UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Modelo orientativo

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales *a*, *b* y *c* para que se verifique $A^2=A-B$.
b) Para $a = b = c = 2$, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real *f(x)* definida por

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

a) Obtenga los coeficientes reales *a*, *b* y *c*, de $f(x)$ sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -3$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = 6x + 8$.
b) Para $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx$.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}$$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un mercado agropecuario el 70% de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30% de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:
a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica $\sigma = 10$ horas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95% para μ.

b) Suponga que μ = 28 kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 0*.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-\dfrac{1}{9} & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & si\ x>0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de *f (x)* y calcule el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que *f (x)* sea derivable en todo su dominio.
b) Para *a = 0* determine, si existen, las asíntotas de *f (x)*.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que *P(C) = 0´4, P(D) = 0´6* y $P(C\cup D)=0'8$.

Calcule:

a) $P(C/D)$
b) $P\left(\overline{C\cap D}/C\right)$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica σ = 300 calorías.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que μ = 3000 calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño *n* = 50 atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las matrices A y B dadas por

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales *a*, *b* y *c* para que se verifique $A^2=A-B$.
b) Para *a = b = c = 2*, estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a)

$$A^2=A-B$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2a&1&0\\b+ac+b&2c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a-1&1&0\\b-1&c-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2a=a-1\\2b+ac=b-1\Rightarrow\\2c=c-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\boxed{a=-1}\\b+ac=-1\Rightarrow b+1=-1\Rightarrow\boxed{b=-2}\\\boxed{c=-1}\end{cases}$$

Los valores buscados son *a = c = –1* y *b = –2*.

b) Para *a = b = c = 2* la matriz A es $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}$ con determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

La matriz A es invertible. Calculamos su inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&2\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real *f(x)* definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) Obtenga los coeficientes reales *a*, *b* y *c*, de *f (x)* sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x = –3* y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f (x)* en el punto de abscisa *x = 0* es *y = 6x + 8*.

b) Para *a = 2*, *b = 1* y *c = 1*, calcule la integral $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx$.

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa *x = –3* significa que la derivada se anula en dicho valor.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(-3) = 0 \Rightarrow 2a(-3) + b = 0 \Rightarrow -6a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 6a}$$

Si la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f (x)* en el punto de abscisa *x = 0* es *y = 6x + 8* implica dos cosas: la derivada en *x = 0* es 6 y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 8), ya que tangente y función coinciden en el punto de tangencia.

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 6 \Rightarrow 2a(0) + b = 6 \Rightarrow \boxed{b = 6}$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(0) = 8 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

Sustituimos en la igualdad obtenida al comienzo y queda:

$$\left.\begin{array}{l} b = 6a \\ b = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

b) Para *a = 2, b = 1* y *c = 1* la función queda $f(x) = 2x^2 + x + 1$.

Calculamos la integral:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx = \int_1^e \frac{2x^2 + x + 1}{x}dx = \int_1^e \frac{2x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}dx = \int_1^e 2x + 1 + \frac{1}{x}dx =$$

$$= \int_1^e 2xdx + \int_1^e 1dx + \int_1^e \frac{1}{x}dx = \left[x^2\right]_1^e + \left[x\right]_1^e + \left[\ln x\right]_1^e = e^2 - 1^2 + e - 1 + \ln e - \ln 1 = \boxed{e^2 + e - 1}$$

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}$$

a) Halle el dominio de la función y sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y, si los hubiera, sus extremos relativos.

a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$, para *x = 0* no está definida la función.

No existe $f(0) = 0 + \frac{4}{0^2}$.

Asíntota vertical. *x = 0*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x + \frac{4}{x^2} = 0 + \frac{4}{0^2} = +\infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{4}{x^2} = +\infty + \frac{4}{\infty^2} = +\infty + 0 = +\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} + \frac{4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1 + \frac{4}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(x + \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$

b) Buscamos los puntos críticos igualando la derivada a cero.

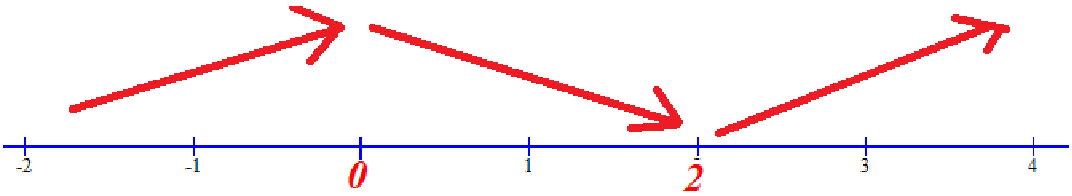
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} = x + 4x^{-2} \Rightarrow f'(x) = 1 - 8x^{-3} = 1 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = 1 \Rightarrow 8 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 2$, teniendo en cuenta también $x = 0$, excluido del dominio.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1) = 1 - \frac{8}{(-1)^3} = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, 0)$
- En $(0, 2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1) = 1 - \frac{8}{1^3} = -7 < 0$. La función decrece en el intervalo $(0, 2)$
- En $(2, +\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3) = 1 - \frac{8}{3^3} = \frac{19}{27} > 0$. La función crece en el intervalo $(2, +\infty)$

La función sigue el siguiente esquema de crecimiento y decrecimiento:



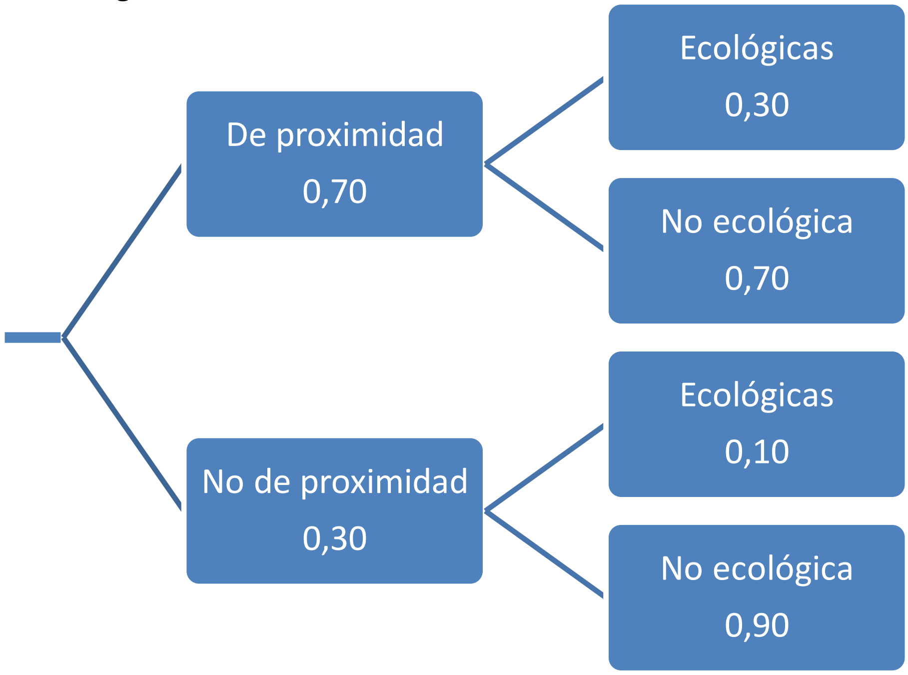
La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,2)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=2+\frac{4}{2^2}=3$, el punto mínimo relativo tiene coordenadas (2, 3).

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
En un mercado agropecuario el 70% de las verduras que se comercializan son de proximidad y el resto no. El 30% de las verduras de proximidad son ecológicas, mientras que de las que no son de proximidad, solo son ecológicas el 10 %. Si un cliente elegido al azar ha realizado una compra de una verdura, calcule las siguientes probabilidades:
a) Probabilidad de que la verdura comprada no sea ecológica.
b) Probabilidad de que la verdura sea de proximidad o ecológica.

Realizamos un diagrama de árbol.



a)

$$\begin{aligned}
&P(\text{No Ecológica}) = \\
&= P(\text{Proximidad})P(\text{No ecológica/Proximidad}) + \\
&+ P(\text{No proximidad})P(\text{No ecológica/No proximidad}) = \\
&= 0.70 \cdot 0,70 + 0,30 \cdot 0,90 = \boxed{0,76}
\end{aligned}$$

b) Mirando el árbol se cumple en las dos ramas superiores y en la inferior.

$$\begin{aligned}
&P(\text{Proximidad o ecológica}) = P(\text{Proximidad})P(\text{Ecológica/Proximidad}) + \\
&+ P(\text{Proximidad})P(\text{No ecológica/Proximidad}) + \\
&+ P(\text{No proximidad})P(\text{Ecológica/No proximidad}) = \\
&= 0.70 \cdot 0,30 + 0.70 \cdot 0,70 + 0,30 \cdot 0,10 = \boxed{0,73}
\end{aligned}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana mientras prepara una carrera popular se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ horas y desviación típica σ = 10 horas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 atletas, obteniéndose una media muestral de 30 kilómetros. Determine un intervalo de confianza al 95% para μ.
b) Suponga que μ = 28 kilómetros. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 atletas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 28 y 30 kilómetros.

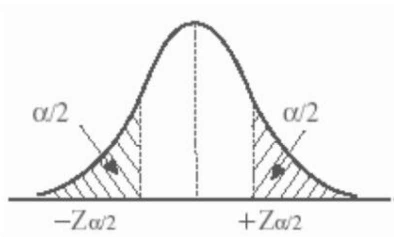
X = El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana.
X = N(μ, 10)

a) Tamaño de muestra = *n* = 20 atletas. $Media\ muestral = \overline{x} = 30\ km$

Nivel de confianza 95%

1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0’025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ = **1,96**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}} = 4.383$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

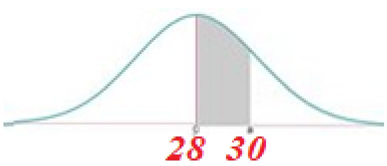
$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(30 - 4.383, \quad 30 + 4.383\right) = \left(25.617, \quad 34.383\right)$$

b) X = El número de kilómetros que un corredor entrena a la semana.

X = N(28, 10)

Si tomamos una muestra de 10 atletas la distribución de la media de los 10 atletas es:

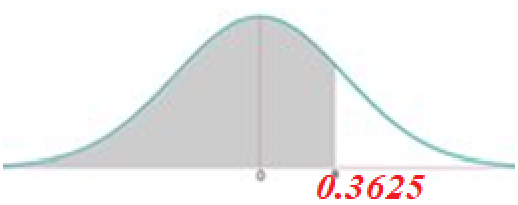
$$\overline{X_{10}} = N\left(28, \frac{10}{\sqrt{10}}\right) \Rightarrow \overline{X_{10}} = N\left(28, \sqrt{10}\right)$$



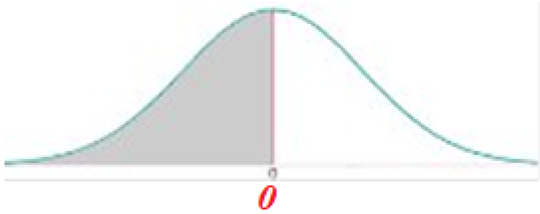
Nos piden calcular $P\left(28 \leq \overline{X_{10}} \leq 30\right)$

$$P\left(28 \leq \overline{X_{10}} \leq 30\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{28-28}{\sqrt{10}} \leq Z \leq \frac{30-28}{\sqrt{10}}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{2}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{2}{\sqrt{10}}\right) - P\left(Z \leq 0\right) =$$



$-$



$$= P\left(Z \leq 0.6325\right) - P\left(Z \leq 0\right) = \{\text{Miro la tabla}\} = 0.7357 - 0.5 = \boxed{0.2357}$$

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un agricultor dispone de 5 hectáreas, como máximo, de terreno para dedicar a la plantación de trigo y cebada. Cada hectárea dedicada al trigo le supone un beneficio de 200 euros, mientras que cada hectárea dedicada a la cebada le supone un beneficio de 60 euros. Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea, y la normativa autonómica le obliga a que el cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada. Represente la región factible, determine las hectáreas que debería dedicar a cada cultivo para maximizar sus beneficios y obtenga el valor del beneficio máximo.

Llamamos "*x*" a las hectáreas dedicadas a la plantación de trigo e "*y*" a las hectáreas dedicadas a la cebada.

"*Un agricultor dispone de 5 hectáreas* " → $x+y\le 5$
"*Entre ambos cultivos es obligatorio plantar como mínimo una hectárea*" → $x+y\ge 1$
"*El cultivo de trigo ocupe como mucho una hectárea más que el de cebada*" → $x\le y+1$
Son cantidades positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 5 \\ x+y\ge 1 \\ x\le y+1 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\le 5 \\ x+y\ge 1 \\ x-y\le 1 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo que deseamos maximizar son los beneficios:

$$B(x,y)=200x+60y$$

Representamos la región factible que cumple todas las inecuaciones.

$x+y=5$

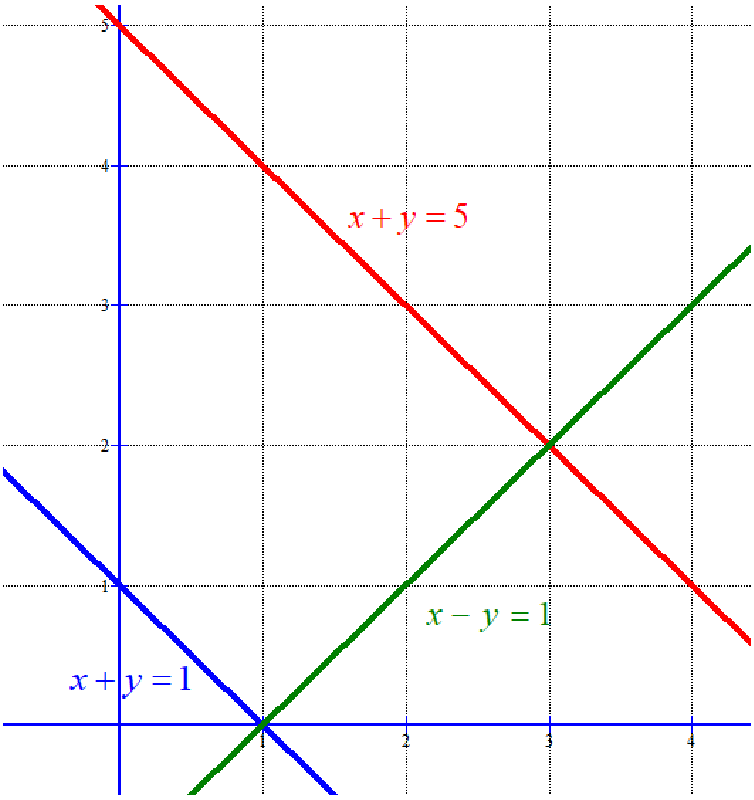
x	$y=5-x$
0	5
2	3
5	0

$x+y=1$

x	$y=1-x$
-1	2
0	1
1	0

$x-y=1$

x	$y=x-1$
0	-1
1	0
2	1

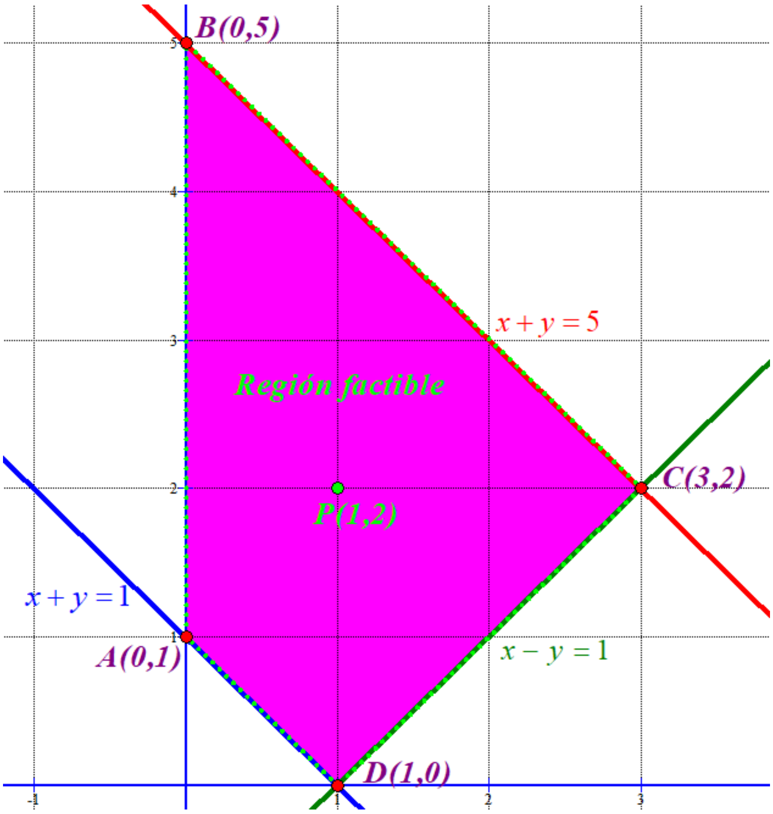


$x\ge 0;\ y\ge 0 \rightarrow$ Primer cuadrante

Por las restricciones se cumple que la región factible está por encima de la recta azul, por debajo de la roja y por encima de la verde.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 5 \\ x+y\geq 1 \\ x-y\leq 1 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{y\leq}5-x \\ \boxed{y\geq}1-x \\ x-1\boxed{\leq y} \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible de color rosa, indicando un punto donde comprobaremos que se cumplen las restricciones.



¿P(1,2) cumple las restricciones?

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 5 \\ x+y\geq 1 \\ x\leq y+1 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+2\leq 5 \\ 1+2\geq 1 \\ 1-2\leq 1 \\ 1\geq 0;\ 2\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Los vértices de la región factible y candidatos a optimizar la función beneficio son A, B, C y D. Valoramos la función “$B(x,y)=200x+60y$” en cada uno de ellos y obtenemos los valores que maximizan el beneficio.

A(0,1) → $B(0,1)=60$

B(0,5) → $B(0,5)=300$

C(3,2) → $B(3,2)=600+120=720$

D(1,0) → $B(1,0)=200$

El beneficio máximo son 720 € que se obtienen en el punto C(3,2) que significa plantar 3 hectáreas de trigo y 2 de cebada.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a) Igualamos el determinante de la matriz de coeficientes a cero.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=1=a \\ \dfrac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Se nos plantean 3 situaciones distintas que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas por lo que el sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 1$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 1ª = Ecuación 3ª} \\ \text{Elimino ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=1-z \\ 2x+y=1-z \end{array}\right\}$$

El sistema equivalente 2 x 2 que queda tiene infinitas soluciones. El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a = 2$

En este caso el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & +y & +2z & =1 \\ -2x & -2y & -2z & =-6 \\ \hline & -y & & =-5 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} x & +2y & +z & =1 \\ -x & -y & -z & =-3 \\ \hline & y & & =-2 \end{array} \to \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ -y \quad =-5 \\ y \quad =-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=3 \\ y=5 \\ y=-2 \end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema equivalente no tiene solución. El sistema es incompatible.

b) Para *a = 0* el sistema es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-1 \\ 2x+y \quad =1 \\ x \quad +z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=-1 \\ 2x+y \quad =1 \\ x=1-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1-z+y+z=-1 \\ 2(1-z)+y \quad =1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{y=-2} \\ 2-2z+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-2z-2=1 \Rightarrow -2z=1 \Rightarrow \boxed{z=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}}$$

La solución es $x=\frac{3}{2}; \quad y=-2; \quad z=-\frac{1}{2}$

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-\dfrac{1}{9} & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & si\ x>0 \end{cases}$$

a) Determine el dominio de *f (x)* y calcule el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que *f (x)* sea derivable en todo su dominio.
b) Para *a = 0* determine, si existen, las asíntotas de *f (x)*.

a) En el intervalo $\left(-\infty,0\right]$ la función es un polinomio $f(x)=x^2+ax-\frac{1}{9}$ que siempre existe. En el intervalo $\left(-\infty,0\right]$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-9}$ que existe siempre que no se anule el denominador.
$x^2-9=0\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$. De esos dos valores solo pertenece al intervalo de definición *x = 3.*
El dominio de definición es $\mathbb{R}-\{3\}$.
Para que sea derivable en todo el dominio debe serlo en *x = 0.* Determinamos las derivadas laterales y hacemos que coincidan en valor.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-\dfrac{1}{9} & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & si\ x>0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ \dfrac{1\cdot\left(x^2-9\right)-2x\left(x+1\right)}{\left(x^2-9\right)^2}=\dfrac{x^2-9-2x^2-2x}{\left(x^2-9\right)^2}=\dfrac{-x^2-2x-9}{\left(x^2-9\right)^2} & si\ x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0^-)=2\cdot 0+a=a \\ f\,'(0^+)=\dfrac{-0^2-2\cdot 0-9}{\left(0^2-9\right)^2}=-\dfrac{1}{9} \\ f\,'(0^-)=f\,'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=-\frac{1}{9}}$$

El valor buscado es $-\dfrac{1}{9}$.

b) Para *a = 0* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{9} & si\ x\le 0 \\ \dfrac{x+1}{x^2-9} & si\ x>0 \end{cases}$

Asíntota vertical. $x=3$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-9}=\frac{4}{0}=\infty$$

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 - \frac{1}{9} = (-\infty)^2 - \frac{1}{9} = +\infty$$

Tiene asíntota horizontal ($y = 0$) cuando x tiende a $+\infty$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$ pues tiene horizontal.
Cuando x tiende a $-\infty$ la buscamos.

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} - \frac{1}{9x} = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{9x} = -\infty - \frac{1}{-\infty} = -\infty + 0 = -\infty$$

No hay asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean C y D dos sucesos de un experimento aleatorio tales que *P(C) = 0´4*, *P(D) = 0´6* y $P(C \cup D) = 0'8$.
Calcule:
a) $P(C/D)$
b) $P(\overline{C \cap D}/C)$

a)

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow 0,8 = 0,4 + 0,6 - P(C \cap D) \Rightarrow$$

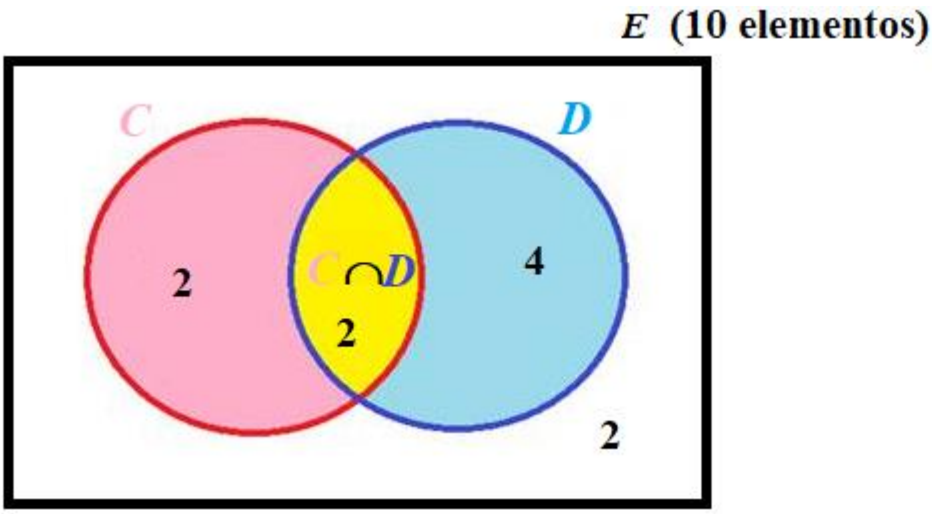
$$\Rightarrow P(C \cap D) = 0,4 + 0,6 - 0,8 = 0,2$$

$$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0,2}{0,6} = \boxed{0,33}$$

b)

$$P(\overline{C \cap D}/C) = \frac{P(\overline{C \cap D} \cap C)}{P(C)} = \ldots$$

Si establecemos un esquema donde la probabilidad se convierta en un valor absoluto de elementos, donde el espacio muestral tiene 10 elementos, C tiene 4, D tiene 6 y la intersección de C y D tiene 2 se puede calcular esta probabilidad con un simple conteo.



El conjunto $\overline{C \cap D} \cap C = C - C \cap D$ es el de color rosa que tiene solo 2 elementos, por lo que $P(\overline{C \cap D} \cap C) = \frac{2}{10} = 0,2$

$$\ldots = \frac{0,2}{0,4} = \boxed{0,5}$$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular se pueden aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ calorías y desviación típica σ = 300 calorías.
a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 100 calorías con un nivel de confianza del 95%.
b) Suponga que μ = 3000 calorías. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño *n* = 50 atletas, la media de las calorías consumidas durante la carrera por los 50 atletas sea mayor que 2700 calorías.

X = Las calorías consumidas por un atleta durante una carrera popular. X = N(μ, 300)

a) Con un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Planteamos la igualdad

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{300}{\sqrt{n}} = \frac{588}{\sqrt{n}} = 100 \Rightarrow 588 = 100\sqrt{n} \Rightarrow$$

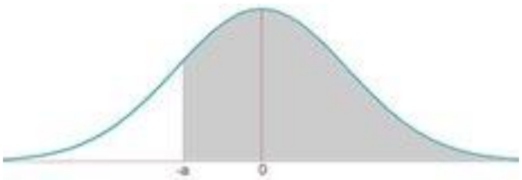
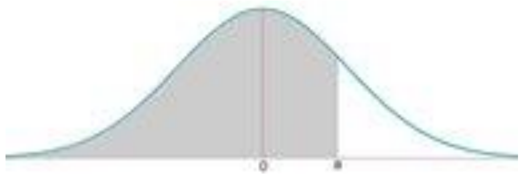
$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{588}{100} = 5.88 \Rightarrow n = 5.88^2 = 34.57$$

La muestra debe ser de más de 35 atletas.

b) μ = 3000 → X = N(3000, 300)

La media de consumo de los 50 atletas sigue una distribución normal de media 3000 y desviación típica menor $\frac{300}{\sqrt{50}} = 30\sqrt{2} = 42.42 \rightarrow \overline{X_{50}} = N\left(3000, 30\sqrt{2}\right)$

$$P\left(\overline{X_{50}} \geq 2700\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{2700-3000}{30\sqrt{2}}\right) = P\left(Z \geq -5\sqrt{2}\right) = P\left(Z \geq -7.07\right) = \ldots$$


=

=

$$\ldots = P\left(Z \leq 7.07\right) \simeq \boxed{1}$$

Este valor es normal pues la distribución de la media del consumo de calorías en 50 atletas tiene una media de 3000 calorías y la desviación típica solo es de 14.14 calorías, por lo que el que la media supere las 2700 calorías es prácticamente seguro, pues los datos están muy concentrados en torno a la media y 2700 está muy alejado de la media.