



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.
 EJEMPLO DE MODELO DE EXAMEN, REALIZADO A PARTIR DE ENUNCIADOS DE 2019 Y
 ADAPTADO A LA EXCEPCIONALIDAD DE EBAU2021

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- Calcule A^{-1} . **(1 punto)**
- Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$. **(0,5 puntos)**
- Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

CUESTIÓN A2. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. **(2.5 puntos)**

CUESTIÓN A3. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. **(2.5 puntos)**

CUESTIÓN A4.

- Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3 . **(1.25 puntos)**
- Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. **(1.25 puntos)**

CUESTIÓN A5. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- Determinar a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} . **(1.25 puntos)**
- Hallar $\int_1^3 f(x) dx$. **(1.25 puntos)**

CUESTIÓN A6. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área. **(2,5 puntos)**

CUESTIÓN A7. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

- a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? **(1,25 puntos)**
- b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN A8. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(A/B) = 0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. **(2,5 puntos)**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- a) Calcule A^{-1} .
 b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$.
 c) Calcule el valor del parámetro a para que $A + B + C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

a) Para que exista la inversa de A debe tener determinante no nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0. \text{ Existe la inversa } A^{-1}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ debe cumplir } A^{-1}A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+b \\ 2c+d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a+b=0 \\ 2c+d=0 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ a=-b \\ 2c+d=0 \\ c=1-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2b+b=1 \\ 2-2d+d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -b=1 \\ -d+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1-2=-1 \end{cases}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b)

$$B + C = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1=1 \\ a-1=-1 \\ a-1=-1 \\ 2=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

c)

$$A + B + C = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

CUESTIÓN A2. En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulces deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta.

Llamemos x = número de dulces del tipo A e y = número de dulces del tipo B.

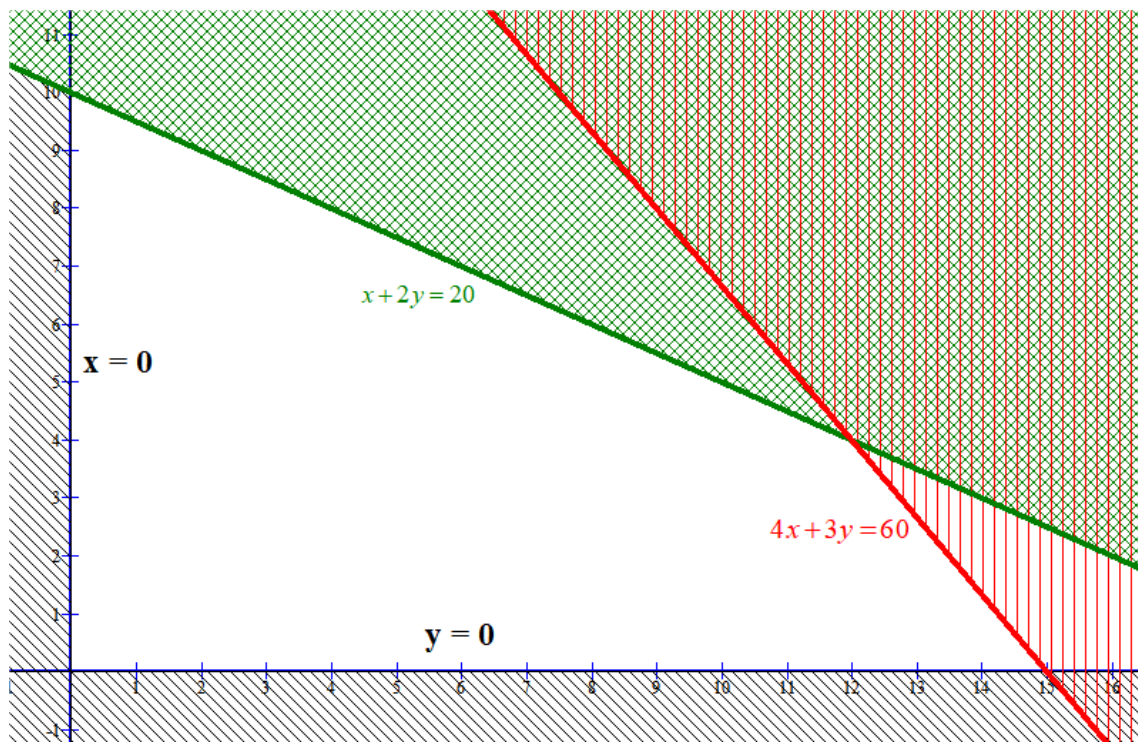
Para elaborar x dulces del tipo A necesitaré $\frac{1}{2}x = \frac{x}{2}$ kilos de azúcar y $8x$ huevos.

Para elaborar y dulces del tipo B necesitaré x kilos de azúcar y $6y$ huevos.

Las restricciones aplicables al problema son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{x}{2} + y \leq 10 \\ 8x + 6y \leq 120 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 20 \\ 4x + 3y \leq 60 \end{array} \right\}$$

Dibujemos la región factible (donde está la solución del problema)



Nuestra solución estará en uno de los vértices del triángulo blanco del dibujo. Averiguemos sus coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + 2y = 20 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10 \text{ Un punto es } A(0,10)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 4x + 3y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15 \text{ Un segundo punto es } B(15,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 20 \\ 4x + 3y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2y + 20 \\ 4x + 3y = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 4(-2y + 20) + 3y = 60 \Rightarrow -8y + 80 + 3y = 60$$

$$-5y = -20 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = -2 \cdot 4 + 20 = 20 - 8 = 12$$

Un tercer punto es C(12,4)

Determinemos la función beneficio sabiendo que por x dulces del tipo A ganaré 15x y por y dulces del tipo B ganaré 12y. Conjuntamente:

$$\textit{Beneficio} = 15x + 12y$$

Sustituyendo cada punto podremos decidir el punto solución:

$$A(0,10) \rightarrow \textit{Beneficio}(0,10) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 10 = 120 \text{ €}$$

$$B(15,0) \rightarrow \textit{Beneficio}(15,0) = 15 \cdot 15 + 12 \cdot 0 = 225 \text{ €}$$

$$C(12,4) \rightarrow \textit{Beneficio}(12,4) = 15 \cdot 12 + 12 \cdot 4 = 228 \text{ €}$$

El máximo beneficio se obtiene para $x = 12$ e $y = 4$.

El máximo beneficio (228 €) se obtiene con 12 dulces del tipo A y 4 del tipo B.

CUESTIÓN A3. Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido.

La función Ingresos es $I(x) = 40x$

La función beneficio es $B(x) = I(x) - C(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = 40x - 2x^2 - 4x - 98 = -2x^2 + 36x - 98$

Para averiguar el máximo de esta función calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 98 \Rightarrow B'(x) = -4x + 36$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 36 = 0 \Rightarrow -4x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{-4} = 9 \text{ unidades}$$

Para comprobar si 9 unidades es un máximo calculamos la derivada segunda y sustituimos $x = 9$

$$B'(x) = -4x + 36 \Rightarrow B''(x) = -4 < 0$$

$x = 9$ unidades es un **máximo** de la función beneficio.

Este **beneficio máximo** es $B(9) = -2 \cdot 9^2 + 36 \cdot 9 - 98 = -162 + 324 - 98 = 324 - 260 = 64$ euros

CUESTIÓN A4.

- a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1,1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3 .
- b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos.

a) Primera condición:

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = a + b \Rightarrow 1 = a + b$$

Segunda condición:

La pendiente de la recta tangente en $(1,1)$ es el valor de la derivada en $x = 1$.

$$f(x) = ax^3 + bx \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + b \text{ sustituyendo } x = 1:$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + b \\ f'(1) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = -3 \Rightarrow 3a + b = -3$$

Juntando las dos ecuaciones nos surge el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 1 - a \\ 3a + b = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3a + 1 - a = -3 \Rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$$b = 1 - a \Rightarrow b = 1 + 2 = 3$$

Los valores pedidos son $a = -2$ y $b = 3$

b) Sustituimos en la función los valores dados $f(x) = x^3 - 12x$.

$$\text{Calculemos su derivada: } f'(x) = 3x^2 - 12$$

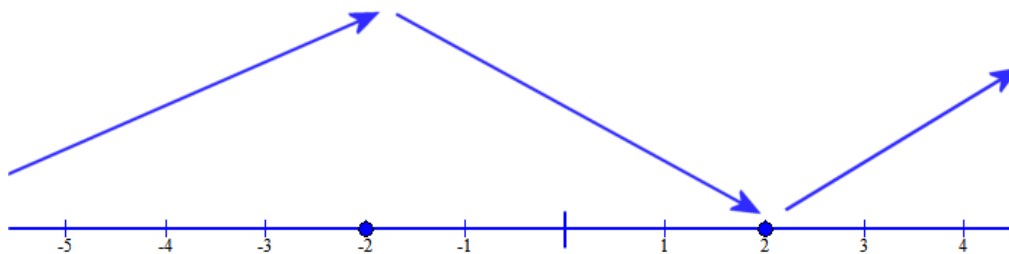
$$\text{Igualamos a cero: } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Veamos el comportamiento de la derivada en los distintos intervalos en que se divide la recta real:

En $(-\infty, -2)$ tomamos un valor $x = -3 \Rightarrow f'(-3) = 3(-3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15 > 0$ La función crece.

En $(-2, 2)$ tomamos un valor $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 3(0)^2 - 12 = -12 < 0$ La función decrece.

En $(2, +\infty)$ tomamos un valor $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 3(3)^2 - 12 = 27 - 12 = 15 > 0$ La función crece.



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 2)$

Tiene un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

CUESTIÓN A5. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

b) Hallar $\int_1^3 f(x) dx$.

a) Para que la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sea continua lo debe ser en $x = 1$ y en $x = 3$.

En $x = 1$ es continua:

- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + a = a + 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2 = 1 - 2 = -1$
- Existe $f(1) = 1^2 - 2 = -1$
- Deben ser iguales. $a + 1 = -1 \Rightarrow a = -2$

En $x = 3$ es continua:

- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x + b = 3 + b$
- Existe $f(3) = 3 + b$
- Deben ser iguales. $3 + b = 7 \Rightarrow b = 4$

Los valores de los parámetros que hacen continua la función son $a = -2$ y $b = 4$.

b) Como es una integral definida en el intervalo $(1, 3)$ en este intervalo $f(x) = x^2 - 2$.

$$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x^2 - 2 dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x \right]_1^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 2 \cdot 3 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1 \right) = 3 - \frac{1}{3} + 2 = 5 - \frac{1}{3} = \frac{14}{3}$$

CUESTIÓN A6. Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las rectas $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área. (2 puntos)

Para representar la recta basta con una tabla de valores:

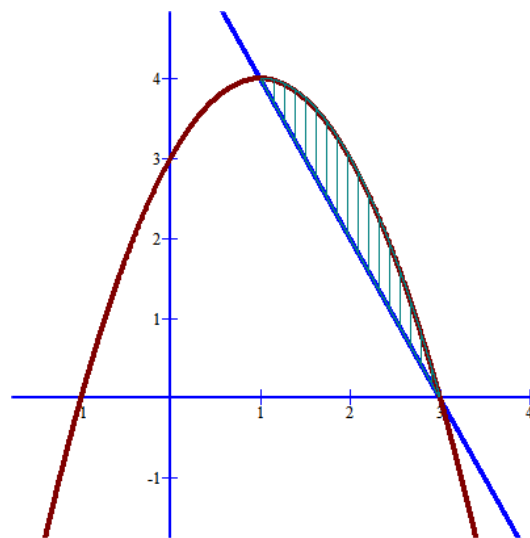
x	$y = 6 - 2x$
1	$6 - 2 = 4$
0	$6 - 0 = 6$

Y para la parábola, hallamos su vértice y algunos puntos más:

$$y = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$$

Vértice(1,4)

x	$y = -x^2 + 2x + 3$
1	4
0	$-0 + 0 + 3 = 3$
2	$-2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 3$
-1	$-(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$



La recta y la parábola se cortan en:

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 2x + 3 \\ y = 6 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 6 - 2x = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

El área de la región limitada por las dos funciones es una integral definida con límites de integración 1 y 3. La función a integrar es la diferencia entre la parábola y la recta.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^3 -x^2 + 2x + 3 - (6 - 2x) dx = \int_1^3 -x^2 + 4x - 3 dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \\ &= \left(\frac{-3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \right) - \left(\frac{-1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \right) = -9 + 18 - 9 - \left(\frac{-1}{3} + 2 - 3 \right) = \\ &= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} u^2 \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{4}{3} u^2$

CUESTIÓN A7. En el coro universitario el 65% de sus componentes son mujeres. El 30% de las mujeres y el 25% de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro:

- ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe?
- Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Construyamos una tabla de contingencia relativa al problema:

El 30% del 65% que son mujeres son bilingües, esto es, $\frac{30 \cdot 65}{100} = \frac{1950}{100} = 19,5\%$ del total.

El 25% del 35% que son hombres son bilingües, esto es, $\frac{25 \cdot 35}{100} = \frac{875}{100} = 8,75\%$ del total

	Bilingües	No bilingües	
Hombres	8,75%		
Mujeres	19,5%		65%
			100%

Completemos los datos que faltan:

	Bilingües	No bilingües	
Hombres	8,75%	26,25%	35%
Mujeres	19,5%	45,5%	65%
	28,25%	71,75%	100%

a) $P(\text{Elegido un componente que sea bilingüe}) = 28,25\% = 0,2825$

b)

$$P(\text{Elegido un componente que sea mujer, sabiendo que es bilingüe}) =$$

$$= P(\text{Mujer} / \text{Bilingüe}) = \frac{P(\text{Mujer y bilingüe})}{P(\text{Bilingüe})} = \frac{19,5}{28,25} = 0,69$$

CUESTIÓN A8. Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$ y $P(A/B) = 0,5$. Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

$$\text{Como } P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A/B) = 0,5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0,5 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{0,2} = 0,5 \Rightarrow P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$$

$$\text{También se cumple } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4$$