UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que se verifique $A=A^{-1}$.
b) Para *a* = *b* = *2*, calcule la matriz inversa de A.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de *f(x)* y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0*.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax & si \quad x\le 1 \\ \ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.
a) Determine para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para *a = 1*, halle el área de la región acotada delimitada por la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = –1*, *x = 0.*

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:
a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.
a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es P = 0,5, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real, definida $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.
b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)dx$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=0,5 \qquad P\left(\overline{B}/A\right)=0,4 \qquad P\left(A\cup B\right)=0,9$$

a) Calcule $P\left(B/\overline{A}\right)$
b) Determine si son dependientes o independiente los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si $\mu = 120$ gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales *a* y *b* para que se verifique $A=A^{-1}$.
b) Para *a* = *b* = *2*, calcule la matriz inversa de A.

a) Si $A=A^{-1}$ entonces $A\cdot A=A^{-1}\cdot A \Rightarrow A\cdot A=I$.

$$A\cdot A=I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & a+a \\ 0 & b^2 & 0 \\ a+a & 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \rightarrow a^2=0 \rightarrow \boxed{a=0} \\ 2a=0 \\ b^2=1 \rightarrow \boxed{b=\sqrt{1}=\pm 1} \end{cases}$$

Se cumple cuando *a* = *0* y *b* = *1*, también cuando *a* = *0* y *b* = *–1*.

b) Para *a* = *b* = *2* la matriz queda $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=8-2=6\neq 0$. Existe la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-1}$$

a) Determine el dominio de *f(x)* y calcule sus asíntotas.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0*.

a) Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿*x = –1*?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\frac{(-1)^2+4}{(-1)^2-1}=\frac{5}{0}=\infty$$. *x = –1* es asíntota vertical.

¿*x = 1*?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\frac{(1)^2+4}{(1)^2-1}=\frac{5}{0}=\infty$$. *x = 1* es asíntota vertical.

Tiene dos asíntotas verticales: *x = –1* y *x = 1*.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+4}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{4}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}+4-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}+\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{4}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0+0}{1-0}=\frac{0}{1}=0$$

La asíntota oblicua es $y=x$

b) La recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0* tiene ecuación $y-f(0)=f\,'(0)(x-0)$.

$$f(0)=\frac{0^3+4}{0^2-1}=-4$$

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-1}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-2x\left(x^3+4\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\Rightarrow f\,'(0)=\frac{3\cdot 0^2\left(0^2-1\right)-2\cdot 0\left(0^3+4\right)}{\left(0^2-1\right)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(0)=\frac{0}{1}=0$$

La ecuación de la recta tangente queda:

$$\left.\begin{array}{r} y-f(0)=f\,'(0)\left(x-0\right) \\ f(0)=-4 \\ f\,'\left(0\right)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow y-\left(-4\right)=0\cdot x\Rightarrow y+4=0\Rightarrow \boxed{y=-4}$$

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax & si \quad x\le 1 \\ \ln x & si \quad x>1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano.
a) Determine para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$.
b) Para *a = 1*, halle el área de la región acotada delimitada por la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = –1*, *x = 0.*

a) La función es continua en $(-\infty,1)$ pues es una función polinómica. También es continua en $(1,+\infty)$ pues es un logaritmo y la variable *x* es siempre positiva.
Falta ver si es continua en *x = 1*. Para ello comprobamos si el valor de la función coincide con el valor de sus límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-a=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-ax=1-a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x=\ln 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow 1-a=0\Rightarrow \boxed{a=1}$$

El valor de *a* que hace continua la función es *a = 1.*

b) Entre *x = –1* y *x = 0* la función es $f(x)=x^2-ax$. Como *a = 1* la función es $f(x)=x^2-x$.
Comprobamos si la función corta el eje OX en el intervalo (–1, 0).

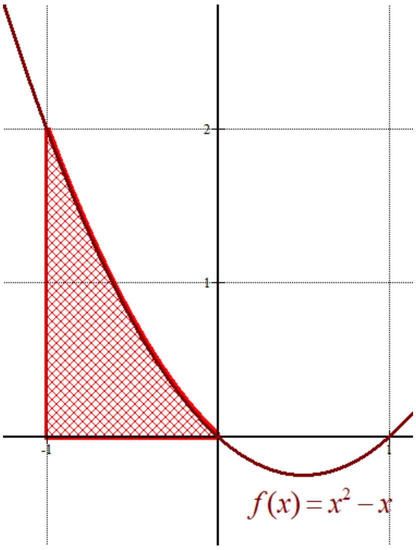
$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^2-x \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Los dos puntos de corte quedan fuera del intervalo (–1, 0), por lo que el área pedida es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 0 de $f(x)=x^2-x$.

$$\int_{-1}^{0} x^2-xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{0^3}{3}-\frac{0^2}{2}\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}\right]=0+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

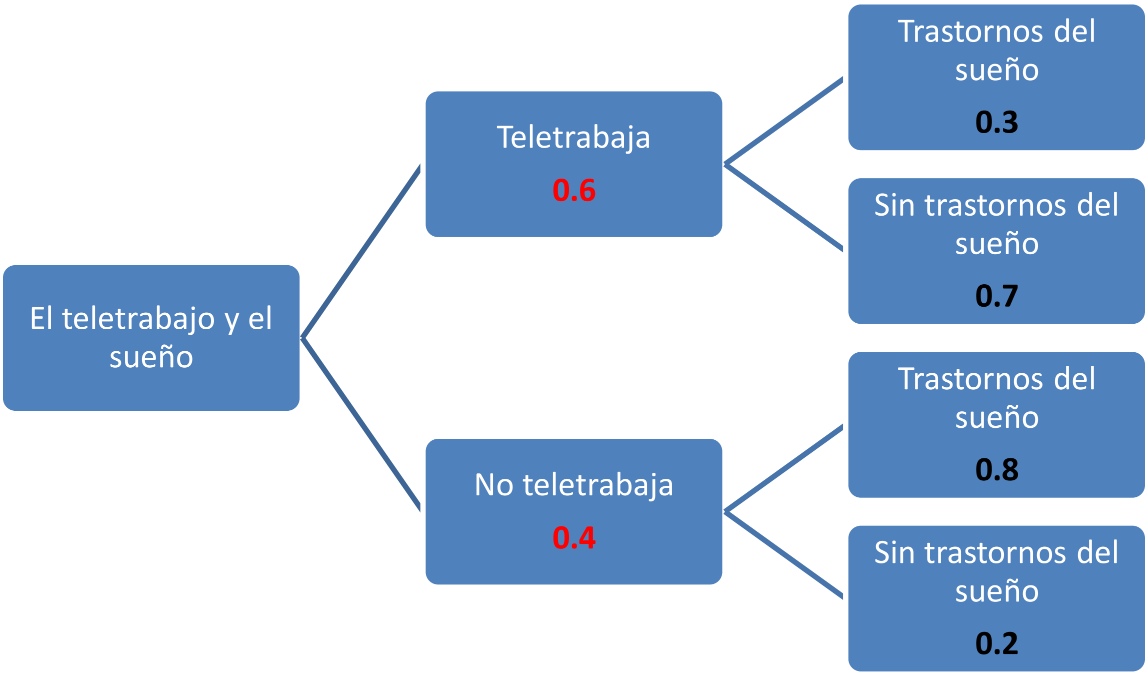
$$\boxed{Área=\frac{5}{6}u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos el recinto para comprobar la solución obtenida.
En el dibujo se aprecia que el área de la zona coloreada es casi una unidad cuadrada.



A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
El 60 % de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30 % padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80 % para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:
a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje.
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño.

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos T = "El empleado teletrabaja", con lo que $\overline{T}$ = "El empleado no teletrabaja".
S = "El empleado tiene trastornos del sueño" y $\overline{S}$ = "El empleado no tiene trastornos del sueño"

a) Utilizando la información del diagrama de árbol.

$$P\left(T \cap \overline{S}\right) = P(T)P\left(\overline{S}/T\right) = 0.6 \cdot 0.7 = \boxed{0.42}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

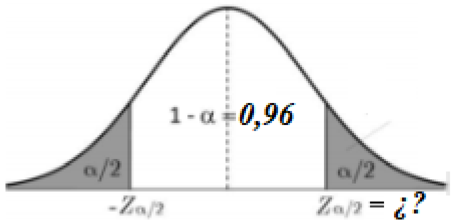
$$P\left(\overline{T}/\overline{S}\right) = \frac{P\left(\overline{T} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{P\left(\overline{T}\right)P\left(\overline{S}/\overline{T}\right)}{P(T)P\left(\overline{S}/T\right) + P\left(\overline{T}\right)P\left(\overline{S}/\overline{T}\right)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2} = \boxed{\frac{4}{25} = 0.16}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años.
a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96 % para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es P = 0,5, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95 %, el margen de error en la estimación no supere el 5 %.

a) La proporción de menores de 14 años que usan las redes sociales es $p=\frac{320}{500}=0,64$

Con un nivel de confianza del 96% calculamos $z_{\alpha/2}$

$1-\alpha=0,96 \rightarrow \alpha=0,04 \rightarrow \alpha/2=0,02 \rightarrow 1-\alpha/2=0,98 \rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$



Utilizamos la fórmula del error:

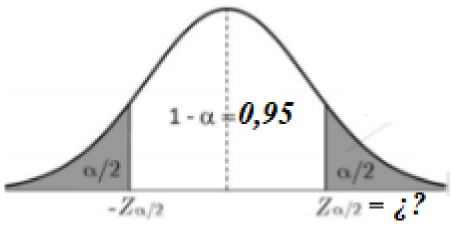
$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}=2.055\cdot\sqrt{\frac{0,64\cdot 0,36}{500}}=0,0441$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0,64-0,0441;\quad 0,64+0,0441\right)=\left(0,5959;\quad 0,6841\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 95% calculamos $z_{\alpha/2}$

$1-\alpha=0,95 \rightarrow \alpha=0,05 \rightarrow \alpha/2=0,025 \rightarrow 1-\alpha/2=0,975 \rightarrow z_{\alpha/2}=1,96$



Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea del 5% = 0,05:

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\Rightarrow 0,05=1,96\cdot\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}}\Rightarrow\frac{0,05}{1,96}=\sqrt{\frac{0,5\cdot 0,5}{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{0,05}{1,96}\right)^2=\frac{0,25}{n}\Rightarrow\frac{25}{38416}=\frac{0,25}{n}\Rightarrow n=\frac{0,25\cdot 38416}{25}=384,16$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385 menores de 16 años.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=-1 \\ x-y+a^2z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1+2a^2+1-2-1+a^2=3a^2-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow 3a^2-3=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm 1$$

Distinguimos 3 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a=-1$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \\ \text{Nueva fila 2ª} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Fila 3ª} - 2\cdot\text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 6 \end{array} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} 2\cdot\text{Fila 3ª} - 3\cdot\text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & -6 & -12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, el de A/B también es 2 y el número de incógnitas es 3, El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=1$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$. Queda igual que en el caso 2, por lo que también será un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a\neq\pm1$ el sistema es compatible determinado (única solución) y si $a=\pm1$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $a = 1$ la situación es la analizada en el caso 3 y el sistema es compatible indeterminado. Como hemos obtenido la matriz triangular equivalente a la matriz ampliada podemos usarla para resolver el sistema a partir de ahí.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \text{Matriz equivalente a A/B} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=-1\\ x-y+z=3\\ 2x-y+z=4\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Sistema equivalente es } \left.\begin{array}{r}x+y-z=-1\\ -2y+2z=4\\ 0=0\end{array}\right\}$$

Resolvemos este último sistema.

$$\left.\begin{array}{r}x+y-z=-1\\ -2y+2z=4\\ 0=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y-z=-1\\ -y+z=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+y-z=-1\\ z=2+y\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x+y-2-y=-1\Rightarrow \boxed{x=-1+2=1}\Rightarrow \boxed{\begin{cases}x=1\\ y=t\\ z=2+t\end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = 1, y = t, z = 2 + t$**.**

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otro de 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que le sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si un kg de almendras le deja un beneficio de 1 € y un kg de avellanas de 2 €, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Llamemos x = "kilos de almendras en la mezcla", y = "kilos de avellanas en la mezcla".
Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=x+2y$.
Las restricciones del problema son:

"Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; \quad y \geq 0$
"*Tenemos un saco de 50 kg de almendras*" → $x \leq 50$
"*Tenemos un saco de 25 kg de avellanas*" → $y \leq 25$
"*La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas*" → $x \geq 1,5y$
"*Deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos*" → $x+y \geq 60$
"*No puede vender más de 70 kg entre ambos*" → $x+y \leq 70$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y \leq 70 \\ x+y \geq 60 \\ x \geq 1,5y \\ x \leq 50 \\ y \leq 25 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=70$

x	$y=70-x$
0	70
70	0

$x+y=60$

x	$y=60-x$
0	60
60	0

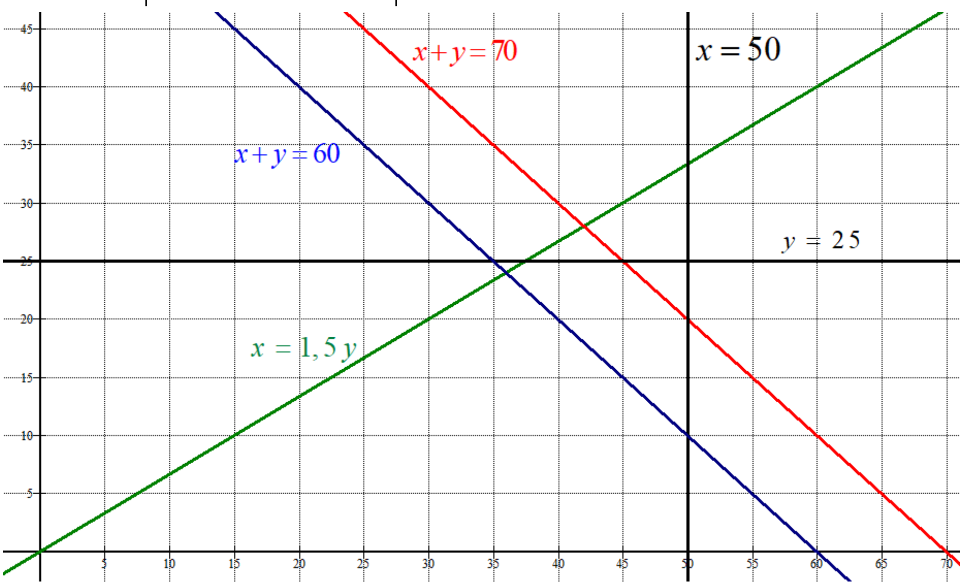
$x=1,5y$

x	$y=x/1,5$
30	20
60	40

$x=50$ — *Recta vertical*

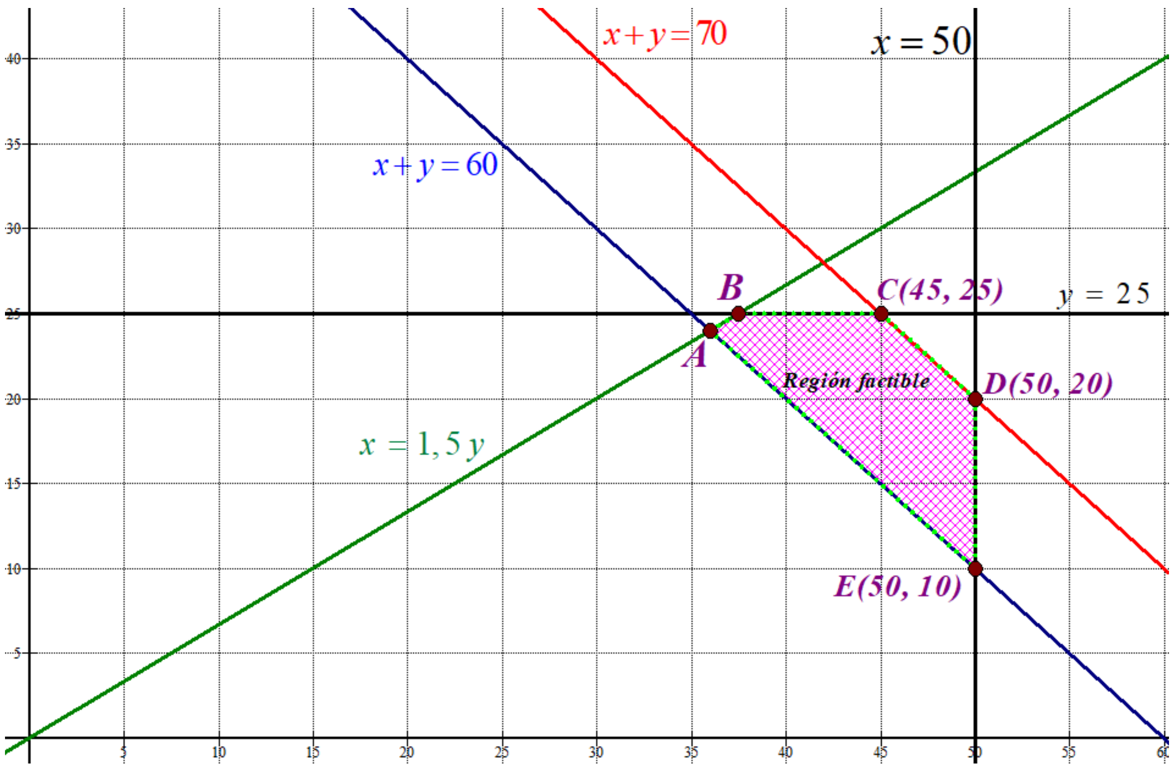
$y=25$ — *Recta horizontal*

$x \geq 0; \quad y \geq 0$ — *Primer cuadrante*



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x+y\le 70 \\ x+y\ge 60 \\ x\ge 1,5y \\ x\le 50 \\ y\le 25 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región está en el primer cuadrante por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul, por debajo de la verde, a la derecha de *x* = *50* y por debajo de la recta horizontal.

Coloreamos de rosa la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas de los puntos A y B. Los obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$\left.\begin{array}{l} x=1,5y \\ x+y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow 1,5y+y=60 \Rightarrow 2,5y=60 \Rightarrow y=\frac{60}{2,5}=24 \Rightarrow x=1,5\cdot 24=36 \Rightarrow A(36,\ 24)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1,5y \\ y=25 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1,5\cdot 25=37,5 \Rightarrow B(37.5,\ 25)$$

Valoramos cada vértice en la función beneficio $B(x,y)=x+2y$ en busca del valor máximo.

A(36, 24) → $B(36,24)=36+48=84$

B(37.5, 25) → $B(37.5,25)=37.5+50=87.5$

C(45, 25) → $B(45,25)=45+50=95$

D(50, 20) → $B(50,20)=50+40=90$

E(50, 10) → $B(50,10)=50+20=70$

El beneficio máximo es de 95 € y se consigue en el vértice C(45, 25), que significa mezclar 45 kg de almendras con 25 de avellanas.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y determine sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)dx$$

a) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=\left(x^2-3\right)e^x \Rightarrow f'(x)=2xe^x+\left(x^2-3\right)e^x=\left(x^2+2x-3\right)e^x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \left(x^2+2x-3\right)e^x=0 \Rightarrow \left\{e^x \text{ no puede ser } 0\right\} \Rightarrow$$

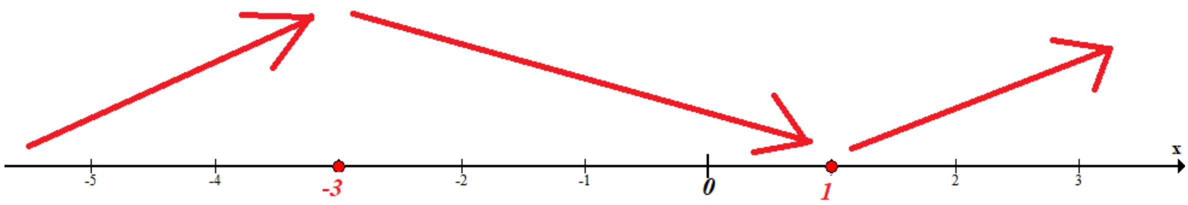
$$\Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=1\\ \frac{-2-4}{2}=-3\end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x=-3$ y $x=1$.

Vemos cómo evoluciona la función antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,-3)$ tomo $x=-5$ y la derivada vale $f'(-5)=\left((-5)^2-10-3\right)e^{-5}=12e^{-5}>0$. La función crece en el intervalo $(-\infty,-3)$.
- En $(-3,1)$ tomo $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\left(0^2+0-3\right)e^0=-3<0$. La función decrece en el intervalo $(-3,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomo $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\left(2^2+4-3\right)e^2=5e^2>0$. La función crece en el intervalo $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-3,1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=-3$ y un mínimo relativo en $x=1$.

Como $f(-3)=\left((-3)^2-3\right)e^{-3}=6e^{-3}$ el máximo relativo tiene coordenadas $\left(-3,\,6e^{-3}\right)$.

Como $f(1)=\left(1^2-3\right)e^1=-2e$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1,-2e)$.

b)

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)dx = \int_1^2 e^{-x}\left(x^2-3\right)e^x dx = \int_1^2 e^{-x+x}\left(x^2-3\right)dx = \int_1^2 \left(x^2-3\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3}-6\right]-\left[\frac{1^3}{3}-3\right] = \frac{8}{3}-6-\frac{1}{3}+3 = \frac{7}{3}-3 = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A)=0,5 \qquad P\left(\overline{B}/A\right)=0,4 \qquad P(A\cup B)=0,9$$

a) Calcule $P\left(B/\overline{A}\right)$

b) Determine si son dependientes o independiente los sucesos A y B. Justifique la respuesta.

a) $$P\left(\overline{B}/A\right)=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{P(A)} \Rightarrow 0.4=\frac{P\left(\overline{B}\cap A\right)}{0,5} \Rightarrow P\left(\overline{B}\cap A\right)=0.4\cdot 0.5=0.2$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right) \Rightarrow 0.5=P(A\cap B)+0.2 \Rightarrow P(A\cap B)=0.3$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0.9=0.5+P(B)-0.3 \Rightarrow P(B)=0.7$$

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P(B)-P(B\cap A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.3}{1-0.5}=\boxed{0.8}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.
Asumimos que hay 100 elementos en la población.
$P(A)=0,5$ significa que el 50 % de los elementos están en A, es decir, 50 están en A.
$P\left(\overline{B}/A\right)=0,4$ significa que el 40 % de los elementos de A están también en $\overline{B}$, es decir, el 40 % de 50 que son 20 están en $A\cap\overline{B}$.
$P(A\cup B)=0,9$ significa que el 90 % de los elementos están en A o en B. Por lo que solamente hay 10 elementos que no están ni en A ni en B. Es decir 10 están en $\overline{A}\cap\overline{B}$.

	B	$\overline{B}$	
A		20	50
$\overline{A}$		10	
			100

Y completando la tabla:

	B	$\overline{B}$	
A	30	20	50
$\overline{A}$	40	10	50
	70	30	100

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{40}{50}=\boxed{0.8}$$

UNA TERCERA FORMA DE HACERLO

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0.5=0.5$$

$$P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0.9=0.1 \Rightarrow P\left(\overline{A\cup B}\right)=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.1$$

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) \Rightarrow 0.5=P\left(\overline{A}\cap B\right)+0.1 \Rightarrow P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.4$$

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{0.4}{0.5}=\boxed{0.8}$$

b) Nos planteamos si es cierta la igualdad $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)P(B)=0.5\cdot 0.7=0.35 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

Por lo que A y B son sucesos dependientes.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El consumo diario de pan de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 20 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. Calcule la probabilidad de que la media muestral $\overline{X}$ no supere los 125 gramos si μ = 120 gramos.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

a) X = Consumo diario de pan (en gramos) de un estudiante de secundaria.
X = N(μ, 20)
Tamaño de muestra = n = 36 y μ = 120
$\overline{X}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{20}{\sqrt{36}} = \frac{10}{3}$.

$$\overline{X} = N\left(120, \frac{10}{3}\right)$$

$$P\left(\overline{X_{36}} < 125\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{125-120}{10/3}\right) = P(Z < 1,5) = \{\text{Miro en la tabla}\} = \boxed{0,9332}$$

b) Tamaño de muestra = n = 81
Del intervalo de confianza para la media (117,3444; 124,6556) podemos obtener el error cometido, ya que es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{124,6556 - 117,3444}{2} = 3,6556$$

Utilizando la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3,6556 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{\sqrt{81}} \Rightarrow 3,6556 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{20}{9} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{9 \cdot 3,6556}{20} = 1,64502$$

Si $z_{\alpha/2}$ = 1,64502 buscamos este valor en la tabla de la N(0, 1) y encontramos dos valores próximos, por ello tomamos el promedio de los dos valores:

$$1 - \alpha/2 = \frac{0,9495 + 0,9505}{2} = 0,95 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow 1 - \alpha = 0,9$$

El nivel de confianza es del 90%.