UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020 - 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Discute el siguiente sistema en función del parámetro *a* **[1.25 puntos]**:

$$\begin{aligned} x + ay \phantom{{}+2az} &= 1 \\ 2x - ay + 2az &= 5 \\ x + 3y - z &= 0 \end{aligned}$$

Resuelve el sistema si $a = 1$ **[1.25 puntos]**.

1.2.- Consideramos la ecuación matricial

$$X^2 - X = 2I$$

Donde I es la matriz identidad.

(i) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación? **[2 puntos]**

(ii) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices? **[0.25 puntos]**

(iii) Si X es una matriz cuadrada de orden *n* que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango? **[0.25 puntos]**

1.3.- En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad *x* de polvo sintético con una cantidad *y* de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones

$x + 2y \le 6$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),
$5x + 4y \le 20$ (para mantener la gama de color adecuada),
$y \le x$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

(a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades *x* e *y* que cumplen las restricciones. **[0.75 puntos]**
(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar? **[0.75 puntos]**
(c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo ($x + y$) que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo? **[1 punto]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma

$$f(x)=\frac{x(x+b)}{x^2-1}$$

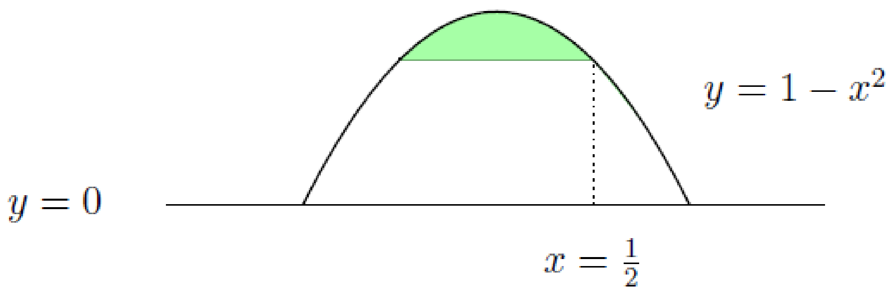
(i) ¿Para qué valores de b su gráfica tiene una sola asíntota vertical? **[1 punto]**
(ii) Estudia la existencia de extremos relativos de $f(x)$ si $b=-2$ **[1.5 puntos]**.

2.2.- Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo [–2, 2] según

$$f(x)=\begin{cases} 3-2x, & si \quad x\in[-2,a) \\ x+4, & si \quad x\in[a,b) \\ 5/x, & si \quad x\in[b,2] \end{cases}$$

Calcula los valores de a y b necesarios para que f sea continua **[1.25 puntos]**, y representa la función gráficamente **[1.25 puntos].**

2.3.- Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura:



[2.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura? **[1.25 puntos]**

(b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6? **[1.25 puntos]**

3.2.- Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35% de vino blanco, un 40% de vino de crianza y un 25% de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5% para el vino blanco, 4% para el crianza y 2% para el reserva.

(i) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado? **[1.75 puntos]**

(ii) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado? **[0.75 puntos]**

3.3.- Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

(a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr? **[1.25 puntos]**

(b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95% de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina **[1.25 puntos].**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.00744	0.00752	0.00760	0.00767	0.00774	0.00781	0.00788	0.00705	0.00801	0.00807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- Discute el siguiente sistema en función del parámetro *a* **[1.25 puntos]**:

$$\begin{aligned} x + ay \quad\quad &= 1 \\ 2x - ay + 2az &= 5 \\ x + 3y - \quad z &= 0 \end{aligned}$$

Resuelve el sistema si *a = 1* **[1.25 puntos]**.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 2 & -a & 2a & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Igualamos a cero el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -a & 2a \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a + 2a^2 + 0 - 0 + 2a - 6a = 2a^2 - 3a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a = 0 \Rightarrow a(2a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a - 3 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Establecemos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0 \quad y \quad a \neq \dfrac{3}{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ 2x &= 5 \\ x + 3y - \quad z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1 \\ x &= \frac{5}{2} \\ x + 3y - \quad z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad ¡IMPOSIBLE!$$

El sistema es **incompatible** (no tiene solución)

CASO 3. $a = \dfrac{3}{2}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+\frac{3}{2}y \qquad =1 \\ 2x-\frac{3}{2}y+2\frac{3}{2}z=5 \\ x+3y- \quad z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y \qquad =2 \\ 4x-3y+6z=10 \\ x+3y- \quad z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} \ - \ 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ 4x \quad -3y \quad +6z \quad =10 \\ -4x \quad -6y \qquad\quad =-4 \\ \hline \qquad -9y \quad +6z \quad =6 \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª} \ - \ 2\cdot\text{Ecuación 3ª} \\ 2x \quad +3y \qquad\quad =2 \\ -2x \quad -6y \quad +2z \quad =0 \\ \hline \qquad -3y \quad +2z \quad =2 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y \qquad =2 \\ -9y+6z=6 \\ -3y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y \qquad =2 \\ 3y-2z=-2 \\ -3y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ -3y \quad +2z \quad = \quad 2 \\ 3y \quad -2z \quad = \quad -2 \\ \hline \qquad\quad 0 \quad = \quad 0 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y \qquad = \ 2 \\ 3y-2z=-2 \\ 0= \ 0 \end{array}\right\}$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resolvemos el sistema para $a = 1$. Estamos en el caso 1 y por tanto el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y \qquad =1 \\ 2x-y+2z=5 \\ x+3y- \quad z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} \ - \ 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ 2x \quad -y \quad +2z \quad =5 \\ -2x \quad -2y \qquad\quad =-2 \\ \hline \qquad -3y \quad +2z \quad =3 \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} \ - \ \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad +3y \quad -z \quad =0 \\ -x \quad -y \qquad\quad =-1 \\ \hline \qquad 2y \quad -z \quad =-1 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \qquad =1 \\ -3y+2z=3 \\ 2y-z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación 2ª} + 3\cdot\text{Ecuación 3ª} \\ -6y \quad +4z \quad = \quad 6 \\ 6y \quad -3z \quad = \quad -3 \\ \hline \qquad\quad z \quad = \quad 3 \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \qquad =1 \\ -3y+2z=3 \\ \boxed{z=3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y \qquad =1 \\ -3y+6=3 \to -3y=3-6 \to \boxed{y=\frac{-3}{-3}=1} \end{array}\right\} \Rightarrow x+1=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema cuando $a = 1$ es $x = 0; y = 1; z = 3.$

1.2.- Consideramos la ecuación matricial

$$X^2 - X = 2I$$

Donde I es la matriz identidad.

(i) ¿Qué matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumplen la ecuación? **[2 puntos]**

(ii) ¿Se puede expresar en general la diferencia $X^2 - X$ como un producto de matrices? **[0.25 puntos]**

(iii) Si X es una matriz cuadrada de orden *n* que cumple la ecuación, ¿cuál es su rango? **[0.25 puntos]**

(i) Sustituimos en la ecuación matricial y la resolvemos.

$$X^2 - X = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & ab-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 - a & ab-b-b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 2 \\ ab - 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = 2 = a \\ o \\ \dfrac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases} \\ (a-2)b = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ o \\ b = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Como deben cumplirse las dos condiciones, esto solo ocurre con *a = 2* y el valor de *b* cualquiera. O bien *a = –1* y *b = 0.*

Las matrices serían $X = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, b \in \mathbb{R}$ o bien $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $X^2 - X = X \cdot X - X \cdot I = X(X - I)$. Esta es la expresión buscada.

(iii) Si X cumple la ecuación $X^2 - X = 2I$ entonces:

$$X^2 - X = 2I \Rightarrow X(X - I) = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}X(X - I) = \frac{1}{2}2I \Rightarrow X\left(\frac{1}{2}(X - I)\right) = I$$

Entonces la matriz X tiene inversa $X^{-1} = \frac{1}{2}(X - I)$. Lo que implica que el determinante de X es no nulo. Y por tanto su rango es máximo (n).

Si la matriz X es cuadrada de orden *n* cumple la ecuación entonces el rango de X es *n*.

1.3.- En el proceso de fabricación de cierta pintura se mezcla una cantidad x de polvo sintético con una cantidad y de polvo de un mineral. Se imponen las restricciones

$x+2y\le 6$ (para no rebasar un nivel de toxicidad en el proceso),

$5x+4y\le 20$ (para mantener la gama de color adecuada),

$y\le x$ (para que la viscosidad no sea excesiva).

(a) Dibuja en el plano la región factible de cantidades x e y que cumplen las restricciones. **[0.75 puntos]**

(b) ¿Cuál es la máxima cantidad de polvo de mineral que podemos usar? **[0.75 puntos]**

(c) ¿Cuál es la cantidad máxima posible de polvo (x + y) que permiten las restricciones, y cuánto incluye de cada tipo? **[1 punto]**

(a) Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x+2y=6$

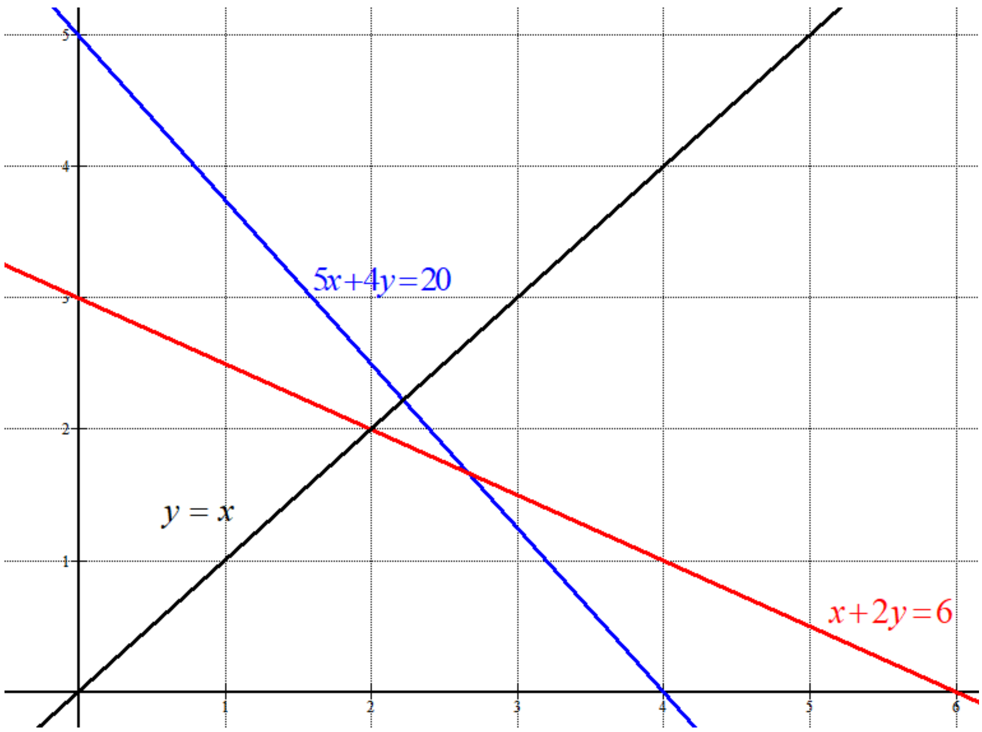
x	$y=\dfrac{6-x}{2}$
0	3
2	2
6	0

$5x+4y=20$

x	$y=\dfrac{20-5x}{4}$
0	5
4	0
2	2.5

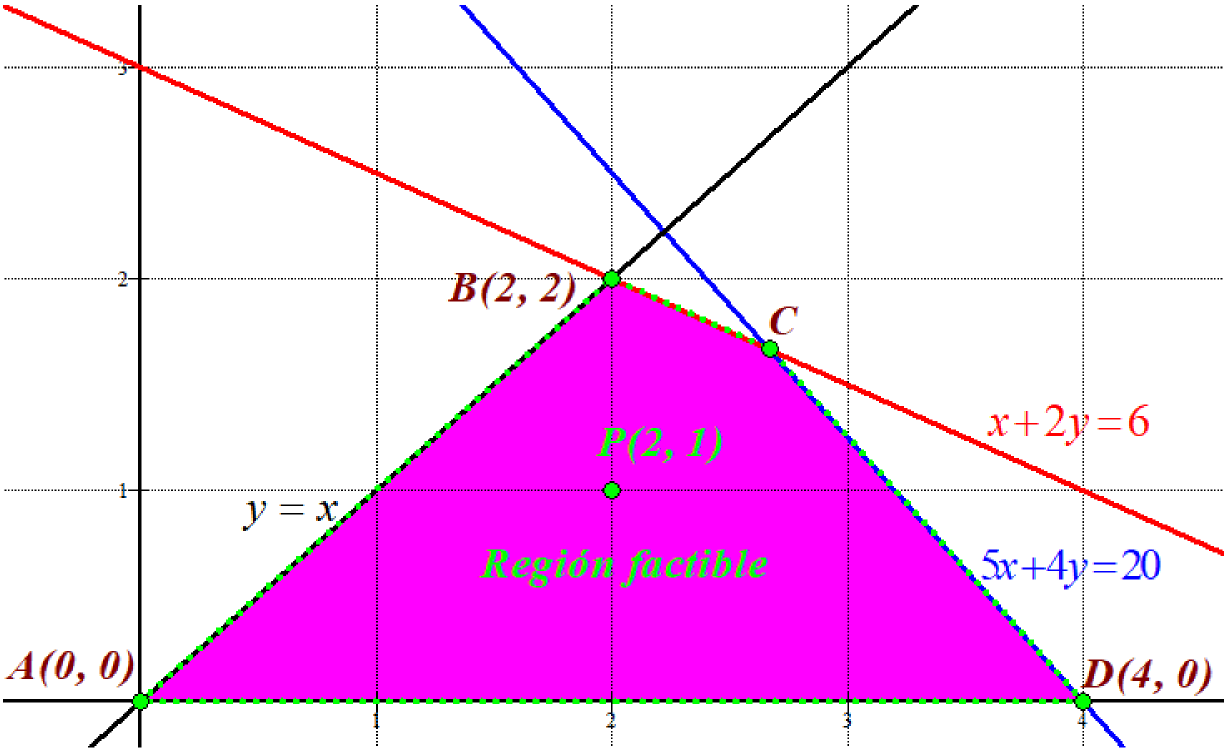
$y=x$

x	$y=x$
0	0
2	2
4	4



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 6 \\ 5x+4y\le 20 \\ y\le x \end{array}\right\}$ la región factible está por debajo de las rectas roja, azul y negra y por encima del eje, pues las cantidades de polvo se suponen positivas.

Coloreamos de rosa la región factible y elegimos un punto de ella para comprobar que es la región factible.



¿P(2, 1) cumple las restricciones?

$$\left.\begin{array}{l} 2+2\leq 6 \\ 10+4\leq 20 \\ 1\leq 2 \end{array}\right\}$$ ¡Se cumplen! La región factible es correcta.

Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=6 \\ 5x+4y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=6-2y \\ 5x+4y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 5(6-2y)+4y=20 \Rightarrow 30-10y+4y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6y=-10 \Rightarrow \boxed{y=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}} \Rightarrow \boxed{x=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}} \Rightarrow C\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)$$

(b) Mirando la región factible el mayor valor de y es 2.

(c) Tomamos como función objetivo $f(x,y)=x+y$. Buscamos su valor máximo en el seno de la región factible. Para ello valoramos esta función en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $f(0,0)=0+0=0$

B(2, 2) → $f(2,2)=2+2=4$

$C\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)$ → $f\left(\frac{8}{3},\frac{5}{3}\right)=\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=\frac{13}{3}\simeq 4.33$

D(4, 0) → $f(4,0)=4+0=4$

La cantidad máxima de polvo es 13/3 que contiene 8/3 de polvo sintético y 5/3 de polvo mineral.

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Nos preguntamos por las propiedades de una función de la forma

$$f(x)=\frac{x(x+b)}{x^2-1}$$

(i) ¿Para qué valores de *b* su gráfica tiene una sola asíntota vertical? **[1 punto]**
(ii) Estudia la existencia de extremos relativos de *f(x)* si *b = –2* **[1.5 puntos]**.

(i) La función $f(x)=\frac{x(x+b)}{x^2-1}$ tiene como presuntas asíntotas verticales los valores excluidos del dominio, que son los que anulan el denominador. Pero además, los límites laterales deben ser infinito.

Los valores excluidos del dominio son $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

Pero al calcular el límite de la función cuando tiende a +1 o a –1 puede ocurrir que no dé infinito. Para ello debe poderse simplificar la fracción, es decir, *b* debe ser 1 o –1.

Lo comprobamos.

Si b = +1 entonces:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to -1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x-1}=\frac{-1}{-2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to +1} f(x)=\lim_{x\to +1}\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\boxed{\infty}$$

Solo tiene como asíntota vertical la recta *x = 1*

Si b = –1 entonces:

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{2}{0}=\boxed{\infty}$$

$$\lim_{x\to +1} f(x)=\lim_{x\to +1}\frac{x(x-1)}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}=\lim_{x\to +1}\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to +1}\frac{x}{x+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

Solo tiene como asíntota vertical la recta *x = –1*

Conclusión: Para *b = +1* o *b = –1* la función tiene una única asíntota vertical. En el resto de casos tiene dos asíntotas verticales.

(ii) Si *b = –2* la función queda $f(x)=\frac{x(x-2)}{x^2-1}$.

Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x(x-2)}{x^2-1}=\frac{x^2-2x}{x^2-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-1)-2x(x^2-2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{2x^3}-2x-2x^2+2-\cancel{2x^3}+4x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2x+2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^2-2x+2}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow 2x^2-2x+2=0 \Rightarrow x^2-x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}= \text{¡ No existe !}$$

Esta función no presenta puntos críticos y no tendrá ningún extremo relativo.

La expresión de la derivada $f'(x)=\frac{2x^2-2x+2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$ tiene tres factores que son siempre positivos. Por lo que la derivada siempre es positiva y la función siempre es creciente.

$$\left.\begin{array}{r} 2>0 \\ x^2-x+1>0 \\ \left(x^2-1\right)^2>0 \text{ siendo } x\neq\pm1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}>0$$

2.2.- Queremos definir una función por trozos, de forma que quede definida en el intervalo [–2, 2] según

$$f(x)=\begin{cases}3-2x, & si \quad x\in[-2,a)\\ x+4, & si \quad x\in[a,b)\\ 5/x, & si \quad x\in[b,2]\end{cases}$$

Calcula los valores de *a* y *b* necesarios para que *f* sea continua **[1.25 puntos]**, y representa la función gráficamente **[1.25 puntos].**

Para que *f* sea continua debe serlo en $x = a$ y para ello:

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=a+4\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} 3-2x=3-2a\\ \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=a+4\\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)\end{array}\right\}\Rightarrow a+4=3-2a\Rightarrow a+2a=3-4\Rightarrow 3a=-1\Rightarrow \boxed{a=\frac{-1}{3}}$$

Para que *f* sea continua debe serlo en $x = b$ y para ello:

$$\left.\begin{array}{l} f(b)=\dfrac{5}{b}\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} x+4=b+4\\ \lim\limits_{x\to b^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{5}{x}=\dfrac{5}{b}\\ \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\end{array}\right\}\Rightarrow b+4=\frac{5}{b}\Rightarrow b^2+4b=5\Rightarrow b^2+4b-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-5)}}{2}=\frac{-4\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{-4+6}{2}=\boxed{1=b}, \text{ Es mayor que a} = \dfrac{-1}{3} \text{ y menor que } 2\\ \dfrac{-4-6}{2}=-5, \text{No vale pues debe estar entre } -2 \text{ y } 2\end{cases}$$

Los valores que hacen continua la función son $a=\frac{-1}{3}$ y $b=1$.

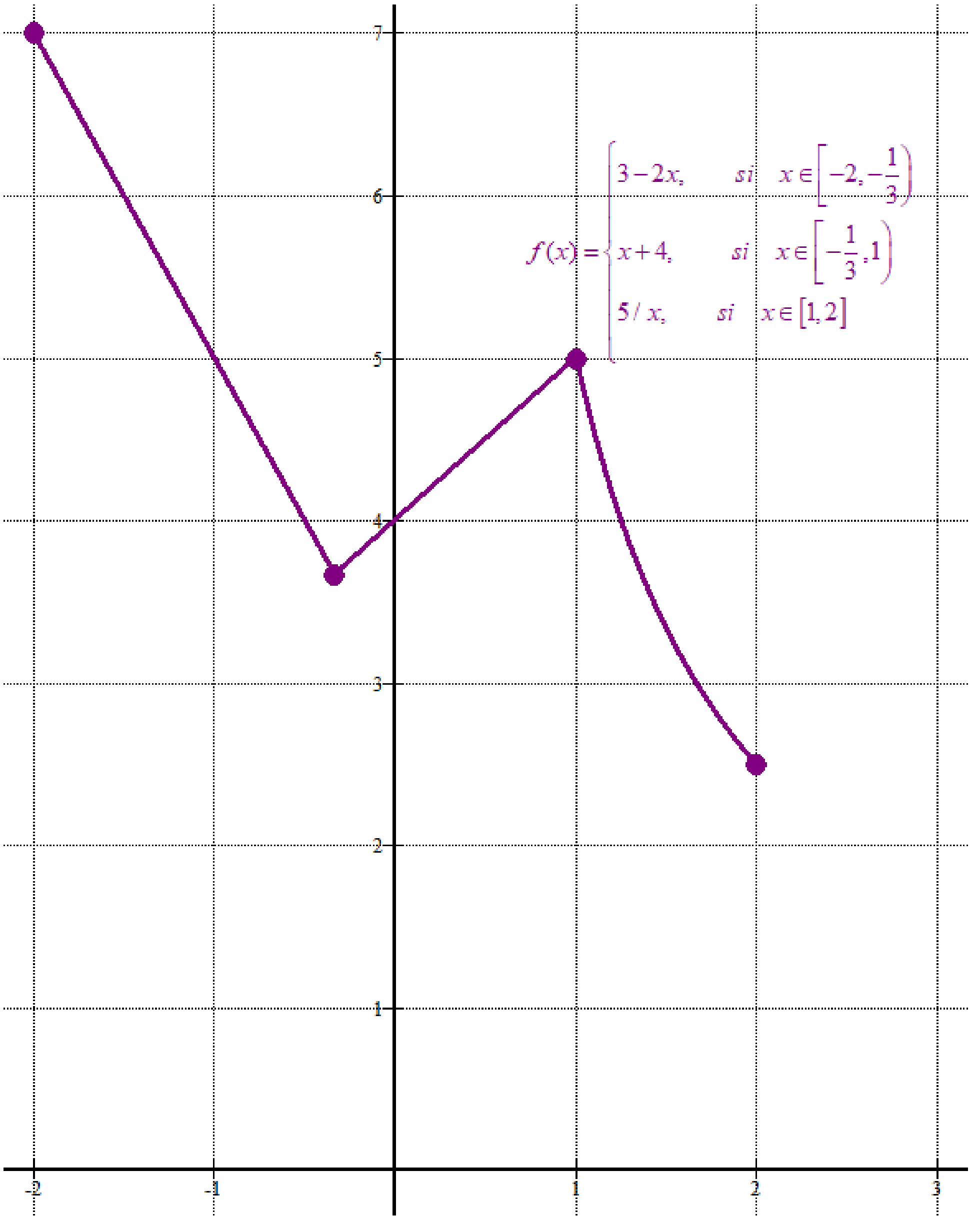
Para $a=\frac{-1}{3}$ y $b=1$ la función queda $f(x)=\begin{cases}3-2x, & si \quad x\in\left[-2,-\frac{1}{3}\right)\\ x+4, & si \quad x\in\left[-\frac{1}{3},1\right)\\ 5/x, & si \quad x\in[1,2]\end{cases}$.

La función es un trozo de recta, otro trozo de recta y un trozo de curva.
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica,

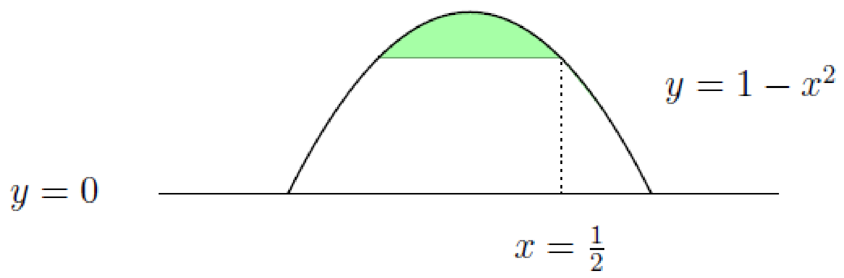
x	$y=3-2x$
-2	7
-1	5
$-1/3$	$11/3$ no se incluye

x	$y=x+4$
$-1/3$	$11/3$
0	4
1	5 no se incluye

x	$y=\frac{5}{x}$
1	5
1.5	3.33
2	2.5



2.3.- Calcula el área de la región sombreada en la siguiente figura:



[2.5 puntos]

Hallamos las coordenadas del punto de la gráfica de la parábola para $x = \frac{1}{2}$.

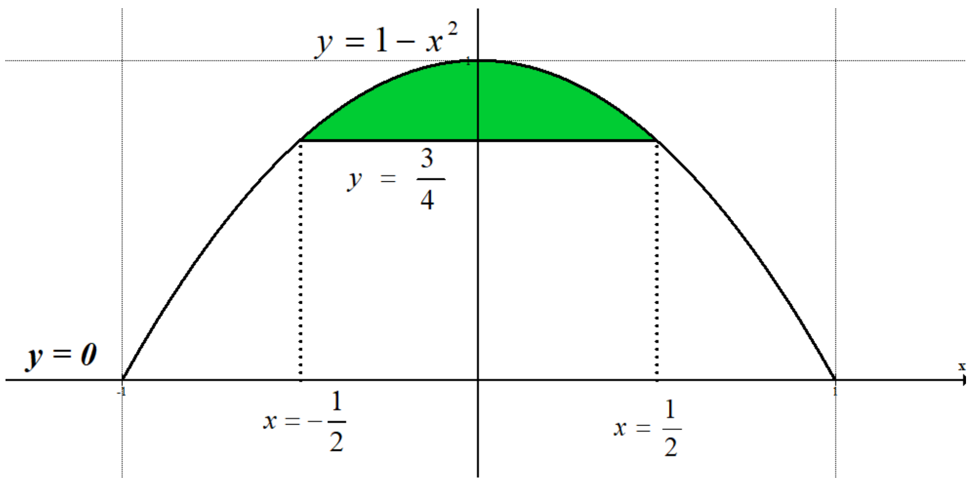
$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

La recta horizontal es $y = \frac{3}{4}$.

Averiguamos los dos puntos donde se cortan la recta $y = \frac{3}{4}$ y la parábola $y = 1 - x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 - x^2 \\ y = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Completamos el dibujo trazando los ejes de coordenadas y determinando la ecuación de la recta horizontal que limita la región por la parte inferior.



El área es la integral definida de $y = 1 - x^2$ menos $y = \frac{3}{4}$ entre $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

$$Área = \int_{-0.5}^{0.5} \left(1 - x^2\right) - \frac{3}{4} dx = \int_{-0.5}^{0.5} 1 - x^2 - \frac{3}{4} dx = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{1}{4} - x^2 dx = \left[\frac{1}{4}x - \frac{x^3}{3}\right]_{-0.5}^{0.5}$$

$$Área = \left[\frac{1}{4}0.5 - \frac{0.5^3}{3}\right] - \left[\frac{1}{4}(-0.5) - \frac{(-0.5)^3}{3}\right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{8} - \frac{1}{24} = \frac{2}{8} - \frac{2}{24} = \frac{6-2}{24} = \boxed{\frac{1}{6}u^2}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Jorge y Laura juegan con dados. Los dados son equilibrados y, como es habitual, las caras están numeradas del 1 al 6. Jorge echa un dado, y a continuación Laura echa otro. Laura gana si la diferencia entre los dos resultados obtenidos es (en valor absoluto) mayor que 1.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de Laura? **[1.25 puntos]**

(b) Si han jugado y ha ganado Laura, ¿cuál es la probabilidad de que Jorge haya sacado un 6? **[1.25 puntos]**

(a) Lo calculamos con el suceso contrario. Vemos cuando gana Jorge. Gana cuando la diferencia es 1 o 0. Es decir cuando sacan la misma puntuación: 11, 22, 33, 44, 55, 66 o bien cuando hay una diferencia de 1: 12, 21, 32, 23, 43, 34, 54, 45, 65, 56.

En el total de los 36 resultados posibles (6 · 6) solo favorecen a Jorge 6 + 10 = 16 y a Laura los 20 restantes.

$$P(Gane\ Laura) = \frac{20}{36} = \boxed{\frac{5}{9} \simeq 0.56}$$

(b) Es una probabilidad a posteriori.

Se da por hecho que ha ganado Laura, por lo que ha salido uno de los 20 resultados que la favorecen. Estos son el número de casos posibles suponiendo cierto el éxito de Laura.

De todos ellos si Jorge ha sacado un 6 ella debe haber sacado o un 4, o un 3 o un 2 o un 1. Esos son los 4 resultados favorables al suceso “Jorge saca un 6 condicionado a que gana Laura”.

Aplicando la regla de Laplace.

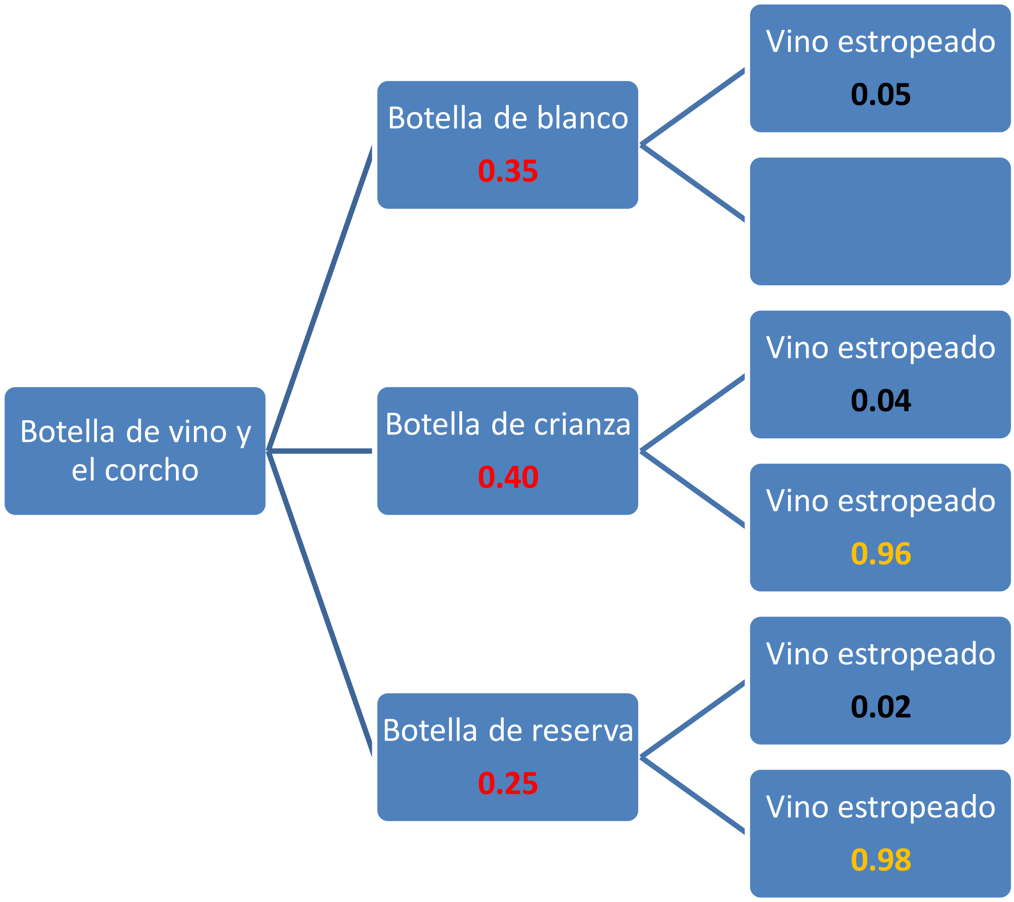
$$P(\text{Jorge saque 6 / Gana Laura}) = \frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

3.2.- Una bodega de Rioja elabora vinos blancos, de crianza y reservas de gran calidad. Su producción consiste en un 35% de vino blanco, un 40% de vino de crianza y un 25% de reservas. Aunque tiene mucho cuidado en la selección de los corchos, la probabilidad de que alguna botella se estropee por razón de un corcho inadecuado es del 5% para el vino blanco, 4% para el crianza y 2% para el reserva.

(i) Se elige una botella de la bodega al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el vino esté estropeado? **[1.75 puntos]**

(ii) Hemos elegido una botella de vino tinto al azar (crianza o reserva), ¿cuál es la probabilidad de que el vino NO esté estropeado? **[0.75 puntos]**

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B = "Elegir botella de vino blanco", C = "Elegir botella de vino crianza" y R = "Elegir botella de vino reserva".

Llamamos E = "La botella de vino está estropeada", por lo que $\overline{E}$ = "La botella de vino NO está estropeada"

(i) Aplicamos el teorema de probabilidad total.

$$P(E) = P(B \cap E) + P(C \cap E) + P(R \cap E) =$$
$$= P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C) + P(R)P(E/R) =$$
$$= 0.35 \cdot 0.05 + 0.40 \cdot 0.04 + 0.25 \cdot 0.02 = \boxed{0.0385}$$

(ii)

$$P\left(\overline{E}/(C\cup R)\right)=\frac{P\left(\overline{E}\cap(C\cup R)\right)}{P(C\cup R)}=\frac{P\left(C\cap\overline{E}\right)+P\left(R\cap\overline{E}\right)}{P(C\cup R)}=$$

$$=\frac{P(C)P\left(\overline{E}/C\right)+P(R)P\left(\overline{E}/R\right)}{P(C\cup R)}=\frac{0.4\cdot 0.96+0.25\cdot 0.98}{0.40+0.25}=\boxed{\frac{629}{650}\simeq 0.968}$$

OTRA FORMA DE RESOLVER EL APARTADO (ii)

Este último apartado se puede hacer utilizando la regla de Laplace y contando botellas de vino.

Suponiendo que hay 100 botellas en la bodega habrían 40 + 25 = 65 botellas entre crianza y reserva.

Hay estropeadas el 4 % de las de crianza → $\frac{4}{100}\cdot 40=\frac{160}{100}=1.6$ botellas estropeadas. De las 40 botellas de crianza hay 40 – 1.6 = 38.4 NO estropeadas.

Hay estropeadas el 2 % de las de reserva → $\frac{2}{100}\cdot 25=\frac{50}{100}=0.5$ botellas estropeadas. De las 25 botellas de reserva hay 25 – 0.5 = 24.5 NO estropeadas.

Aplicamos la regla de Laplace y tenemos que:

$$P\left(\overline{E}/(C\cup R)\right)=\frac{\text{Nº casos favorables}}{\text{Nº casos posibles}}=\frac{38.4+24.5}{40+25}=\frac{62.9}{65}=\boxed{\frac{629}{650}\simeq 0.968}$$

3.3.- Una máquina produce bolas de billar, y sabemos que su peso sigue una distribución normal con una desviación típica de 20 gr.

(a) Si el peso medio de las bolas fuese 165 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 100 bolas superase los 168 gr? **[1.25 puntos]**

(b) El promedio en una muestra de 100 bolas es de 165 gr. Determina un intervalo con el 95% de confianza para la media del peso de las bolas que produce la máquina **[1.25 puntos].**

X = Peso de una bola de billar en gramos.
X = N(**μ**, 20)

(a)

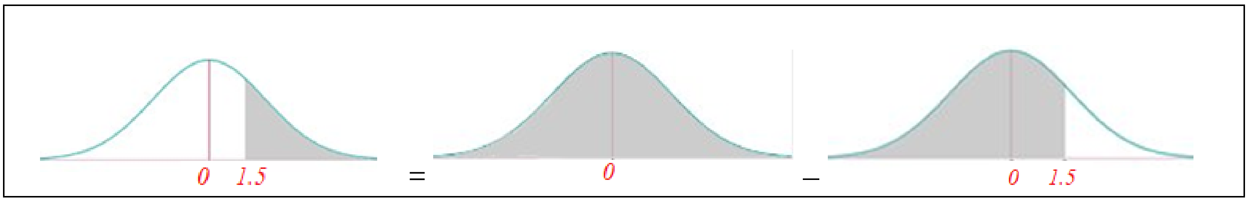
Si X = Peso de una bola de billar en gramos. X = N(165, 20)

El peso medio de 100 bolas sigue una distribución normal:

$$\overline{X_{100}} = N\left(165, \frac{20}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X_{100}} = N(165, 2)$$

$$P\left(\overline{X_{100}} > 168\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{168-165}{2}\right) =$$

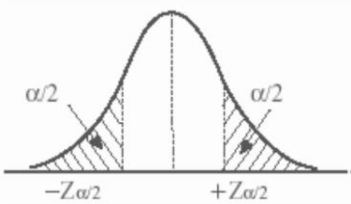
$$= P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \le 1.5) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0.93319 = \boxed{0.06681}$$



z	+0.00	+(
0.0	0.5[illegible]000	0.5
0.1	0.5[illegible]983	0.5
0.2	0.5[illegible]926	0.5
0.3	0.6[illegible]791	0.6
0.4	0.6[illegible]542	0.6
0.5	0.6[illegible]146	0.6
0.6	0.7[illegible]575	0.7
0.7	0.7[illegible]804	0.7
0.8	0.7[illegible]814	0.7
0.9	0.8[illegible]594	0.8
1.0	0.8[illegible]134	0.8
1.1	0.8[illegible]433	0.8
1.2	0.8[illegible]493	0.8
1.3	0.9[illegible]320	0.9
1.4	0.9[illegible]924	0.9
1.5	0.93319	0.9
1.6	0.94520	0.9

(b)

n = 100
$\bar{x} = 165\ gr$
Con un nivel de confianza del 95%
1 – α = 0,95 → α = 0,05 → α /2 = 0’025 →1 – α /2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{20}{\sqrt{100}} = 3.92$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (165 - 3.92, 165 + 3.92) = (161.08, 168.92)$$