Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Elija tres de los seis ejercicios siguientes

EJERCICIO 1:

Un cajero automático contiene billetes de 10 €, 20 € y 50 €. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €. El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema por el método de Gauss. (7 puntos)

EJERCICIO 2:

Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0.1 kg de grasas, 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0.2 kg de grasas, 0.3 kg de hidratos de carbono y 0.5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.

i) Determine, para la función g(x), los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (6 puntos)
ii) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. (4 puntos)

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & x>2 \end{cases}$

i) Estudie la continuidad de la función *f(x)*. (3 puntos)
ii) Represente gráficamente la función *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule el área de la región limitada por la curva *f(x)* y el eje de abscisas en el intervalo [3, 4]. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos.
Calcule:

i) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados. (3 puntos)
ii) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador. (3.5 puntos)
iii) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador. (3.5 puntos)

EJERCICIO 6:

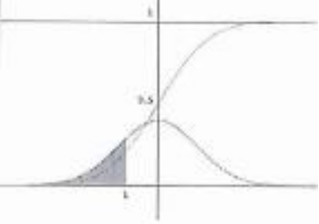
Un estudio concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: [9.58875, 10.41125].

i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de los 144 exfumadores. (5 puntos)
ii) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:
Un cajero automático contiene billetes de 10 €, 20 € y 50 €. En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €. El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos. Calcule cuántos billetes hay de cada tipo.
i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema por el método de Gauss. (7 puntos)

i) Llamamos "x" al número de billetes de 10 €, "y" al número de billetes de 20 € y "z" al número de billetes de 50 €.

"*En total hay 800 billetes*" → $x+y+z=800$
"*En total hay 800 billetes con un importe de 21.000 €*" → $10x+20y+50z=21000$
" *El número de billetes de 10 € es igual que el número de billetes de 20 € y 50 € juntos*" → $x=y+z$

Reunimos estas ecuaciones formando un sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=21000 \\ x=y+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2100 \\ x=y+z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2100 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\}$$

ii)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=2100 \\ x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +2y & +5z & =2100 \\ -x & -y & -z & =-800 \\ \hline & y & +4z & =1300 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & -y & -z & =0 \\ -x & -y & -z & =-800 \\ \hline & -2y & -2z & =-800 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ y+4z=1300 \\ -2y-2z=-800 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\text{Divido ecuación } 3^{\text{a}} \text{ entre } 2\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ y+4z=1300 \\ -y-z=-400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} -y & -z & = & -400 \\ y & +4z & = & 1300 \\ \hline & 3z & = & 900 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ y+4z=1300 \\ 3z=900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ y+4z=1300 \\ \boxed{z=300} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+300=800 \\ y+1200=1300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=500 \\ \boxed{y=1300-1200=100} \end{array}\right\} \Rightarrow x+100=500 \Rightarrow \boxed{x=400}$$

La solución del problema es $x = 400$, $y = 100$, $z = 300$.

Hay 400 billetes de 10 €, 100 de 20 € y 300 de 50 €.

EJERCICIO 2:
Se están considerando dos alimentos (A y B) que contienen tres nutrientes. Cada kg de A contiene 0.1 kg de grasas, 0.6 kg de hidratos de carbono y 0.3 kg de proteínas. Cada kg de B tiene 0.2 kg de grasas, 0.3 kg de hidratos de carbono y 0.5 kg de proteínas. El precio de un kg del alimento A es de 10 euros. El alimento B cuesta el triple que A. Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono, al menos 15 kg de proteínas y no más de 10 kg de grasas. Se desea además no comprar más de 75 kg de A. Determine cuántos kg de cada alimento hay que adquirir para minimizar el coste total de la compra.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se desea maximizar la cantidad de una vitamina, sabiendo que cada kg de A tiene 1.5 unidades y cada kg de B tiene 2 unidades de dicha vitamina. (2 puntos)

i) Llamamos x = kilos comprados de alimento A, y = kilos comprados de alimento B.

Hacemos una tabla para aclarar los datos del problema.

	Kilos de grasas	Kilos de hidratos de carbono	Kilos de proteínas	Coste
Kilos de alimento A (x)	0.1x	0.6x	0.3x	10x
Kilos de alimento B (y)	0.2y	0.3y	0.5y	30y
TOTALES	$0.1x+0.2y$	$0.6x+0.3y$	$0.3x+0.5y$	$10x+30y$

La función a minimizar es el coste total de la compra: $C(x,y)=10x+30y$.

Las restricciones del problema son:

"*Se desea conseguir al menos 18 kg de hidratos de carbono*" → $0.6x+0.3y\geq 18$
"*Se desea conseguir al menos 15 kg de proteínas*" → $0.3x+0.5y\geq 15$
"*Se desea conseguir no más de 10 kg de grasas*" → $0.1x+0.2y\leq 10$
"*Se desea además no comprar más de 75 kg de A*" → $x\leq 75$
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 0.6x+0.3y\geq 18 \\ 0.3x+0.5y\geq 15 \\ 0.1x+0.2y\leq 10 \\ x\leq 75 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+3y\geq 180 \\ 3x+5y\geq 150 \\ x+2y\leq 100 \\ x\leq 75 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 60 \\ 3x+5y\geq 150 \\ x+2y\leq 100 \\ x\leq 75 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$2x+y=60$

x	$y=60-2x$
0	60
30	0

$3x+5y=150$

x	$y=\frac{150-3x}{5}$
0	30
50	0

$x+2y=100$

x	$y=\frac{100-x}{2}$
0	50
60	20

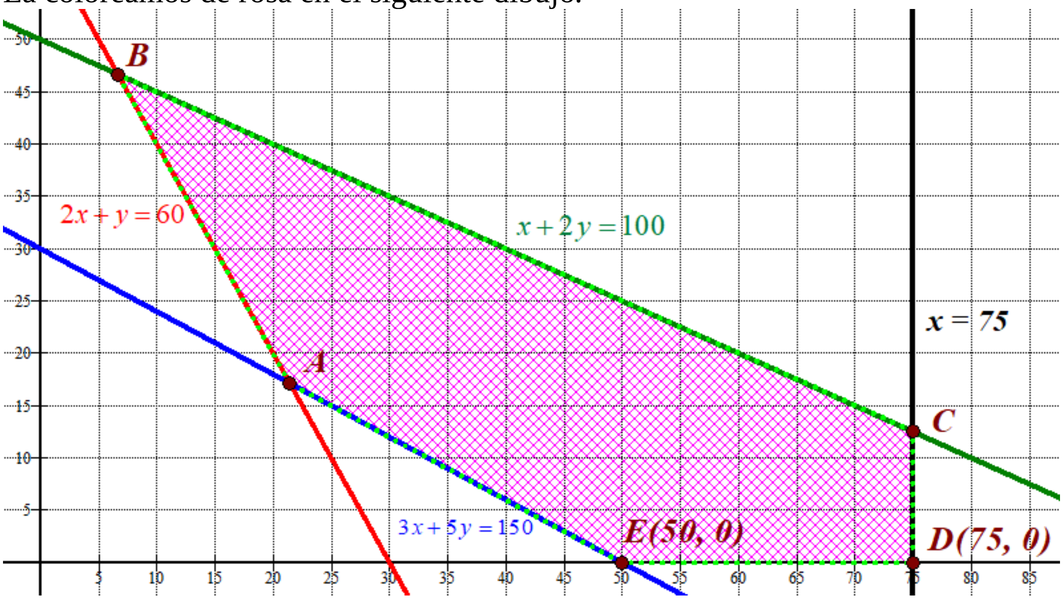
$x=75$

Recta vertical

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\geq 60 \\ 3x+5y\geq 150 \\ x+2y\leq 100 \\ x\leq 75 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano por encima de las rectas roja y azul, por debajo de la recta verde y a la izquierda de la recta negra vertical. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Hallamos las coordenadas de los vértices A, B y C.

$$A\rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=60 \\ 3x+5y=150 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=60-2x \\ 3x+5y=150 \end{array}\right\}\Rightarrow 3x+5(60-2x)=150\Rightarrow 3x+300-10x=150\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x=-150 \Rightarrow \boxed{x=\frac{150}{7}} \Rightarrow \boxed{y=60-2\frac{150}{7}=\frac{120}{7}} \Rightarrow A\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)$$

$$B \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=60 \\ x+2y=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=60-2x \\ x+2y=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+2(60-2x)=100 \Rightarrow x+120-4x=100 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x=-20 \Rightarrow \boxed{x=\frac{20}{3}} \Rightarrow \boxed{y=60-2\frac{20}{3}=\frac{140}{3}} \Rightarrow B\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)$$

$$C \rightarrow \left.\begin{matrix} x=75 \\ x+2y=100 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 75+2y=100 \Rightarrow 2y=25 \Rightarrow \boxed{y=\frac{25}{2}} \Rightarrow C\left(75,\frac{25}{2}\right)$$

Valoramos la función coste $C(x,y)=10x+30y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

$$A\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right) \rightarrow C\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=\frac{1500}{7}+\frac{3600}{7}=\frac{5100}{7}\simeq 728.57$$

$$B\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right) \rightarrow C\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=\frac{200}{3}+\frac{4200}{3}=\frac{4400}{3}\simeq 1466.66$$

$$C\left(75,\frac{25}{2}\right) \rightarrow C\left(75,\frac{25}{2}\right)=750+\frac{750}{2}=1125$$

$$D(75,0) \rightarrow C(75,0)=750$$

$$E(50,0) \rightarrow C(50,0)=500$$

El coste mínimo se consigue en el vértice $E(50,0)$. Comprando solo 50 kg del alimento A se cumplen las restricciones y el coste es mínimo (500 €).

iii) En la nueva situación planteada la función objetivo es la cantidad de vitamina: $v(x,y)=1.5x+2y$.

Valoramos la nueva función en cada vértice en busca del valor máximo de vitamina.

$$A\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right) \rightarrow v\left(\frac{150}{7},\frac{120}{7}\right)=1.5\frac{150}{7}+2\frac{120}{7}=\frac{465}{7}\simeq 66.43$$

$$B\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right) \rightarrow v\left(\frac{20}{3},\frac{140}{3}\right)=1.5\frac{20}{3}+2\frac{140}{3}=\frac{310}{3}\simeq 103.33$$

$$C\left(75,\frac{25}{2}\right) \rightarrow v\left(75,\frac{25}{2}\right)=1.5\cdot 75+2\frac{25}{2}=\frac{275}{2}=137.5$$

$$D(75,0) \rightarrow v(75,0)=1.5\cdot 75=112.5$$

$$E(50,0) \rightarrow v(50,0)=1.5\cdot 50=75$$

La máxima cantidad de vitaminas se consigue en el vértice $C\left(75,\frac{25}{2}\right)$.

Hay que comprar 75 kg del alimento A y 12,5 kilos del alimento B para cumplir las restricciones y obtener un máximo aporte de vitaminas.

EJERCICIO 3:
Sean las funciones $f(x) = -x^2 - 9x + 10$ y $g(x) = 2x^2 - x^3$.
i) Determine, para la función g(x), los puntos de corte con los ejes, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. (6 puntos)
ii) Determine el mínimo de la función $h(x) = f(x) - g(x)$. (4 puntos)

i) Puntos de corte con los ejes.

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0^2 - 0^3 = 0 \Rightarrow O(0,0)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \to O(0,0) \\ o \\ x = 2 \to A(2,0) \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte con los ejes de coordenadas: O(0, 0) y A(2, 0).

Intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

$$g(x) = 2x^2 - x^3 \Rightarrow g'(x) = 4x - 3x^2 \Rightarrow g''(x) = 4 - 6x$$
$$g''(x) = 0 \Rightarrow 4 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = \frac{2}{3}$.

- En $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $g''(0) = 4 > 0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
- En $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $g''(1) = 4 - 6 = -2 < 0$. La función es cóncava (∩) en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

Como se produce un cambio de curvatura en $x = \frac{2}{3}$ la función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{2}{3}$

ii) $h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 - 9x + 10 - (2x^2 - x^3) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$

Derivamos *h(x)* e igualamos a cero su derivada en busca de sus puntos críticos.

$$h(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

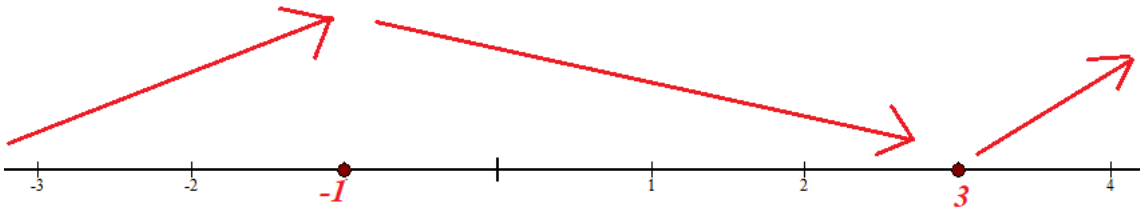
$$h'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ o \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $h'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 21 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 3)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $h'(0) = 3(0)^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9 < 0$. La función decrece en $(-1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $h'(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 - 9 = 15 > 0$. La función crece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un mínimo relativo en $x = 3$.

Como tenemos que $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 10) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
El mínimo relativo no es absoluto.

Como $h(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 10 = -17$ el mínimo relativo tiene coordenadas (3, –17).

EJERCICIO 4:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & x\le 2 \\ -x^2+6x-8 & x>2 \end{cases}$

i) Estudie la continuidad de la función *f(x)*. (3 puntos)

ii) Represente gráficamente la función *f(x)*. (3 puntos)

iii) Calcule el área de la región limitada por la curva *f(x)* y el eje de abscisas en el intervalo [3, 4]. (4 puntos)

i) En cada tramo es continua pues son dos trozos de parábolas.

Falta ver si es continua en el cambio de definición $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-4=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-2x=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}-x^2+6x-8=-2^2+6\cdot 2-8=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$$

La función es continua en $x = 2$ y por lo tanto es continua en $\mathbb{R}$.

ii) La función son dos trozos de dos parábolas.
Averiguamos el vértice de cada una de ellas.

$$\boxed{x\le 2}\to f(x)=x^2-2x \Rightarrow f'(x)=2x-2$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 2x-2=0\Rightarrow x=1 \quad \text{Vértice } (1,-1)$$

$$\boxed{x>2}\to f(x)=-x^2+6x-8 \Rightarrow f'(x)=-2x+6$$

$$f'(x)=0\Rightarrow -2x+6=0\Rightarrow x=3 \quad \text{Vértice } (3,1)$$

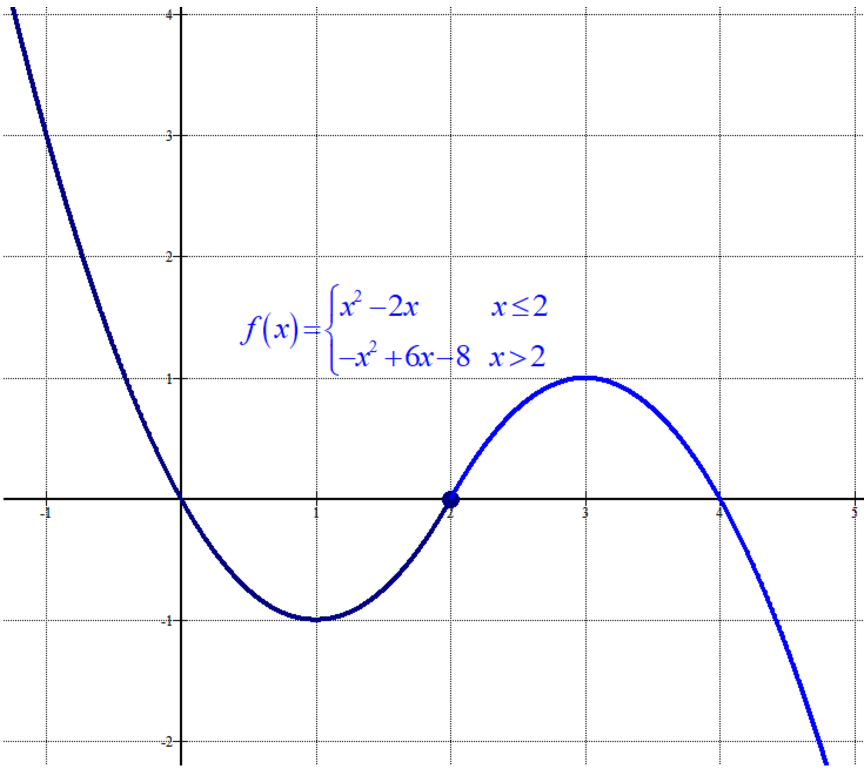
Hacemos una tabla de valores de la función.

$x\le 2$

x	$y=x^2-2x$
0	0
1	-1
2	0

$x>2$

x	$y=-x^2+6x-8$
3	1
4	0
5	-3



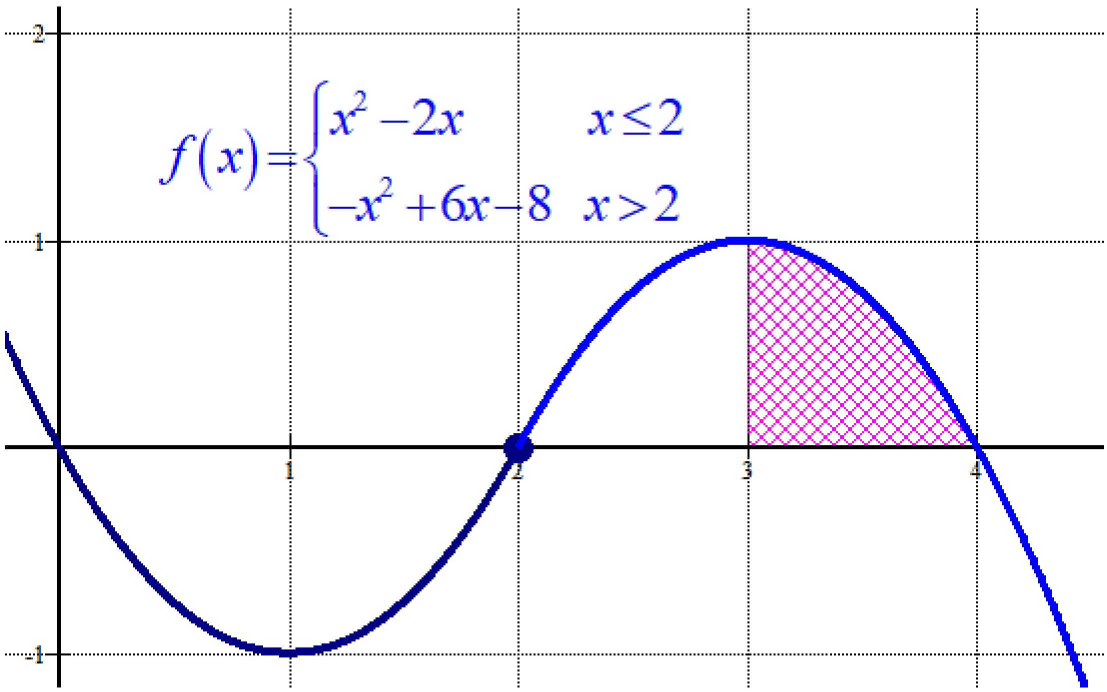
iii)En el intervalo (3, 4) la función es $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

El área pedida es el valor de la integral definida entre 3 y 4 de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

$$Área = \int_3^4 -x^2 + 6x - 8dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_3^4 =$$

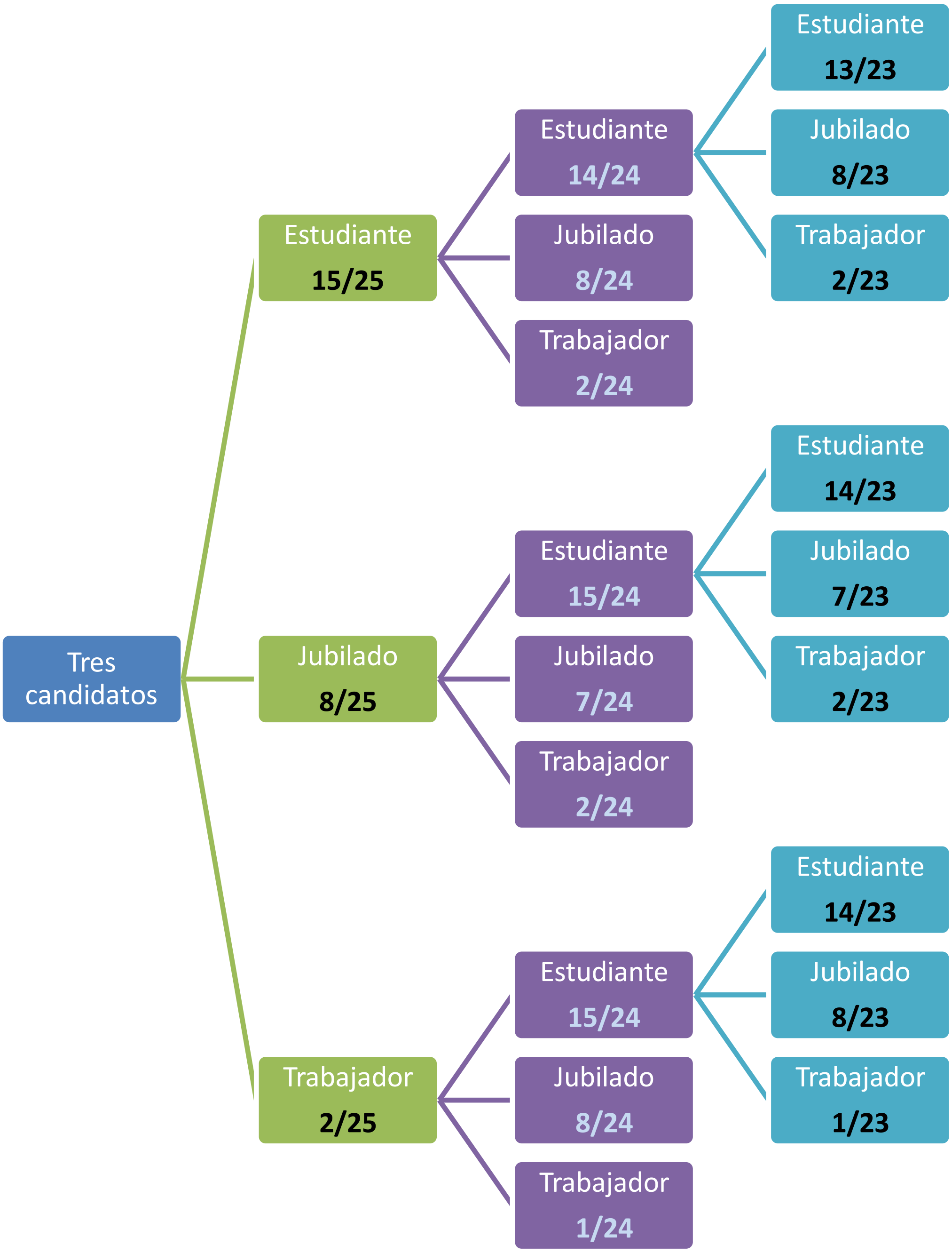
$$= \left[-\frac{4^3}{3} + 3 \cdot 4^2 - 32 \right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 3 \cdot 3^2 - 24 \right] = -\frac{64}{3} + 16 + 9 - 27 + 24 = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.66\, u^2}$$

No lo pide pero ponemos el dibujo del recinto para comprobar el valor obtenido.



EJERCICIO 5:
En una pequeña localidad hay 25 candidatos para realizar una actividad de voluntariado, de los que el 60 % son estudiantes, el 32 % son jubilados y el resto trabajadores. Se seleccionan al azar tres candidatos distintos.
Calcule:
i) La probabilidad de que todos ellos sean jubilados. (3 puntos)
ii) La probabilidad de que sean dos estudiantes y un trabajador. (3.5 puntos)
iii) La probabilidad de que alguno de ellos sea trabajador. (3.5 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol.
Los estudiantes son el 60 % de 25 → 15
Los jubilados son el 32 % de 25 → 8
Los trabajadores son el 25 – 15 – 8 = 2.



El diagrama de árbol es muy grande y no lo hacemos completo, pero nos sirve para darnos cuenta de como funciona el experimento aleatorio y sus probabilidades.

Llamamos E1, E2 y E3 a elegir estudiante en 1ª, 2ª o 3ª selección.
Análogamente llamamos J1, J2 y J3 a elegir jubilado en 1ª, 2ª o 3ª selección.
Y T1, T2 y T3 a elegir trabajador en 1ª, 2ª o 3ª selección.

i)

$$P\left(J1\cap J2\cap J3\right)=P\left(J1\right)P\left(J2/J1\right)P\left(J3/\left(J1\cap J2\right)\right)=\frac{8}{25}\cdot\frac{7}{24}\cdot\frac{6}{23}=\boxed{\frac{14}{675}\simeq 0.02}$$

ii) Hay distintas formas de que se realice este suceso:

$$E1\cap E2\cap T3;\ E1\cap T2\cap E3;\ T1\cap E2\cap E3$$

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos anteriores.

$$P\left(\text{2 estudiantes y 1 trabajador}\right)=P\left(E1\cap E2\cap T3\right)+P\left(E1\cap T2\cap E3\right)+P\left(T1\cap E2\cap E3\right)=$$

$$=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}\cdot\frac{2}{23}+\frac{15}{25}\cdot\frac{2}{24}\cdot\frac{14}{23}+\frac{2}{25}\cdot\frac{15}{24}\cdot\frac{14}{23}=3\cdot\frac{2}{25}\cdot\frac{15}{24}\cdot\frac{14}{23}=\boxed{\frac{21}{230}\simeq 0.09}$$

iii) Existen muchas formas de que ocurra el suceso que se plantea, por ello nos planteamos calcular su probabilidad con el suceso contrario.
El suceso contrario de “Alguno es trabajador” es “Ninguno es trabajador”

$$P\left(\text{Alguno es trabajador}\right)=1-P\left(\text{Ninguno es trabajador}\right)=$$

$$=1-P\left(\overline{T1}\cap\overline{T2}\cap\overline{T3}\right)=1-P\left(\overline{T1}\right)P\left(\overline{T2}/\overline{T1}\right)P\left(\overline{T3}/\left(\overline{T1}\cap\overline{T2}\right)\right)=$$

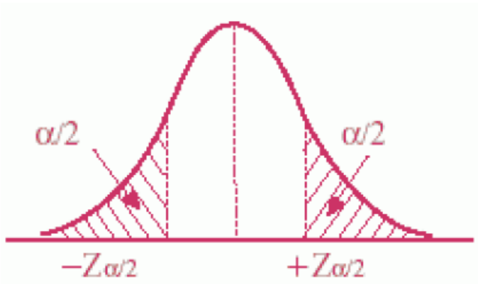
$$=1-\frac{23}{25}\cdot\frac{22}{24}\cdot\frac{21}{23}=1-\frac{77}{100}=\boxed{\frac{23}{100}=0.23}$$

EJERCICIO 6:
Un estudio concluye que el tiempo que tarda un fumador en dejar de fumar se ajusta a una distribución normal. Con una muestra de 144 exfumadores, se ha calculado el siguiente intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio (en meses) en dejar de fumar: [9.58875, 10.41125].
i) Calcule la varianza poblacional y calcule el tiempo medio en dejar de fumar para la muestra de los 144 exfumadores. (5 puntos)
ii) Construya un intervalo de confianza al 94 % para el tiempo medio en dejar de fumar. (5 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Tiempo (en meses) que tarda un fumador en dejar de fumar.

X = N(μ, σ)

i) Tamaño de la muestra = n = 144
El nivel de confianza es del 90%



$$1-\alpha=0,90 \rightarrow \alpha=0,10 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0,05 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,95 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1.64+1.65}{2}=1.645$$

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error=\frac{10.41125-9.58875}{2}=0.41125$$

Utilizamos la fórmula del error y despejo σ.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.41125=1.645\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{144}} \Rightarrow \sigma=\frac{0.41125\cdot 12}{1.645}=3$$

La desviación típica es 3 y por tanto la varianza poblacional es $3^2 = 9$.

La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\bar{x}=\frac{9.58875+10.41125}{2}=10$$

El tiempo medio en dejar de fumar para la muestra es de 10 meses.

ii)

Con un nivel de confianza del 94%

$$1-\alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,97 \rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Busco en la tabla} \\ \text{de la N(0,1)}\end{matrix}\right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.88$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{3}{\sqrt{144}} = 0.47$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(10 - 0.47, 10 + 0.47\right) = \left(9.53, 10.47\right)$$