Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

## Elija tres de los seis ejercicios siguientes

### EJERCICIO 1:

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Calcule $A^{-1}$ y $B^{-1}$ (3 puntos)

ii) Resuelva la ecuación matricial $C-A=2X-6I$ . (3 puntos)

iii) Resuelva la ecuación matricial $AXB=C$. (4 puntos)

### EJERCICIO 2:

Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2%. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2. (2 puntos)

### EJERCICIO 3:

Sean las funciones $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x)=2x^2+ax+1$.

i) Estudie la continuidad de la función *f(x)* y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Calcule el valor del parámetro *a* para que *g(x)* tenga un mínimo en *x = 1/2*. (3 puntos)
iii) Calcule *g´(1)* aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro *a = –1*. (4 puntos)

### EJERCICIO 4:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x+1}$. (5 putos)

ii) Calcule la primitiva de la función $f(x)=(2x+1)^3$, sabiendo que *F(0) = 9/8*. (5 putos)

**EJERCICIO 5:**

En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75% de las visitas buscan alojamiento, el 55% de las visitas buscan vuelo y el 40% de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:

i) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento. (3 puntos)
ii) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo. (4 puntos)
iii) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento. (3 puntos)

**EJERCICIO 6:**

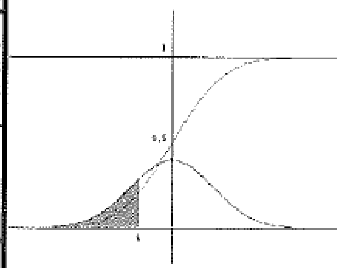
El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos: 49.8, 34.4, 42.1, 55.7, 54.9, 53, 54.6, 53.3, 68.9 y 42.4.

i) Calcule un intervalo de confianza al 93% para el gasto medio. (5 puntos)
ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

## Tabla de la distribución normal estándar Z ~ N(0,1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3,5 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| -3,4 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 |
| -3,3 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0003 |
| -3,2 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 |
| -3,1 | 0,0010 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0008 | 0,0007 | 0,0007 |
| -3,0 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0010 |
| -2,9 | 0,0019 | 0,0018 | 0,0018 | 0,0017 | 0,0016 | 0,0016 | 0,0015 | 0,0015 | 0,0014 | 0,0014 |
| -2,8 | 0,0026 | 0,0025 | 0,0024 | 0,0023 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0021 | 0,0020 | 0,0019 |
| -2,7 | 0,0035 | 0,0034 | 0,0033 | 0,0032 | 0,0031 | 0,0030 | 0,0029 | 0,0028 | 0,0027 | 0,0026 |
| -2,6 | 0,0047 | 0,0045 | 0,0044 | 0,0043 | 0,0041 | 0,0040 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0037 | 0,0036 |
| -2,5 | 0,0062 | 0,0060 | 0,0059 | 0,0057 | 0,0055 | 0,0054 | 0,0052 | 0,0051 | 0,0049 | 0,0048 |
| -2,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0075 | 0,0073 | 0,0071 | 0,0069 | 0,0068 | 0,0066 | 0,0064 |
| -2,3 | 0,0107 | 0,0104 | 0,0102 | 0,0099 | 0,0096 | 0,0094 | 0,0091 | 0,0089 | 0,0087 | 0,0084 |
| -2,2 | 0,0139 | 0,0136 | 0,0132 | 0,0129 | 0,0125 | 0,0122 | 0,0119 | 0,0116 | 0,0113 | 0,0110 |
| -2,1 | 0,0179 | 0,0174 | 0,0170 | 0,0166 | 0,0162 | 0,0158 | 0,0154 | 0,0150 | 0,0146 | 0,0143 |
| -2,0 | 0,0228 | 0,0222 | 0,0217 | 0,0212 | 0,0207 | 0,0202 | 0,0197 | 0,0192 | 0,0188 | 0,0183 |
| -1,9 | 0,0287 | 0,0281 | 0,0274 | 0,0268 | 0,0262 | 0,0256 | 0,0250 | 0,0244 | 0,0239 | 0,0233 |
| -1,8 | 0,0359 | 0,0351 | 0,0344 | 0,0336 | 0,0329 | 0,0322 | 0,0314 | 0,0307 | 0,0301 | 0,0294 |
| -1,7 | 0,0446 | 0,0436 | 0,0427 | 0,0418 | 0,0409 | 0,0401 | 0,0392 | 0,0384 | 0,0375 | 0,0367 |
| -1,6 | 0,0548 | 0,0537 | 0,0526 | 0,0516 | 0,0505 | 0,0495 | 0,0485 | 0,0475 | 0,0465 | 0,0455 |
| -1,5 | 0,0668 | 0,0655 | 0,0643 | 0,0630 | 0,0618 | 0,0606 | 0,0594 | 0,0582 | 0,0571 | 0,0559 |
| -1,4 | 0,0808 | 0,0793 | 0,0778 | 0,0764 | 0,0749 | 0,0735 | 0,0721 | 0,0708 | 0,0694 | 0,0681 |
| -1,3 | 0,0968 | 0,0951 | 0,0934 | 0,0918 | 0,0901 | 0,0885 | 0,0869 | 0,0853 | 0,0838 | 0,0823 |
| -1,2 | 0,1151 | 0,1131 | 0,1112 | 0,1093 | 0,1075 | 0,1056 | 0,1038 | 0,1020 | 0,1003 | 0,0985 |
| -1,1 | 0,1357 | 0,1335 | 0,1314 | 0,1292 | 0,1271 | 0,1251 | 0,1230 | 0,1210 | 0,1190 | 0,1170 |
| -1,0 | 0,1587 | 0,1562 | 0,1539 | 0,1515 | 0,1492 | 0,1469 | 0,1446 | 0,1423 | 0,1401 | 0,1379 |
| -0,9 | 0,1841 | 0,1814 | 0,1788 | 0,1762 | 0,1736 | 0,1711 | 0,1685 | 0,1660 | 0,1635 | 0,1611 |
| -0,8 | 0,2119 | 0,2090 | 0,2061 | 0,2033 | 0,2005 | 0,1977 | 0,1949 | 0,1922 | 0,1894 | 0,1867 |
| -0,7 | 0,2420 | 0,2389 | 0,2358 | 0,2327 | 0,2296 | 0,2266 | 0,2236 | 0,2206 | 0,2177 | 0,2148 |
| -0,6 | 0,2743 | 0,2709 | 0,2676 | 0,2643 | 0,2611 | 0,2578 | 0,2546 | 0,2514 | 0,2483 | 0,2451 |
| -0,5 | 0,3085 | 0,3050 | 0,3015 | 0,2981 | 0,2946 | 0,2912 | 0,2877 | 0,2843 | 0,2810 | 0,2776 |
| -0,4 | 0,3446 | 0,3409 | 0,3372 | 0,3336 | 0,3300 | 0,3264 | 0,3228 | 0,3192 | 0,3156 | 0,3121 |
| -0,3 | 0,3821 | 0,3783 | 0,3745 | 0,3707 | 0,3669 | 0,3632 | 0,3594 | 0,3557 | 0,3520 | 0,3483 |
| -0,2 | 0,4207 | 0,4168 | 0,4129 | 0,4090 | 0,4052 | 0,4013 | 0,3974 | 0,3936 | 0,3897 | 0,3859 |
| -0,1 | 0,4602 | 0,4562 | 0,4522 | 0,4483 | 0,4443 | 0,4404 | 0,4364 | 0,4325 | 0,4286 | 0,4247 |
| -0,0 | 0,5000 | 0,4960 | 0,4920 | 0,4880 | 0,4840 | 0,4801 | 0,4761 | 0,4721 | 0,4681 | 0,4641 |
| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |
| 3,5 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 | 0,9998 |

# SOLUCIONES

**EJERCICIO 1:**

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ *y* $C=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$, responda a las siguientes cuestiones:

i) Calcule $A^{-1}$ y $B^{-1}$ (3 puntos)

ii) Resuelva la ecuación matricial $C-A=2X-6I$ . (3 puntos)

iii) Resuelva la ecuación matricial $AXB=C$ . (4 puntos)

i) La matriz inversa existe si el determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

Existe la matriz inversa $A^{-1}$.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1\neq 0$$

Existe la matriz inversa $B^{-1}$.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

ii) Despejamos en la ecuación matricial.

$$C-A=2X-6I\Rightarrow C-A+6I=2X\Rightarrow X=\frac{1}{2}\left(C-A+6I\right)$$

Sustituimos las matrices *I*, *A* y *C*.

$$C-A+6I=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$C-A+6I=\begin{pmatrix}4-2+6 & 2+2+0\\ -2-0+0 & 6-1+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & 11\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{2}\left(C-A+6I\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & 4\\ -2 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & 11/2\end{pmatrix}}$$

iii) Sabemos que las matrices A y B tienen inversa y se ha calculado en el apartado i). Despejamos en la ecuación.

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 1+6 \\ 0-2 & 0+6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 14 & -7 \\ 18 & -10 \end{pmatrix}}$$

**EJERCICIO 2:**
Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación para sus empleados y está considerando dos tipos de cursos de formación (F1 y F2). El curso F1 es más atractivo para sus empleados y cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2, es menos atractivo para los empleados, pero mejoraría la productividad en un 2%. El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2. Además, los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2. ¿Cuántas horas se debería dedicar a cada curso de formación si se desea maximizar el aumento de la productividad?

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si considerando las preferencias de los empleados, el empresario modifica su idea inicial y decide no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2. (2 puntos)

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "número de horas de formación F1". y = "número de horas de formación F2".

Se desea maximizar el aumento de la productividad. La función objetivo sería:

"*Cada hora de curso conseguiría aumentar la productividad de la empresa en un 1%, mientras que el curso F2 mejoraría la productividad en un 2%*" → $f(x,y)=0.01x+0.02y$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.

"*Un empresario quiere dedicar 50 horas laborales a cursos de formación*" → $x+y\le 50$

"*El empresario decide dedicar al menos 20 horas al curso F1 y no más de 35 horas al curso F2*" → $x\ge 20;\quad y\le 35$

"*Los empleados solicitan que se dedique al curso F1 una cantidad igual o superior de horas que al curso F2*" → $x\ge y$

Además, el número de horas es positivo → $x\ge 0;\quad y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 50 \\ x\ge 20;\quad y\le 35 \\ x\ge y \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas que la delimitan.

$x+y=50$

| $x$ | $y=50-x$ |
|---|---|
| 0 | 50 |
| 25 | 25 |
| 50 | 0 |

$y=x$

| $x$ | $y=x$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 20 | 20 |
| 25 | 25 |

$x=20.$

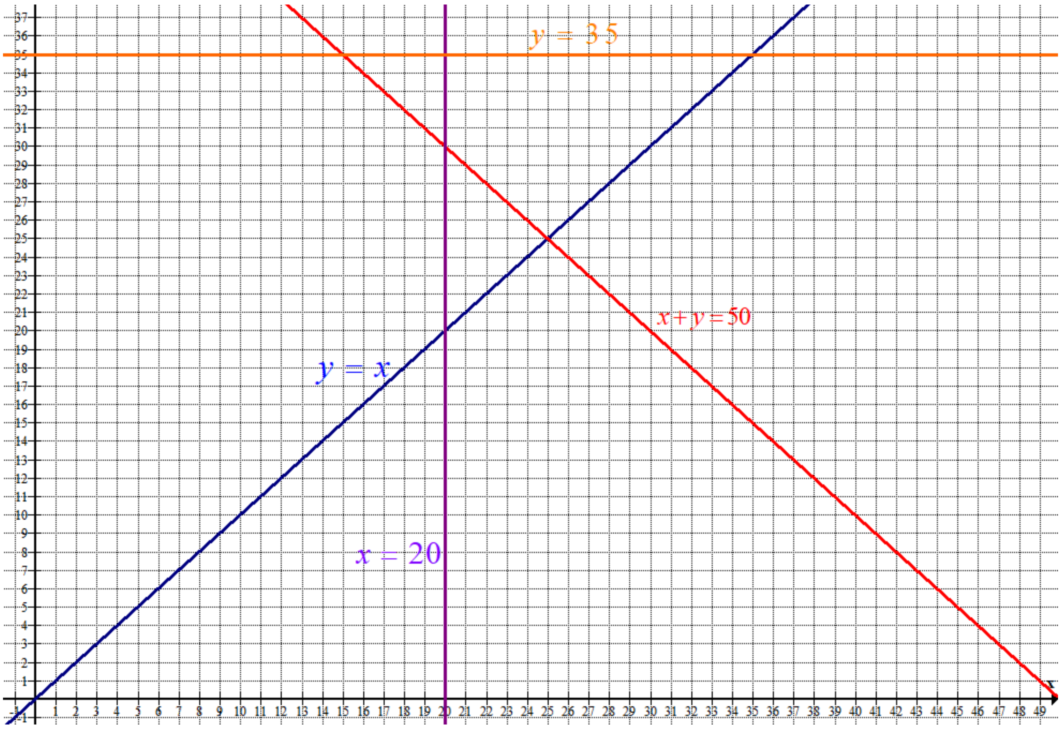
| $x=20$ | $y$ |
|---|---|
| 20 | 20 |
| 20 | 30 |

$y=35.$

| $x$ | $y=35$ |
|---|---|
| 0 | 35 |
| 30 | 35 |

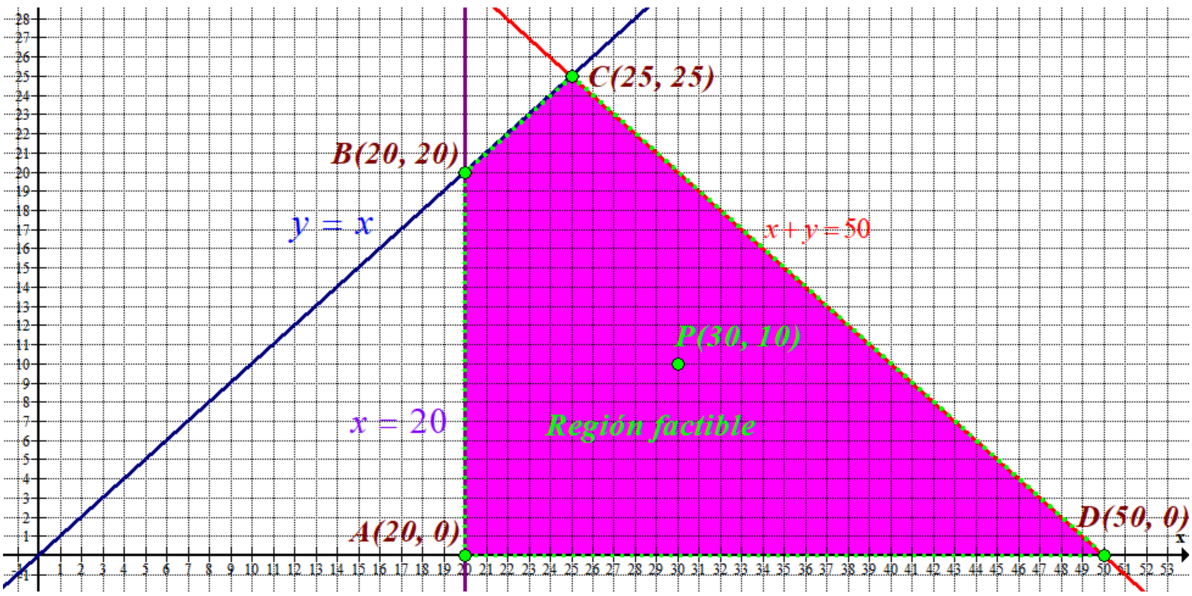
$x\ge 0;\quad y\ge 0.$

Primer cuadrante




Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 50 \\ x\geq 20;\quad y\leq 35 \\ x\geq y \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada en el primer cuadrante a la derecha de la recta lila y por debajo de las rectas azul, roja y naranja.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.




Comprobamos que el punto P(30, 10) cumple todas las restricciones.

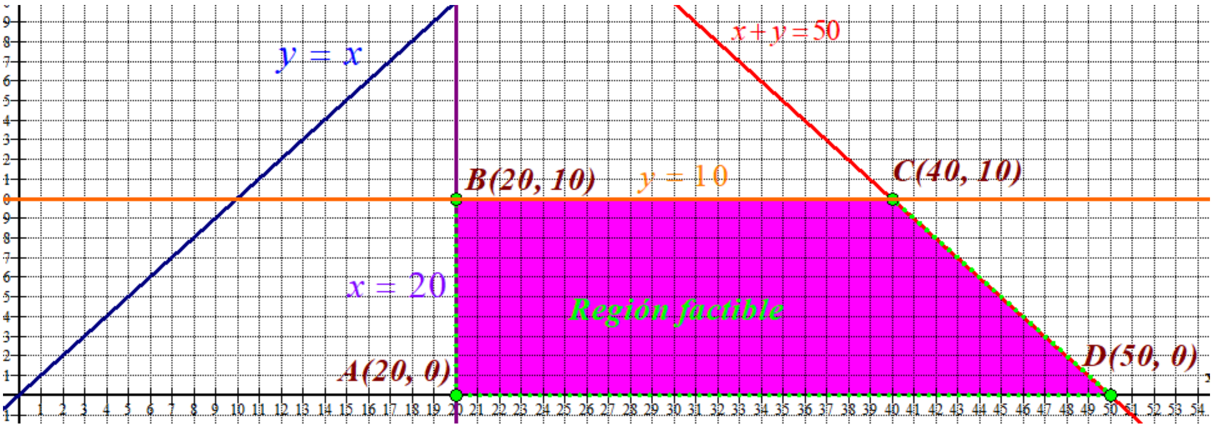
$\left.\begin{array}{l} 30+10\leq 50 \\ 30\geq 20;\quad 10\leq 35 \\ 30\geq 10 \\ 30\geq 0;\quad 10\geq 0 \end{array}\right\}$ ¡SE CUMPLEN! La región factible es correcta.

Valoramos cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo de productividad.

A(20,0) → $f(20,0) = 0.01 \cdot 20 + 0 = 0.2$
B(20, 20) → $f(20,20) = 0.01 \cdot 20 + 0.02 \cdot 20 = 0.6$
C(25, 25) → $f(25,25) = 0.01 \cdot 25 + 0.02 \cdot 25 = 0.75$
D(50, 0) → $f(50,0) = 0.01 \cdot 50 + 0.02 \cdot 0 = 0.5$

La máxima productividad (0.75 = 75 %) se obtiene en el punto C(25, 25).
Con 25 horas de formación tipo F1 y 25 horas del tipo F2 se maximiza el aumento de la productividad.

iii) Si se añade la restricción "*no dedicar más de 10 horas al curso de formación F2*" → $y \leq 10$
La nueva región factible sería:




Si valoramos los nuevos vértices tenemos que:

A(20,0) → $f(20,0) = 0.01 \cdot 20 + 0 = 0.2$
B(20, 10) → $f(20,10) = 0.01 \cdot 20 + 0.02 \cdot 10 = 0.4$
C(40, 10) → $f(40,10) = 0.01 \cdot 40 + 0.02 \cdot 10 = 0.60$
D(50, 0) → $f(50,0) = 0.01 \cdot 50 + 0.02 \cdot 0 = 0.5$

Con la nueva situación la solución que maximiza el aumento de la productividad es C(40, 10).
Con 40 horas de cursos de formación F1 y 10 de cursos de formación F2 se obtiene un aumento máximo de la productividad de un 0.60 = 60%.

**EJERCICIO 3:**

Sean las funciones $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}$ y $g(x)=2x^2+ax+1$.

i) Estudie la continuidad de la función *f(x)* y, en su caso, indique el tipo de discontinuidad. (3 puntos)

ii) Calcule el valor del parámetro *a* para que *g(x)* tenga un mínimo en *x = 1/2*. (3 puntos)

iii) Calcule *g´(1)* aplicando la definición de derivada, para el valor del parámetro *a = –1*. (4 puntos)

i) La función $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}$ tiene por dominio $\mathbb{R}-\{1\}$ ya que *x = 1* anula el denominador.

La función es discontinua en *x = 1*. Estudiamos la discontinuidad:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}=\dfrac{8}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+4x+3}{2x-2}=\dfrac{8}{0^+}=+\infty \end{array}\right\} \text{Es discontinua inevitable de salto infinito.}$$

ii) Para que tenga un mínimo en *x = 1/2* debe anularse la derivada → g ´(1/2) = 0.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=2x^2+ax+1 \Rightarrow g´(x)=4x+a \\ g´(1/2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\frac{1}{2}+a=0 \Rightarrow 2+a=0 \Rightarrow a=-2$$

Además la derivada segunda debe ser positiva → g ´´(1/2) >0. Lo comprobamos.

$g(x)=2x^2-2x+1 \Rightarrow g´(x)=4x-2 \Rightarrow g´´(x)=4>0$. Se cumple.

iii) Para el valor del parámetro *a = –1* la función queda $g(x)=2x^2-x+1$

$$g´(1)=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-(1+h)+1-(2-1+1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1^2+h^2+2h)-1-h+1-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+2h^2+4h-1-h+1-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2h+3)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}2h+3=\boxed{3}$$

**EJERCICIO 4:**

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2x^2+5}{x+1}$. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva de la función $f(x)=(2x+1)^3$, sabiendo que *F(0) = 9/8*. (5 puntos)

i) El denominador de la función se anula para *x = –1*. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1\}$

**Asíntota vertical.** *x = –1*.

Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+5}{x+1}=\dfrac{2+5}{0}=\infty$

La recta *x = –1* es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal**. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}2x=\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

**Asíntota oblicua**. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+5}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}2=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty} f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x+1}-2x=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+5}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}}=-2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=2x-2$

ii)

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(2x+1)^3\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=2x+1\Rightarrow dt=2dx\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right\}=\int t^3\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^3dt=\frac{1}{2}\frac{t^4}{4}=$$

$$=\frac{1}{8}t^4=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio}\\ t=2x+1\end{array}\right\}=\frac{1}{8}(2x+1)^4+K$$

$$F(x)=\frac{1}{8}(2x+1)^4+K$$

Como debe cumplirse que *F(0) = 9/8* determinamos el valor de K para que ocurra.

$$\left.\begin{array}{r}F(x)=\frac{1}{8}(2x+1)^4+K\\ F(0)=\frac{9}{8}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{8}(2\cdot0+1)^4+K=\frac{9}{8}\Rightarrow\frac{1}{8}+K=\frac{9}{8}\Rightarrow K=\frac{9}{8}-\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$$

La primitiva buscada es $F(x)=\dfrac{1}{8}(2x+1)^4+1$.

**EJERCICIO 5:**
En una empresa de reservas de viajes y alojamientos por internet, el 75% de las visitas buscan alojamiento, el 55% de las visitas buscan vuelo y el 40% de las visitas buscan alojamiento y vuelo. Se selecciona una visita al azar. Calcule:
i) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento. (3 puntos)
ii) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo. (4 puntos)
iii) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento. (3 puntos)

Llamemos A = "Cliente busca alojamiento"; V = "Cliente busca vuelo".
Las probabilidades de que un cliente que visita la web de reservas busque alojamiento es $P(A)=0.75$. De que busque vuelo es $P(V)=0.55$. De que busque alojamiento y vuelo es $P(A\cap V)=0.40$.

Construimos una tabla de contingencia para obtener el resto de probabilidades.

| | Cliente busca vuelo ($V$) | Cliente no busca vuelo $(\overline{V})$ | |
|---|---|---|---|
| Cliente busca alojamiento ($A$) | **40** $P(A\cap V)=0.40$ | $P(A\cap\overline{V})=$ | **75** |
| Cliente no busca alojamiento $(\overline{A})$ | $P(\overline{A}\cap V)=$ | $P(\overline{A}\cap\overline{V})=$ | |
| | **55** | | **100** |

Completamos la tabla aplicando la propiedad de que la suma del contenido de las 2 primeras celdas da como resultado el contenido de la tercera (tanto en vertical como en horizontal).

| | Cliente busca vuelo ($V$) | Cliente no busca vuelo $(\overline{V})$ | |
|---|---|---|---|
| Cliente busca alojamiento ($A$) | **40** $P(A\cap V)=0.40$ | **35** $P(A\cap\overline{V})=0.35$ | **75** |
| Cliente no busca alojamiento $(\overline{A})$ | **15** $P(\overline{A}\cap V)=0.15$ | **10** $P(\overline{A}\cap\overline{V})=0.10$ | **25** |
| | **55** | **45** | **100** |

Con estos datos respondemos a las preguntas planteadas.

i) La probabilidad de que busque vuelo o alojamiento → $P(A\cup V)$

$$P(A\cup V)=\{\text{Regla de Laplace}\}=\frac{40+35+15}{100}=\frac{90}{100}=\boxed{\frac{9}{10}=0.9}$$

ii) La probabilidad de que busque alojamiento, sabiendo que no busca vuelo → $P(A/\overline{V})$

$$P(A/\overline{V})=\frac{P(A\cap\overline{V})}{P(\overline{V})}=\frac{35}{45}=\boxed{\frac{7}{9}\simeq 0.78}$$

iii) La probabilidad de que no busque vuelo ni alojamiento → $P(\overline{A}\cap\overline{V})$

$$P(\overline{A}\cap\overline{V})=\{\text{Regla de Laplace}\}=\frac{10}{100}=\boxed{\frac{1}{10}=0.1}$$

**EJERCICIO 6:**
El gasto (en euros) por cliente en un supermercado sigue una distribución normal con varianza 64. Se selecciona una muestra de clientes, obteniéndose los siguientes gastos: 49.8, 34.4, 42.1, 55.7, 54.9, 53, 54.6, 53.3, 68.9 y 42.4.

i) Calcule un intervalo de confianza al 93% para el gasto medio. (5 puntos)

ii) Determine el tamaño de la muestra necesario para que el error máximo se reduzca a la mitad. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = Gasto en euros de un cliente de un supermercado.

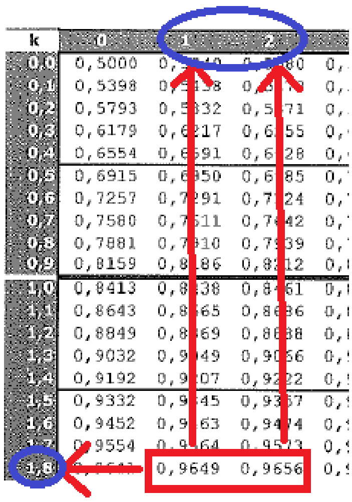
Como la varianza es 64 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{64} = 8$ €.

X = N(μ, 8)

i) El tamaño de la muestra es $n = 10$ y la media muestral es

$$\bar{x} = \frac{49.8+34.4+42.1+55.7+54.9+53+54.6+53.3+68.9+42.4}{10} = 50.91\text{ €}$$

$$1-\alpha = 0{,}93 \to \alpha = 0{,}07 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}035 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}965 \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81$$



| k | 0 | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 0,1 | 0,5398 | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | [illegible] |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | [illegible] |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | [illegible] |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | [illegible] |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | [illegible] |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | [illegible] |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | [illegible] |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | [illegible] |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | [illegible] |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | [illegible] |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | [illegible] |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | [illegible] |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | [illegible] |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | [illegible] |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | [illegible] |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | [illegible] |
| 1,8 | [illegible] | $\boxed{0{,}9649}$ | $\boxed{0{,}9656}$ | [illegible] |

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}81 \cdot \frac{8}{\sqrt{10}} \simeq 4.58$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (50.91 - 4.58, 50.91 + 4.58) = (46.33,\ 55.49)$$

ii) La mitad del error sería $Error = \frac{4.58}{2} = 2.29$ €

Aplicamos la fórmula del error y despejamos "*n*":

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2.29 = 1.81 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.29\sqrt{n} = 1.81 \cdot 8 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.81 \cdot 8}{2.29} \Rightarrow n = \left(\frac{1.81 \cdot 8}{2.29}\right)^2 = 39.98..$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 40 clientes. A partir de ese tamaño de muestra el error cometido es menor de 2.29 €.