UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	**Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)** **Curso Académico:** 2016 - 2017 **ASIGNATURA:** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS

INSTRUCCIONES

a) Responde solo a una de las dos opciones (OPCIÓN A / OPCIÓN B).
b) No está permitido el uso de calculadoras gráficas o programables.

OPCIÓN A

Parte A1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x+b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva y= f (x) pasa por el punto (1,1) y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando a= 1/3 y b= – 1/3, calcula $\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot f(x)}{x^2-1}$.

Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

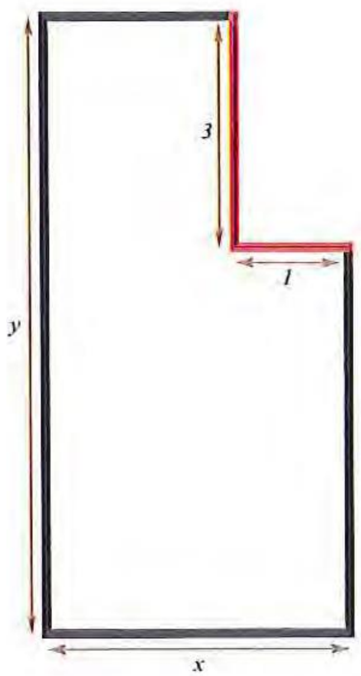
	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de *snacks* vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos ele productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de un muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte A2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos)



Sobre dos muros formando un ángulo recto de longitudes respectivas 1 y 3 metros (en rojo en la figura de la izquierda) vamos a construir una casa con una planta como la de la figura. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Si queremos que la planta tenga un área de 22 metros cuadrados, determinar los valores de x e y para que el número de metros de muro que debemos construir sea mínimo.

b) Si deseamos cerrar la planta construyendo 36 metros de muro, determinar los valores de x e y para que el área de la planta sea máxima.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a-5 & a-2 \\ 4-a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de a para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a=-1$, determinar una matriz X tal que $A \cdot X = A^t - A + 8 \cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz A e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) Nuestro amigo José, reciente ganador de un concurso local de tortillas, elabora la tortilla de su bar usando patatas y huevos. Un 80% de las tortillas las hace exclusivamente con patatas de Santo Domingo de la Calzada y el resto con patatas de otras zonas. Cuando emplea patatas de Santo Domingo, en el 60% de los casos pone únicamente huevos de gallinas camperas y en el 40% restante utiliza huevos de granja avícola. Cuando la patata no es de Santo Domingo invierte los porcentajes a la hora de añadir los huevos.

a) Cuando tomamos un pincho en el bar de José, ¿cuál es la probabilidad de que esté hecho con huevos de gallina campera?

b) Si la tortilla está hecha con huevos camperos, ¿cuál es la probabilidad de que lleve patatas de Santo Domingo?

OPCIÓN B

Parte B1: Responde a cada una de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 6 puntos.

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva y= f (x) pasa por el punto (1,1) y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando a= 1/3 y b= – 1/3, calcula $\lim_{x \to 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas ele *snacks* vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos ele productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de un muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Parte B2: Responde a dos de las tres preguntas que se plantean a continuación. Su valor total es de 4 puntos.

Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Sea la función $f(x) = \frac{x}{2-x}$.

a) Determinar las asíntotas de la función dada.

b) Calcular la integral definida $\int_0^2 (2-x)\cdot\left(f(x)-x\right)dx$

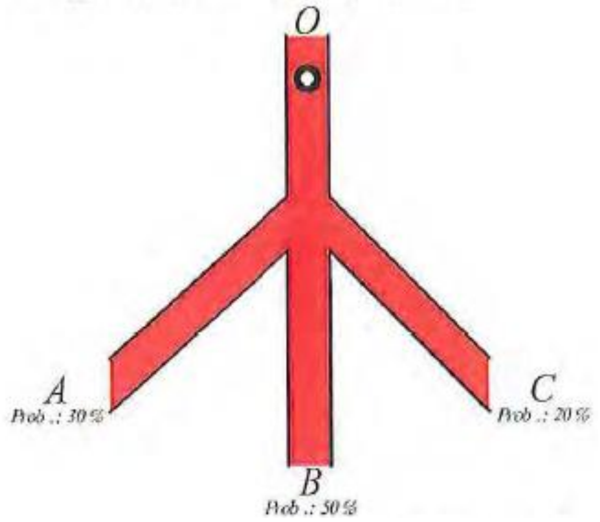
Pregunta B2.2. (1 + 1 puntos) Los productores de las películas de *James Bond* ya se han puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

l. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.
Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.

b) Si cada escena de acción aporta 0.8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1.2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos)



En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por *A* con una probabilidad del 30%, por *B* con una probabilidad del 50% y por *C* con una probabilidad del 20%. Tras tres lanzamientos, calcular:
a) la probabilidad de que la canica haya salido por *C* en algún lanzamiento;
b) la probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.

Tabla abreviada de la normal tipificada.

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,7580	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9430	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9700	0,9706

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Pregunta A1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x+b$, con a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva y = f(x) pasa por el punto (1,1) y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando a= 1/3 y b= – 1/3, calcula $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3\cdot f(x)}{x^2-1}$.

a) Si la función $f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x+b$ pasa por (1, 1) entonces $f(1)=1$.

$$f(1)=1=1^3-3a+3a^2+b \Rightarrow \boxed{3a^2-3a+b=0}$$

Si la recta tangente en x = 1 tiene pendiente 12, quiere decir que $f'(1)=12$.

$$f(x)=x^3-3ax^2+3a^2x+b \Rightarrow f'(x)=3x^2-6ax+3a^2$$

$$f'(1)=12 \Rightarrow f'(1)=12=3-6a+3a^2 \Rightarrow 3a^2-6a-9=0 \Rightarrow a^2-2a-3=0$$

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}=\frac{2+4}{2}=3\\[4pt] =\frac{2-4}{2}=-1\end{cases}$$

Como a es un número real positivo rechazamos la solución $a = -1$.

Sustituimos en la ecuación $3a^2-3a+b=0$ y determinamos el valor de b:

$$\left.\begin{array}{l}3a^2-3a+b=0\\ a=3\end{array}\right\} \Rightarrow 27-9+b=0 \Rightarrow b=-18$$

Los valores buscados son $a = 3$ y $b = -18$.

b) Tomando a = 1/3 y b = – 1/3 la función queda $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot\left(x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}$$

Factorizo numerador y denominador para resolver la indeterminación.

NUMERADOR $\rightarrow$ *Hacemos Ruffini*

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -3 & 1 & -1\\ 1 & & 3 & 0 & 1\\ \hline & 3 & 0 & 1 & \boxed{0}\end{array} \Rightarrow 3x^3-3x^2+x-1=(x-1)(3x^2+1)$$

DENOMINADOR $\rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow x^2-1=(x-1)(x+1)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\cdot f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(3x^2+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{x+1}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

Pregunta A1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas de *snacks* vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema ele ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos de productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

a) Llamemos ***x*** al precio de un refresco, ***y*** al precio de un bocadillo, ***z*** al precio de una bolsa de snacks.

Los ingresos del primer quiosco son 210 € → $20x+40y+20z=210$
Los ingresos del segundo quiosco son 131 € → $12x+25y+13z=131$
Los ingresos del tercer quiosco son 178 € → $15x+32y+24z=178$

Si juntamos las tres ecuaciones obtenemos un sistema:

$$\left.\begin{array}{r}20x+40y+20z=210\\12x+25y+13z=131\\15x+32y+24z=178\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x+4y+2z=21\\12x+25y+13z=131\\15x+32y+24z=178\end{array}\right\}$$

b) Resolvamos el sistema planteado aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{r}2x+4y+2z=21\\12x+25y+13z=131\\15x+32y+24z=178\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=10,5\\12x+25y+13z=131\\15x+32y+24z=178\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2ª - 12 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}12x&+25y&+13z&=131\\-12x&-24y&-12z&=-126\\\hline &y&+z&=5\end{array}\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª - 15 · Ecuación 1ª}\\ \begin{array}{rrrr}15x&+32y&+24z&=178\\-15x&-30y&-15z&=-157,5\\\hline &2y&+9z&=20,5\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+z=10,5\\y+z=5\\2y+9z=20,5\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª - 2 · Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrcr}2y&+9z&=&20,5\\-2y&-2z&=&-10\\\hline &7z&=&10,5\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y+z=10,5\\y+z=5\\7z=10,5\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{z=\frac{10,5}{7}=1,5}\Rightarrow y+1,5=5\Rightarrow\boxed{y=3,5}\Rightarrow x+7+1,5=10,5\Rightarrow\boxed{x=2}$$

El precio del refresco es 2 €, el del bocadillo es 3,5 € y la bolsa de snacks es 1,5 €.

Pregunta A1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de un muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Llamemos X = Peso de las peras de un agricultor. X = N(μ, 25)

a) $\bar{x} = 150\ g; \quad n = 121$

Con el nivel de confianza del 90% significa que
$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,645**

El error es $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{25}{\sqrt{121}} = 3.739$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(150 - 3.739, 150 + 3.739\right)$$

El intervalo de confianza es $\left(146.261, 153.739\right)$

b) Para un nivel de confianza del 85% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0{,}85 \rightarrow \alpha = 0{,}15 \rightarrow \alpha/2 = 0'075 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}925 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,44**

Como el intervalo de confianza es (156.4, 163.6) y la media es el valor central

$$\boxed{\bar{x} = \frac{156{,}4 + 163{,}6}{2} = 160\ gramos}$$

Y el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

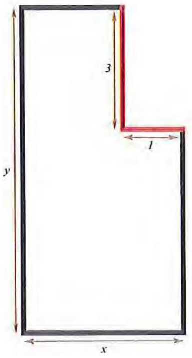
$$Error = \frac{163{,}6 - 156{,}4}{2} = 3{,}6\ gramos$$

Por la fórmula del error se cumple:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3{,}6 = 1{,}44 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1{,}44 \cdot \frac{25}{3{,}6} \Rightarrow n = \left(1{,}44 \cdot \frac{25}{3{,}6}\right)^2 = 100$$

La media es 160 gramos y el tamaño de la muestra es de 100 peras.

Pregunta A2.1. (1 + 1 puntos)

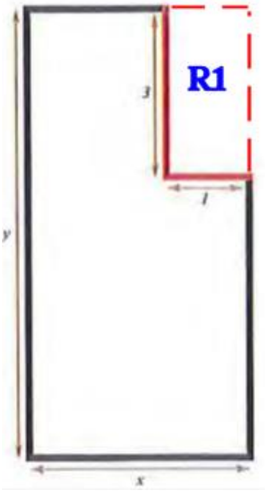


Sobre dos muros formando un ángulo recto de longitudes respectivas 1 y 3 metros (en rojo en la figura de la izquierda) vamos a construir una casa con una planta como la de la figura. Responde a las siguientes cuestiones.

a) Si queremos que la planta tenga un área de 22 metros cuadrados, determinar los valores de x e y para que el número de metros de muro que debemos construir sea mínimo.

b) Si deseamos cerrar la planta construyendo 36 metros de muro, determinar los valores de x e y para que el área de la planta sea máxima.

a) El área de la planta se puede calcular como el área del rectángulo de lados x e y (rectángulo completo) menos el área del rectángulo rojo (R1) de lados l y 3. Ver figura izquierda.

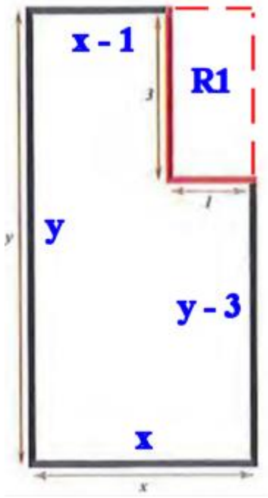


$Área(x,y) = xy - 3\cdot 1 = xy - 3$.

Como debe ser un área de 22 m^2 →

$Área(x,y) = xy - 3 = 22 \Rightarrow xy = 25 \Rightarrow y = \dfrac{25}{x}$

Queremos minimizar la longitud del muro. Esta longitud es la suma de los lados de la figura que son negros y cuyo valor indico en azul en la figura de la derecha.



$$\left.\begin{array}{l} L(x,y) = x + y + y - 3 + x - 1 = 2x + 2y - 4 \\ y = \dfrac{25}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow L(x) = 2x + 2\dfrac{25}{x} - 4 = 2x + \dfrac{50}{x} - 4$$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero.

$$L(x) = 2x + \frac{50}{x} - 4 \Rightarrow L'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

$$L'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{50}{x^2} \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

Rechazamos el valor –5 pues carece de sentido al ser una medida de longitud.

Vemos si es un mínimo o no sustituyendo en la derivada segunda.

$$L'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} \Rightarrow L''(x) = \frac{100}{x^3}$$

$$L''(5) = \frac{100}{125} > 0$$

Para $x = 5$ el muro tendrá una longitud mínima.

Los valores buscados son $x = 5$ metros e $y = \dfrac{25}{5} = 5$ metros

b) El área de la planta es $Área(x,y) = xy - 3$ y la longitud de muro es $L(x,y) = 2x + 2y - 4$.
La longitud del muro debe ser 36, por lo que:

$$L(x,y) = 2x + 2y - 4 = 36 \Rightarrow 2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$$

Sustituimos en la expresión del área $Área(x,y) = xy - 3 = x(20 - x) - 3 = -x^2 + 20x - 3$

Derivamos la función Área en busca de sus posibles máximos.

$$Área(x) = -x^2 + 20x - 3 \Rightarrow Área\,´(x) = -2x + 20$$

$$Área\,´(x) = 0 \Rightarrow -2x + 20 = 0 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

Calculamos su segunda derivada, sustituimos el valor $x = 10$ y comprobamos si es un máximo.

$$Área\,´(x) = -2x + 20 \Rightarrow Área\,´´(x) = -2$$

$$Área\,´´(10) = -2 < 0$$

En $x = 10$ hay un máximo.

El área es máxima para $x = 10$ e $y = 20 - 10 = 10$.

Pregunta A2.2. (1 + 1 puntos) Consideremos la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2a-5 & a-2\\ 4-a & 1\end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de *a* para los que existe la matriz inversa A^{-1}.

b) Tomando $a=-1$, determinar una matriz *X* tal que $A\cdot X=A^t-A+8\cdot I_2$.

(Nota: A^t indica la matriz traspuesta de la matriz *A* e I_2 la matriz identidad de orden dos.)

a) La matriz $A=\begin{pmatrix}2a-5 & a-2\\ 4-a & 1\end{pmatrix}$ tiene determinante

$$|A|=\begin{vmatrix}2a-5 & a-2\\ 4-a & 1\end{vmatrix}=2a-5-(a-2)(4-a)=\cancel{2a}-5-4a+a^2+8-\cancel{2a}=a^2-4a+3$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-4a+3=0\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}=\frac{4+2}{2}=3\\ =\frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

Existe la matriz inversa para todos los valores de *a* que no anulen el determinante, es decir, para todo valor de *a* distinto de 1 y 3.

b) Para $a=-1$ la matriz A tiene inversa.

Esta matriz queda $A=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ 5 & 1\end{pmatrix}$ y su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix}-7 & -3\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-7+15=8$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-7 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{8}=\frac{\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}}{8}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación la matriz X, multiplicando por la inversa de A por la izquierda.

$$A\cdot X=A^t-A+8\cdot I_2\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot\left(A^t-A+8\cdot I_2\right)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot A^t-A^{-1}\cdot A+8\cdot A^{-1}$$

$$X=A^{-1}\cdot A^t-I_2+8\cdot A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices y hacemos las operaciones indicadas.

$$X=A^{-1}\cdot A^t-I_2+8\cdot A^{-1}$$

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+8\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-16 & 8\\ 56 & -32\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3\\ -5 & -7\end{pmatrix}$$

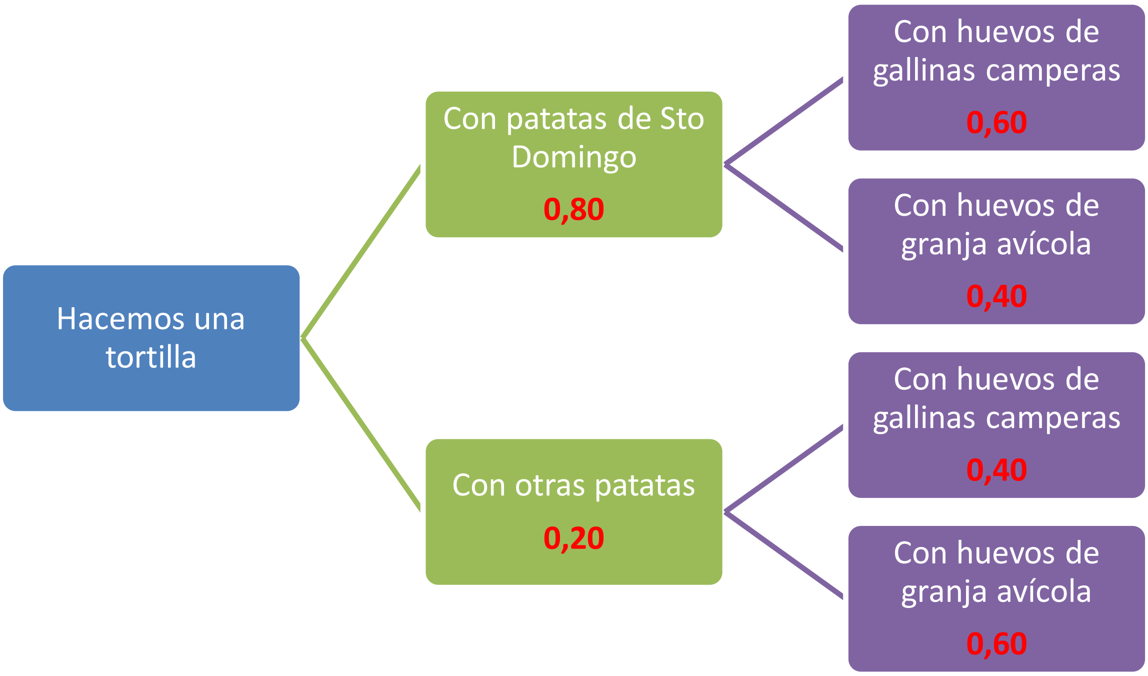
$$X=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 7 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 3\\ -5 & -8\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & -12\end{pmatrix}}$$

Pregunta A2.3. (1 + 1 puntos) Nuestro amigo José, reciente ganador de un concurso local de tortillas, elabora la tortilla de su bar usando patatas y huevos. Un 80% de las tortillas las hace exclusivamente con patatas de Santo Domingo de la Calzada y el resto con patatas de otras zonas. Cuando emplea patatas de Santo Domingo, en el 60% de los casos pone únicamente huevos de gallinas camperas y en el 40% restante utiliza huevos de granja avícola. Cuando la patata no es de Santo Domingo invierte los porcentajes a la hora de añadir los huevos.

a) Cuando tomamos un pincho en el bar de José, ¿cuál es la probabilidad de que esté hecho con huevos de gallina campera?
b) Si la tortilla está hecha con huevos camperos, ¿cuál es la probabilidad de que lleve patatas de Santo Domingo?

Realicemos un diagrama de árbol para aclarar la situación.



a)

$$P(\text{Con huevos de gallina campera}) =$$
$$= P(\text{Con patatas de Sto Domingo})P(\text{Con huevos camperos / Con patatas de Sto Domingo}) +$$
$$+(\text{Con otras patatas})P(\text{Con huevos de gallina campera / Con otras patatas}) =$$
$$= 0,80 \cdot 0,60 + 0,20 \cdot 0,40 = 0,48 + 0,08 = \boxed{0,56}$$

b)

$$P(\text{Con patatas de Sto Domingo / Con huevos camperos}) =$$
$$= \frac{P(\text{Con patatas de Sto Domingo y Con huevos camperos})}{P(\text{Con huevos camperos})} =$$
$$= \frac{P(\text{Con patatas de Sto Domingo})P(\text{Con huevos camperos / Con patatas de Sto Domingo})}{P(\text{Con huevos camperos})} =$$
$$= \frac{0,80 \cdot 0,60}{0,56} = \frac{0,48}{0,56} = \frac{48}{56} = \boxed{\frac{6}{7} = 0,857}$$

OPCIÓN B

Pregunta B1.1. (1 + 1 puntos) Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, con *a* un valor real positivo.

a) Determinar *a* y *b* sabiendo que la curva y= *f* (x) pasa por el punto (1,1) y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente doce.

b) Tomando *a*= 1/3 y *b*= – 1/3, calcula $\lim_{x\to 1} \frac{3 \cdot f(x)}{x^2 - 1}$.

Igual que el ejercicio A1.1. Hecho en la opción A

Pregunta B1.2. (1 + 1 puntos) En la sociedad recreativa *Los Pelendones* hay tres quioscos en los que se venden refrescos, bocadillos y bolsas de *snacks* (patatas fritas, cortezas, cacahuetes, etc.). Todos los productos del mismo tipo tienen un único precio; es decir, todos los refrescos cuestan igual y lo mismo para los bocadillos y las bolsas de *snacks*. A lo largo de un día de verano la distribución de ventas y los ingresos de los tres quioscos aparecen reflejados en la tabla adjunta.

	Primer quiosco	Segundo quiosco	Tercer quiosco
Refrescos vendidos	20	12	15
Bocadillos vendidos	40	25	32
Bolsas ele *snacks* vendidas	20	13	24
Ingresos (en euros)	210 €	131 €	178 €

a) Plantea un sistema ele ecuaciones que permita determinar el precio de cada uno de los tipos ele productos que se venden en los quioscos de la sociedad.
b) Determina el precio de los distintos tipos de productos.

Igual que el ejercicio A1.2. Hecho en la opción A

Pregunta B1.3. (1 + 1 puntos) El peso de las peras de una cosecha en Rincón de Soto sigue una distribución normal con una desviación típica de 25 gramos.
a) Supongamos que tomamos una muestra de 121 peras y obtenemos un peso medio de 150 gramos, determinar un intervalo de confianza al 90% para la media del peso.
b) ¿Cuál habrá sido el tamaño y la media de un muestra si el intervalo de confianza al 85% obtenido para la media del peso es (156.4, 163.6)?
(Véase la **Tabla simplificada para la normal tipificada** al final del examen.)

Igual que el ejercicio A1.3. Hecho en la opción A

Pregunta B2.1. (1 + 1 puntos) Sea la función $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$.

a) Determinar las asíntotas de la función dada.

b) Calcular la integral definida $\int_0^2 (2-x)\cdot\left(f(x)-x\right)dx$

a) El dominio de la función $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$ son todos los reales menos los que anulan el denominador. Dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$

- Asíntota vertical. $x=a$
  La asíntota vertical es $x=2$
  $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{2-x}=\dfrac{2}{0}=\infty$

- Asíntota horizontal. $y=b$
  $b=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}-1=-1$
  La asíntota horizontal es $y=-1$

- Asíntota oblicua. $y=mx+n$. No existe pues existe asíntota horizontal.

b)

$$\int_0^2 (2-x)\cdot\left(f(x)-x\right)dx=\int_0^2 (2-x)\cdot\left(\frac{x}{2-x}-x\right)dx=\int_0^2 \cancel{(2-x)}\cdot\left(\frac{x-2x+x^2}{\cancel{2-x}}\right)dx=$$

$$=\int_0^2 -x+x^2dx=\left[-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[-\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}\right]-\left[-\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3}\right]=-2+\frac{8}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

Pregunta B2.2. (1 + 1 puntos) Los productores de las películas de *James Bond* ya se han puesto a trabajar en la próxima entrega de la saga. Han decidido hacer una planificación de las secuencias de acción y de las persecuciones que introducirán en la nueva película y se han puesto las siguientes limitaciones:

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción.
2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción.
3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve.

Ayuda a los productores y resuelve las siguientes cuestiones:

a) Plantea el conjunto de restricciones y dibuja la región factible asociada con ellas.

b) Si cada escena de acción aporta 0.8 millones de espectadores a la película y cada persecución 1.2 millones, ¿cuál debe ser la distribución de persecuciones y escenas de acción para maximizar el número de espectadores que verán la película?

a) Es un problema de programación lineal en el que las variables son x = número de persecuciones e y = número de escenas de acción.

Expresemos las restricciones en inecuaciones.

1. La película debe contener al menos una persecución y dos escenas de acción → $x \geq 1 \quad y \geq 2$

2. El número de persecuciones debe ser menor o igual que el doble de las escenas de acción → $x \leq 2y$

3. La suma de persecuciones y escenas de acción debe ser menor o igual que nueve → $x + y \leq 9$

El conjunto de las restricciones es:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq 2 \\ y \geq \dfrac{x}{2} \\ y \leq 9 - x \end{array}\right\}$$

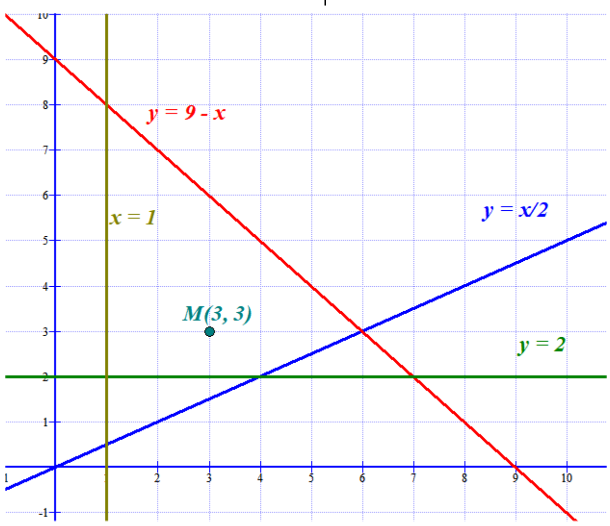
Dibujemos las rectas asociadas a las restricciones.

$x = 1$	y
1	0
1	2

x	$y = 2$
0	2
1	2

x	$y = \dfrac{x}{2}$
1	0,5
2	1
6	3

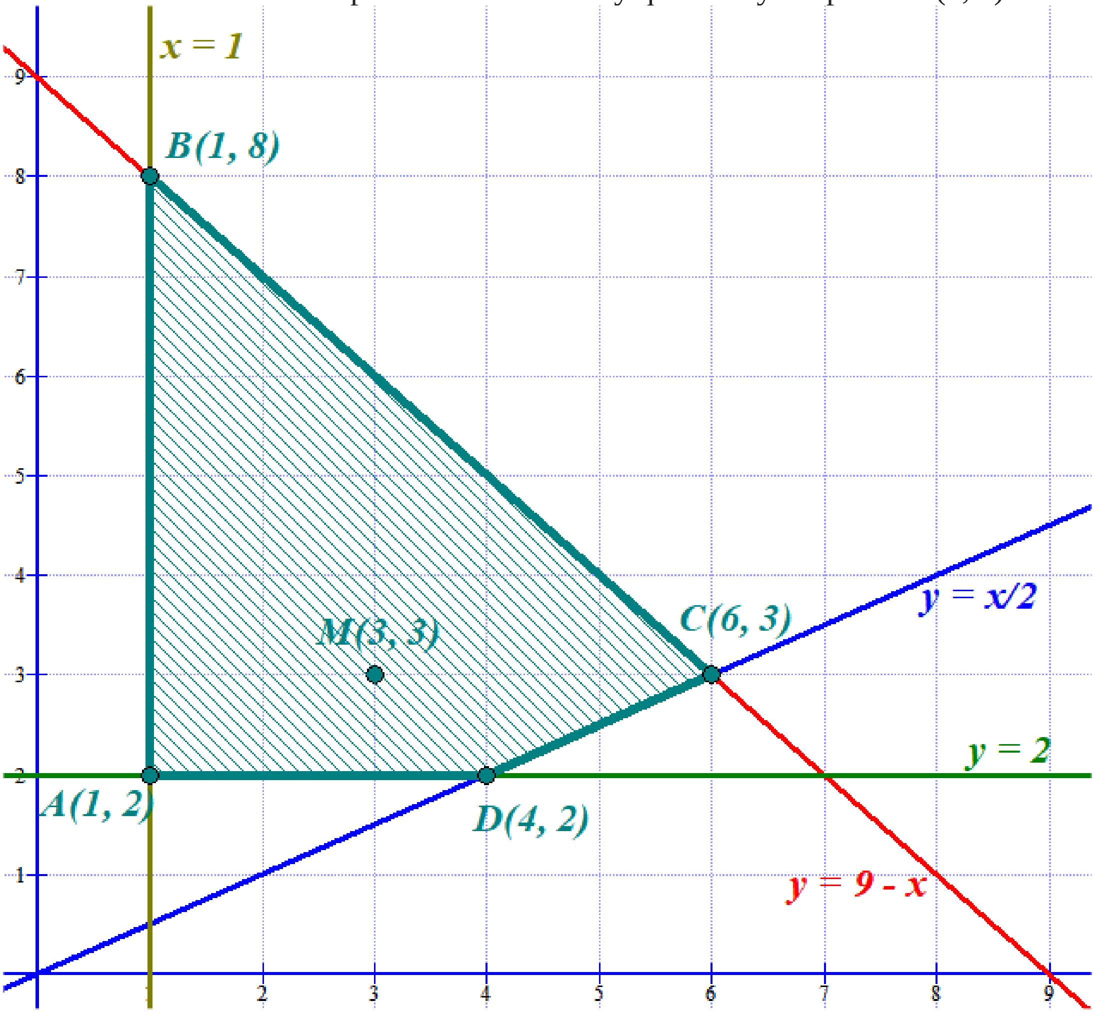
x	$y = 9 - x$
1	8
2	7
7	2



Comprobemos si el punto M(3, 3) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \geq 1 \\ 3 \geq 2 \\ 3 \leq 6 \\ 3+3 \leq 9 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas las restricciones.}$$

La región factible es la delimitada por las cuatro rectas y que incluye el punto M(3, 3).



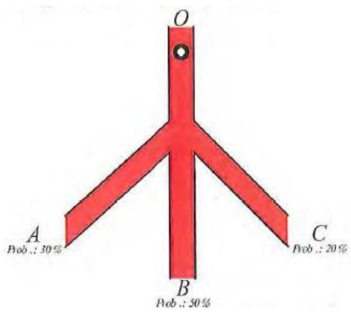
b) La función que nos da el número de espectadores (en millones) es $f(x, y) = 1,2x + 0,8y$. Valoramos el número de espectadores que se produce en cada vértice y así averiguamos en que situación este número es máximo.

A(1, 2) → $f(1,2) = 1,2 + 1,6 = 2,8$
B(1, 8) → $f(1,8) = 1,2 + 6,4 = 7,6$
C(6, 3) → $f(6,3) = 7,2 + 2,4 = 9,6$
D(4, 2) → $f(4,2) = 4,8 + 1,6 = 6,4$

El máximo se obtiene en el punto C(6, 3), que significa 6 persecuciones y 3 escenas de acción. El número máximo de espectadores es 9,6 millones.

Pregunta B2.3. (1 + 1 puntos)

En un dispositivo como el de la figura adjunta, una canica que se lanza desde el punto O sale por *A* con una probabilidad del 30%, por *B* con una probabilidad del 50% y por *C* con una probabilidad del 20%. Tras tres lanzamientos, calcular:



a) la probabilidad de que la canica haya salido por *C* en algún lanzamiento;

b) la probabilidad de que en los tres lanzamientos la canica haya salido por agujeros distintos.

a) Utilizaremos el suceso contrario, ya que los casos favorables al suceso directo son muchos y es más fácil con el contrario que solo ocurre de una forma. Utilizamos también que los lanzamientos son independientes y la probabilidad en cada lanzamiento es siempre la misma.

$$P(\text{Salga por C en algún lanzamiento}) = 1 - P(\text{No sale nunca por C}) =$$
$$= 1 - P(\text{No sale por C en el lanzamiento 1º})P(\text{No sale por C en el 2º})P(\text{No sale por C en el 3º}) =$$
$$= 1 - 0,80 \cdot 0,80 \cdot 0,80 = 1 - 0,512 = \boxed{0,488}$$

b) Este suceso ocurre de varias formas, calculamos la probabilidad de cada una de ellas y sumamos dichas probabilidades.

$$P(\text{La canica haya salido una vez por A, otra por B y otra por C}) =$$
$$= P(\text{Sale por A la 1ª})P(\text{Sale por B la 2ª})P(\text{Sale por C la 3ª}) +$$
$$+P(\text{Sale por A la 1ª})P(\text{Sale por C la 2ª})P(\text{Sale por B la 3ª}) +$$
$$+P(\text{Sale por B la 1ª})P(\text{Sale por A la 2ª})P(\text{Sale por C la 3ª}) +$$
$$+P(\text{Sale por B la 1ª})P(\text{Sale por C la 2ª})P(\text{Sale por A la 3ª}) +$$
$$+P(\text{Sale por C la 1ª})P(\text{Sale por A la 2ª})P(\text{Sale por B la 3ª}) +$$
$$+P(\text{Sale por C la 1ª})P(\text{Sale por B la 2ª})P(\text{Sale por A la 3ª}) =$$
$$= 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 +$$
$$+0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 + 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 =$$
$$= 6 \cdot 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 = \boxed{0,18}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como los lanzamientos son independientes, calculamos que pasa en una de las posibilidades favorables al suceso del cual estamos calculando su probabilidad y lo multiplicamos por las distintas formas que tienen de cumplirse que salgan por distintas salidas, que son permutaciones de 3, ya que es colocar tres letras (A, B y C) en las tres posiciones 1ª, 2ª y 3ª.

$$P(\text{La canica haya salido una vez por A, otra por B y otra por C}) =$$
$$= 3! \cdot P(\text{Sale por A la 1ª})P(\text{Sale por B la 2ª})P(\text{Sale por C la 3ª}) = 6 \cdot 0,30 \cdot 0,50 \cdot 0,20 = \boxed{0,18}$$