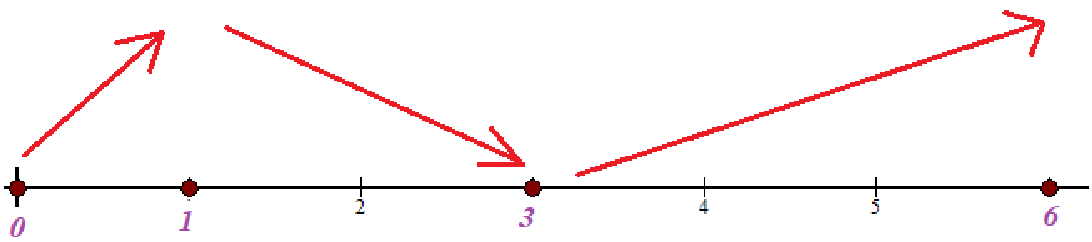
$$V'(t) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 48t + 36 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4-2}{2} = 1 \\ \frac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son *x = 1* y *x = 3*.
Estudiamos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

- En (0, 1) tomamos *x = 0.5* y la derivada vale $V'(0.5) = 12 \cdot 0.5^2 - 24 + 36 = 15 > 0$. La función crece en (0, 1).
- En (1, 3) tomamos *x = 2* y la derivada vale $V'(2) = 12 \cdot 2^2 - 96 + 36 = -12 < 0$. La función decrece en (1, 3).
- En (3, 6) tomamos *x = 4* y la derivada vale $V'(4) = 12 \cdot 4^2 - 48 \cdot 4 + 36 = 36 > 0$. La función crece en (3, 6).

Las ventas crecen durante el primer año y del tercero al sexto. Decrecen las ventas entre el primer y tercer año.

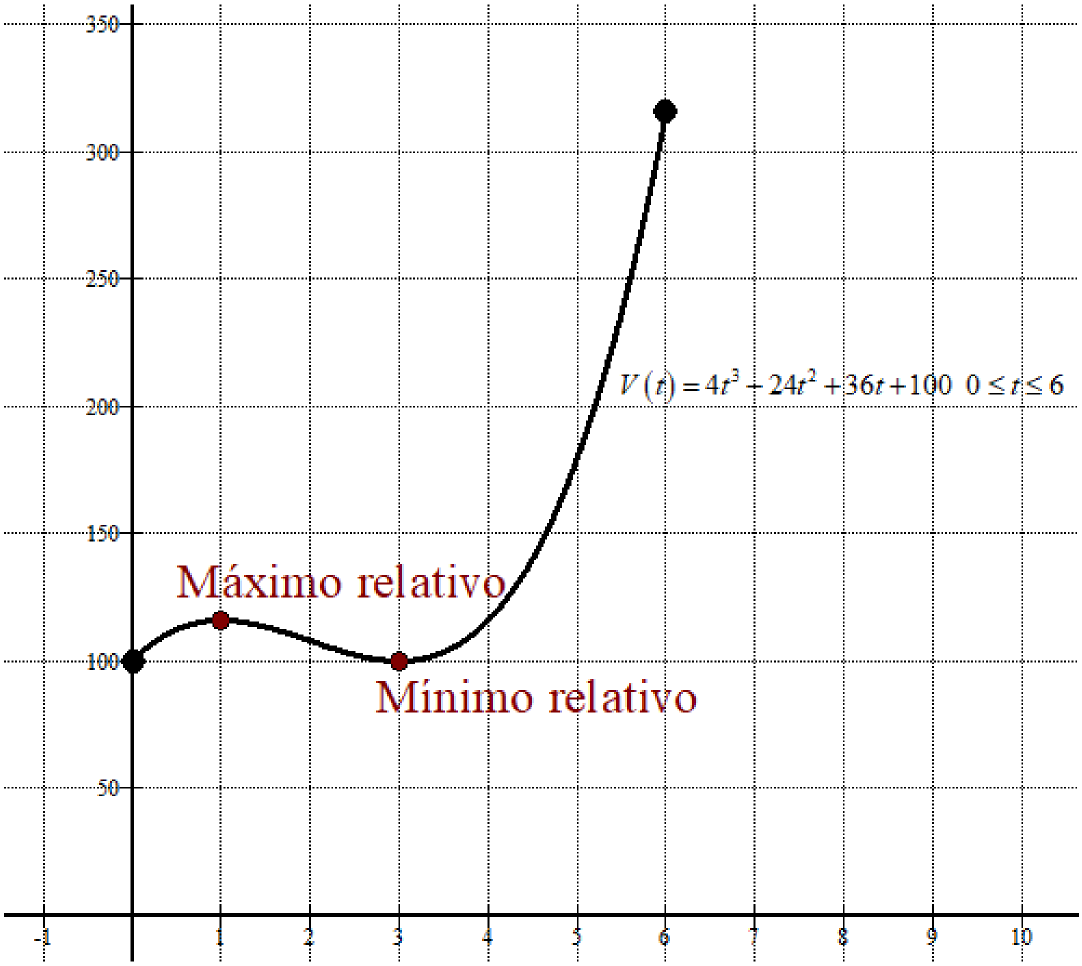
b) Por lo visto en el apartado anterior la gráfica sigue el esquema:



Por lo que la función presenta un máximo relativo en *x = 1* y un mínimo relativo en *x = 3*.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100$
0	100
1	116
3	100
6	316


$V(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t + 100 \quad 0 \le t \le 6$
Máximo relativo
Mínimo relativo
350
300
250
200
150
100
50
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

PROBLEMA 7 **(2 puntos)**
a) Determinar el área encerrada por la función $f(x)=x^2-7x+6$ y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 5$.
(1 punto)
b) Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función: **(1 punto)**

$$g(x)=\frac{4x^2+1}{2\left(x^2-7x+6\right)}$$

a) Averiguamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-24}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{7-5}{2}=1\\ \dfrac{7+5}{2}=6\end{cases}$$

El único punto de corte situado entre $x = 0$ y $x = 5$ es $x = 1$.
Para calcular el área hacemos dos integrales definidas y luego sumamos el valor absoluto de ambas integrales.

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2-7x+6dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_0^1=\left[\frac{1^3}{3}-\frac{7}{2}1^2+6\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{7}{2}0^2+0\right]=\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6=\boxed{\frac{17}{6}}$$

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_1^5 x^2-7x+6dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{7}{2}x^2+6x\right]_1^5=\left[\frac{5^3}{3}-\frac{7}{2}5^2+30\right]-\left[\frac{1^3}{3}-\frac{7}{2}1^2+6\right]=\boxed{-\frac{56}{3}}$$

El área total es $\left|\frac{17}{6}\right|+\left|-\frac{56}{3}\right|=\frac{17}{6}+\frac{112}{6}=\frac{129}{6}=\boxed{21.5\,u^2}$

b) Averiguamos primero el dominio de la función $g(x)=\dfrac{4x^2+1}{2\left(x^2-7x+6\right)}$.

$$x^2-7x+6=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-24}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{7-5}{2}=1\\ \dfrac{7+5}{2}=6\end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{1,6\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x = 1$?

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+1}{2\left(x^2-7x+6\right)}=\frac{5}{0}=\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical

¿$x = 6$?

$$\lim_{x\to 6} g(x)=\lim_{x\to 6}\frac{4x^2+1}{2\left(x^2-7x+6\right)}=\frac{145}{0}=\infty$$

$x = 6$ es asíntota vertical

Tiene dos asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = 6$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 1}{2\left(x^2 - 7x + 6\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2 - 14x + 12} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{14x}{x^2} + \frac{12}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{14}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{4 + \frac{1}{\infty}}{2 - \frac{14}{\infty} + \frac{12}{\infty}} = \frac{4 + 0}{2 - 0 + 0} = 2$$

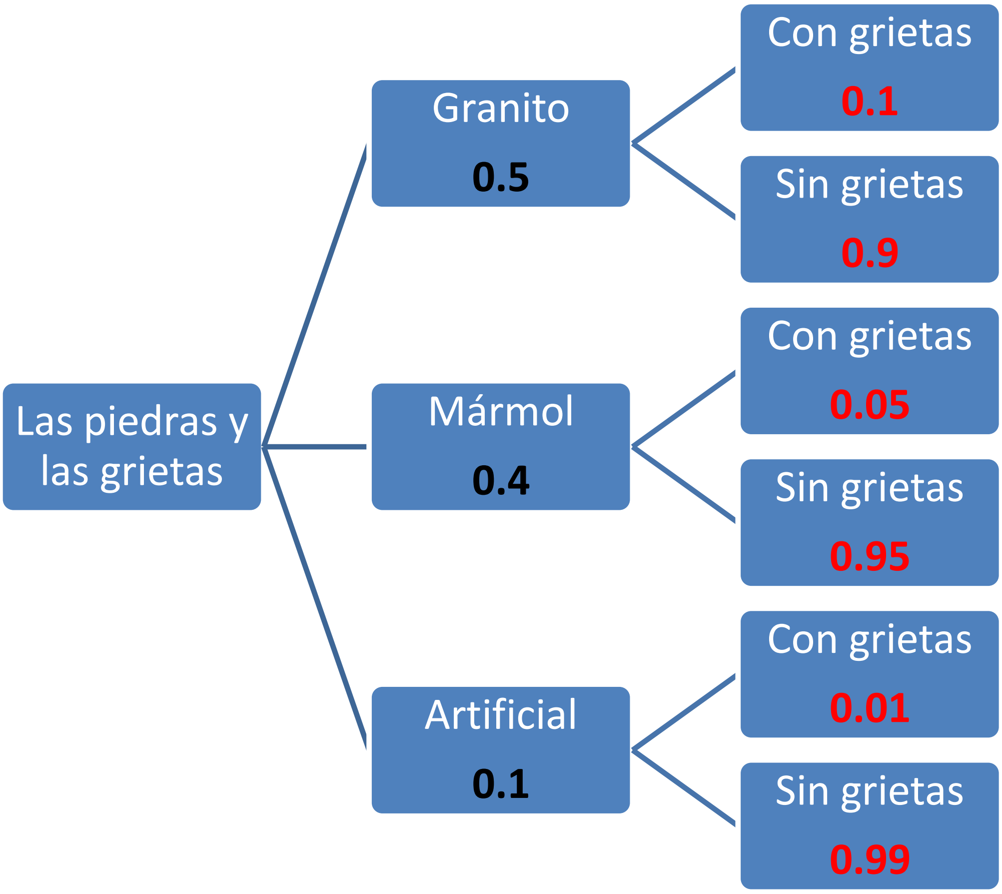
La asíntota horizontal es $y = 2$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe, pues hay asíntota oblicua.

PROBLEMA 8 **(2 puntos)**
Una empresa constructora utiliza tres tipos de piedra en un bloque de edificios: granito (50%), mármol (40%) y artificial (10%). El 10% del granito, el 5% del mármol y el 1% de la artificial presenta grietas por lo que no puede ser instalado. Se pide, razonando la respuesta:
a) Calcular la probabilidad de que, al encargar una piedra, ésta presente grietas. **(1 punto)**
b) Calcular la probabilidad de que una piedra, que sabemos que presenta grietas, sea de mármol. **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos G = "La piedra es de granito", M = "La piedra es de mármol", A = "La piedra es artificial". B = "La piedra tiene grietas", $\overline{B}$ = "La piedra no tiene grietas".

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(B) = P(G \cap B) + P(M \cap B) + P(A \cap B) =$$
$$= P(G)P(B/G) + P(M)P(B/M) + P(A)P(B/A) =$$
$$= 0.5 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.01 = 0.05 + 0.02 + 0.001 = \boxed{0.071}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(M/B) = \frac{P(M \cap B)}{P(B)} = \frac{P(M)P(B/M)}{P(B)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.071} = \boxed{\frac{20}{71} \simeq 0.282}$$

PROBLEMA 9 **(2 puntos)**
En un estudio sobre la práctica del deporte en la universidad, se pregunta a 150 universitarios de los cuales 120 afirman practicar algún deporte. Calcular, razonando la respuesta, un intervalo de confianza al nivel de confianza del 95% para la proporción de universitarios que practican deporte. Razona la respuesta.

La proporción muestral es $pr = \frac{120}{150} = \frac{4}{5} = 0.8$ con n = 150.

El nivel de confianza del 95% significa que

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El error es

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot (1 - pr)}{n}} = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{150}} \simeq 0.064$$

El intervalo de confianza para la proporción de practicantes de deporte es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error \right) = \left(0.8 - 0.064,\ 0.8 + 0.064 \right) = \left(0.736,\ \ 0.864 \right)$$

El intervalo de confianza es $\left(0.736,\ \ 0.864 \right)$

PROBLEMA 10 **(2 puntos)**
La calificación que obtienen los candidatos que se presentan a una oposición sigue una distribución normal con desviación típica 1.2 puntos. Si se quiere realizar un estudio sobre la dificultad de las pruebas en dicha oposición, ¿cuántos candidatos deben seleccionarse para obtener un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la calificación media que tenga una longitud de 0.5 puntos? Razona la respuesta.

Sea X = Puntuación en una oposición.

X = N(μ, 1.2)

El nivel de confianza del 95% significa que

$$1 - \propto = 0,95 \rightarrow \propto = 0,05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1,96}$$

El error es la mitad de la longitud del intervalo de confianza → Error = 0.5/2 = 0.25

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.25 = 1,96 \cdot \frac{1.2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1,96 \cdot \frac{1.2}{0.25} = 9,408 \Rightarrow n = 9,408^2 = 88.51$$

El tamaño de la muestra debe ser entero y mayor de 88.51.
El tamaño mínimo es de 89 opositores.