Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2020–2021

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(1)**
	Convocatoria:

Instrucciones:

- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenido, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.

a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2)=\ 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}-\{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 ptos

b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1$ y $b=-3$ 1.25 ptos

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

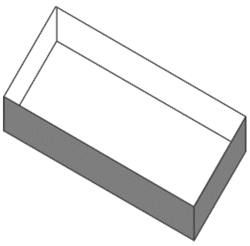


Figura 1

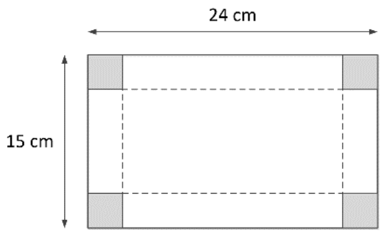


Figura 2

2.5 ptos

Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M=X^2-Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -3 & -1\end{pmatrix} \\ 2X+Y=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$$

2.5 ptos

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$$A(0,-2,3),\ B\ (1,-1,4),\ C\ (2,3,3) \text{ y } D(4,5,5)$$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.
A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi : \begin{cases} x = 1+2\lambda+3\mu \\ y = -2+\lambda \\ z = 1-3\lambda-3\mu \end{cases}$ 1 pto

que pasa por el punto A.

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1 : 2x+3y-z=9 \quad y \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -2-\lambda+2\mu \\ z = 3+3\lambda-\mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. 0.5 ptos

b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas. 1 pto

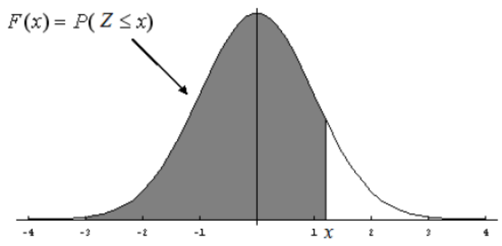
c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1 1 pto

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:

a) Si se lo toman 100 pacientes**,** ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes? 1 pto

b) Si se lo toman 225 pacientes**,** ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes? 1 pto

c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes? 0.5 ptos



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

SOLUCIONES

Bloque 1.- Análisis (seleccione solo una pregunta)

1A. Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^2-2}{b-x}$, donde a y b son dos parámetros con valores reales.
a) Calcular el valor de los parámetros a y b que verifican que $f(-2)=\ 2$ y que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}-\{5\}$. Escribir la función resultante $f(x)$ y calcular su derivada $f'(x)$. 1.25 ptos
b) Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la función $f(x)$ si los parámetros toman los valores $a=-1$ y $b=-3$ 1.25 ptos

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{ax^2-2}{b-x} \\ f(-2)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=\frac{a(-2)^2-2}{b-(-2)} \Rightarrow 2=\frac{4a-2}{b+2} \Rightarrow 2b+4=4a-2 \Rightarrow \boxed{2b=4a-6}$$

La función no es continua en $x = 5$, por lo que el denominador debe anularse para dicho valor, luego debe ser $b = 5$.
Aplicando a lo obtenido inicialmente tenemos que $10 = 4a - 6 \rightarrow 4a = 16 \rightarrow a = 4$

Los valores buscados son $a = 4$ y $b = 5$.

La función queda $f(x)=\dfrac{4x^2-2}{5-x}$

Su derivada es:

$$f(x)=\frac{4x^2-2}{5-x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{8x(5-x)-(-1)(4x^2-2)}{(5-x)^2}=\frac{40x-8x^2+4x^2-2}{(5-x)^2}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\frac{-4x^2+40x-2}{(5-x)^2}}$$

b) Para $a=-1$ y $b=-3$ la función queda $f(x)=\dfrac{-x^2-2}{-3-x}=\dfrac{x^2+2}{3+x}$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3\}$

Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x = -3$?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2}{3+x}=\frac{11}{0}=\infty$$

$x = -3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{3+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}}{\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{0}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2}{3+x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{3x+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{3x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{3}{x}+1} = \frac{1+0}{0+1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{3+x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+2-3x-\cancel{x^2}}{3+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-3x}{3+x} = -3$$

$y = x - 3$ es la asíntota oblicua.

1B. Se desea construir una caja sin tapa superior (ver Figura 1). Para ello, se usa una lámina de cartón de 15 cm de ancho por 24 cm de largo, doblándola convenientemente después de recortar un cuadrado de iguales dimensiones en cada una de sus esquinas (ver Figura 2). Se determina como requisito que la caja a construir contenga el mayor volumen posible. Indicar cuáles son las dimensiones de la caja y su volumen máximo.

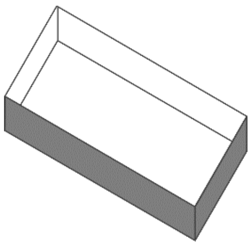


Figura 1

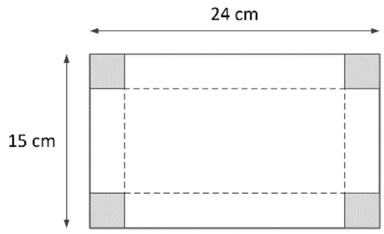
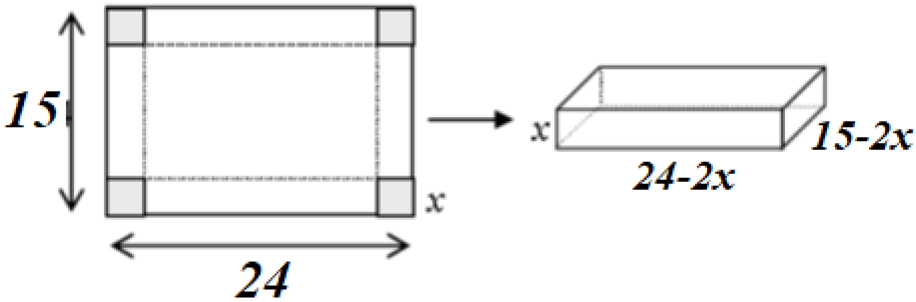


Figura 2

2.5 ptos

Queremos maximizar el volumen en función de la longitud del lado de los cuadraditos que quitamos en cada esquina.
Llamamos x = longitud del lado que quitamos



El volumen es $v(x)=x(15-2x)(24-2x)$. Derivamos e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$v(x)=x(15-2x)(24-2x)=x\left(360-30x-48x+4x^2\right)=360x-78x^2+4x^3$$

$$v'(x)=360-156x+12x^2$$

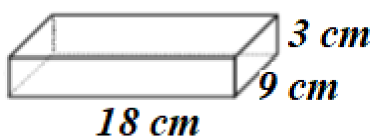
$$v'(x)=0 \Rightarrow 360-156x+12x^2=0 \Rightarrow 30-13x+x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{(-13)^2-120}}{2}=\frac{13\pm 7}{2}=\begin{cases}\frac{13-7}{2}=3\\ \frac{13+7}{2}=10\end{cases}$$

Hallamos la segunda derivada y vemos cual es el máximo relativo del volumen.

$$v'(x)=360-156x+12x^2 \Rightarrow v''(x)=-156+24x \Rightarrow \begin{cases}v''(3)=-156+72=-84<0\\ v''(10)=-156+240=84>0\end{cases}$$

El máximo relativo se obtiene para $x = 3$. El volumen máximo es de $18 \cdot 9 \cdot 3 = 486$ cm^3.



Bloque 2.- Álgebra (seleccione solo una pregunta)

2A. Calcular el valor de la matriz $M = X^2 - Y^2$, siendo X e Y las matrices que son solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

2.5 ptos

Resolvemos el sistema matricial.

$$\begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ 2X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = -2\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \\ -4X - 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{\text{Sustituyo en la 2ª ecuación}\} \Rightarrow 2X + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es $X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz M.

$$M = X^2 - Y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 16+6 & 8-2 \\ 12-3 & 6+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 25-5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -11 & 6 \end{pmatrix}}$$

2B. Un granjero compra un determinado mes 274€ de pienso para su ganado. Con ese dinero obtiene un total de 66 sacos de pienso de tres marcas diferentes: A, B y C. Se sabe que el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente. También se sabe que el número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos. Averiguar la cantidad de sacos que el granjero ha comprado de cada una de las tres marcas. 2.5 ptos

Llamamos "x" al número de sacos de A, "y" al número de sacos de B, "z" a los sacos de C.

"*Obtiene un total de 66 sacos de pienso*" → $x+y+z=66$

"*Compra un determinado mes 274€ de pienso y el precio de cada marca de pienso que ha comprado es de 5€, 4€ y 4€, respectivamente*" → $5x+4y+4z=274$

"*El número de sacos adquiridos de la marca C es el doble que el total de sacos comprados de las marcas A y B juntos*" → $z=2(x+y)$

Juntamos todas las ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=66 \\ 5x+4y+4z=274 \\ z=2x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2x+2y=66 \\ 5x+4y+4(2x+2y)=274 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3y=66 \\ 5x+4y+8x+8y=274 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=22 \\ 13x+12y=274 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=22-y \\ 13x+12y=274 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13(22-y)+12y=274 \Rightarrow 286-13y+12y=274 \Rightarrow -y=-12 \Rightarrow \boxed{y=12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=22-12=10} \Rightarrow \boxed{z=20+24=44}$$

Ha comprado 10 sacos de la marca A, 12 de B y 44 de C.

Bloque 3.- Geometría (seleccione solo una pregunta)

3A. Dados los siguientes puntos en el espacio tridimensional:

$A(0,-2,3)$, $B\ (1,-1,4)$, $C\ (2,3,3)$ y $D(4,5,5)$

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios.
A continuación, calcular la ecuación del plano que los contiene. 1.5 ptos

b) Calcular la ecuación de la recta r, perpendicular al plano $\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases}$ 1 pto

que pasa por el punto A.

a) Para comprobar que son coplanarios hallo el plano **π** que contiene a los puntos A, B y C, después compruebo que el punto D está en el plano **π**.

Hallamos la ecuación del plano **π** que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,-1,4)-(0,-2,3) = (1,1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2,3,3)-(0,-2,3) = (2,5,0) \\ A(0,-2,3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y+2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\pi : 2y + 4 + 5z - 15 - 2z + 6 - 5x = 0 \Rightarrow \pi : -5x + 2y + 3z - 5 = 0$$

¿El punto D(4,5,5) pertenece al plano **π**?

$$\left.\begin{array}{l} \pi : -5x + 2y + 3z - 5 = 0 \\ ¿D(4,5,5) \in \pi ? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿-5\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 5 - 5 = 0? \Rightarrow ¿-20 + 10 + 15 - 5 = 0?$$

Como la igualdad es cierta se concluye que los cuatro puntos A, B, C y D pertenecen al plano **π** y por tanto son coplanarios.
El plano que los contiene tiene ecuación $\pi : -5x + 2y + 3z - 5 = 0$.

b) El vector director de la recta perpendicular al plano será el vector normal del plano.

Hallamos el vector normal del plano realizando el producto vectorial de sus vectores directores.

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda - 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (2,1,-3) \\ \vec{v} = (3,0,-3) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3i - 3j - 3k = (-3,-3,-3)$$

Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por $A(0,-2,3)$ y con vector director $\vec{n} = (-3,-3,-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r} = \vec{n} = (-3,-3,-3) \\ A(0,-2,3) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x = -3t \\ y = -2 - 3t \text{, siendo } t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 3t \end{cases}}$$

3B. Dadas las ecuaciones de los planos

$$\pi_1: 2x+3y-z=9 \quad y \quad \pi_2: \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-2-\lambda+2\mu \\ z=3+3\lambda-\mu \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación de la recta paralela a los planos π_1 y π_2 que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$ 1.25 ptos

b) Calcular el ángulo formado por los planos π_1 y π_2 1.25 ptos

a) Hallamos el punto medio del segmento de extremos $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-3,2)$

$$M=\frac{(1,-1,0)+(-1,-3,2)}{2}=(0,-2,1)$$

Estudiamos la posición relativa de los dos planos.

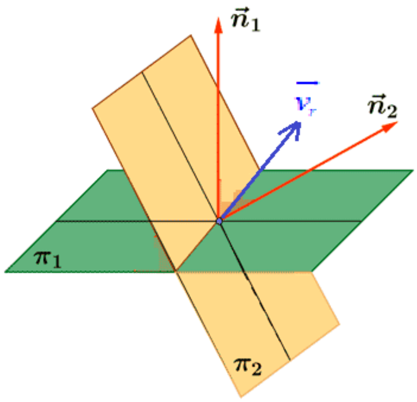
$$\pi_1: 2x+3y-z=9 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(2,3,-1)$$

$$\pi_2: \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-2-\lambda+2\mu \\ z=3+3\lambda-\mu \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,-1,3)\times(1,2,-1)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-5i+4j+3k=(-5,4,3)$$

Los vectores normales de los planos no tienen coordenadas proporcionales, por lo que los planos no son ni paralelos ni coincidentes. Los planos π_1 y π_2 son secantes y se cortan en una recta.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1}=(2,3,-1) \\ \overrightarrow{n_2}=(-5,4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{-5} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{-1}{3}$$

La recta que nos piden hallar es paralela a ella, por lo que tendrán el mismo vector director.
El vector director de la recta intersección lo calculamos con el producto vectorial de los vectores normales de los planos.

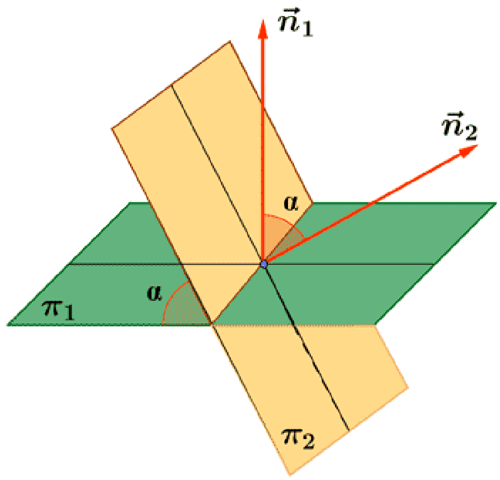


$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{n_1}=(2,3,-1) \\ \overrightarrow{n_2}=(-5,4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=13i-j+23k=(13,-1,23)$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por $M=(0,-2,1)$ y con vector director $\overrightarrow{v_r}=(13,-1,23)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(13,-1,23)\\ M=(0,-2,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{r:\begin{cases}x=13\lambda\\ y=-2-\lambda\ ,\ siendo\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1+23\lambda\end{cases}}$$

b) Utilizamos los vectores normales de los dos planos. El ángulo formado entre los dos vectores normales es igual que el ángulo formado entre los dos planos.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1}=(2,3,-1)\\ \overrightarrow{n_2}=(-5,4,3)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\Rightarrow$$

$$(2,3,-1)(-5,4,3)=\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{(-5)^2+4^2+3^2}\cdot\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10+12-3=\sqrt{14}\sqrt{50}\cdot\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\Rightarrow -1=\sqrt{700}\cdot\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\Rightarrow$$

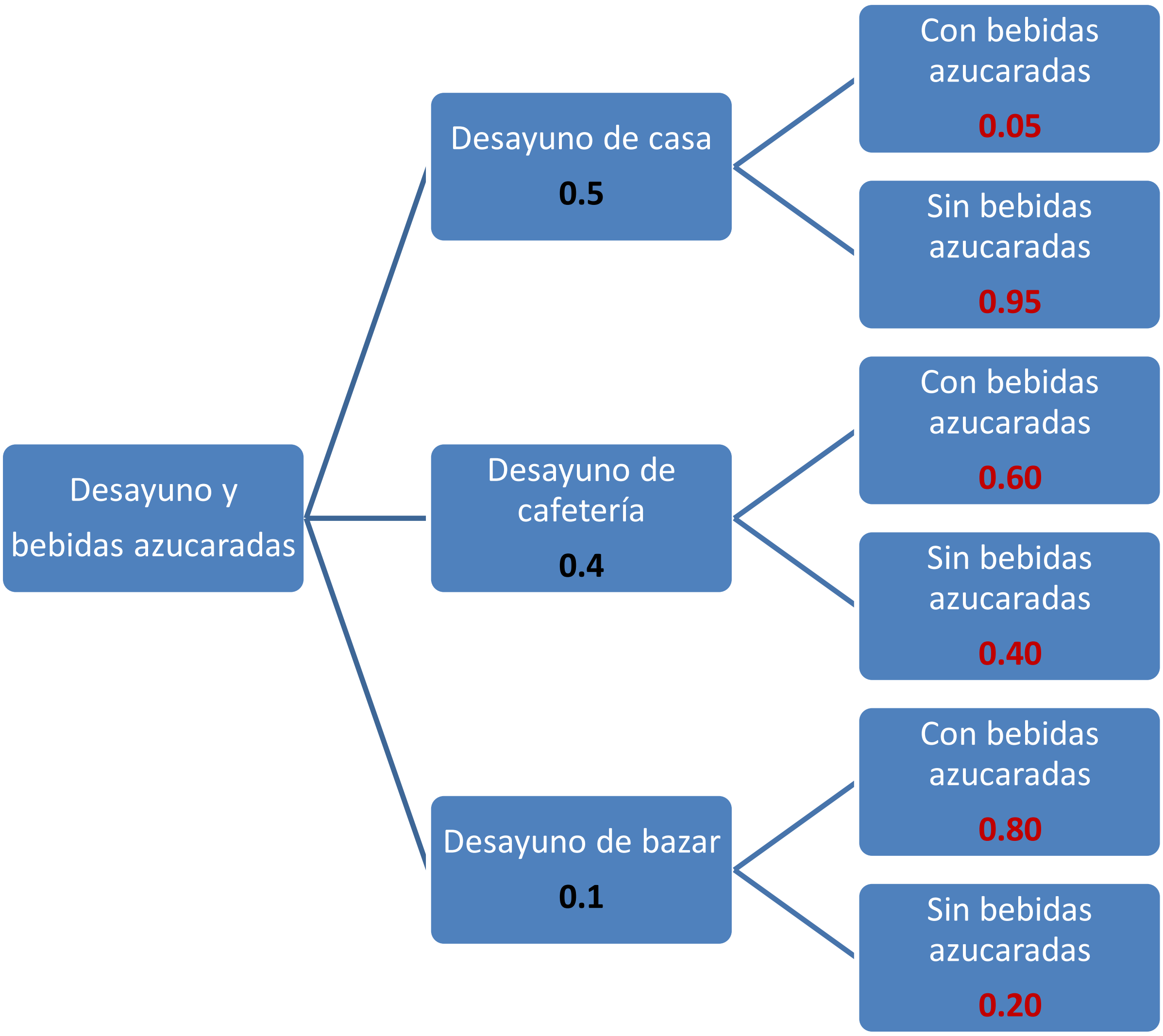
$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{700}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{700}}\right)=92.16^{\circ}$$

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es de 92.16º

Bloque 4.- Probabilidad (seleccione solo una pregunta)

4A. En un cierto instituto el 50% de su alumnado lleva el desayuno desde casa, el 40% lo compra en la cafetería del instituto, y el resto lo adquiere en un bazar cercano al instituto. Solamente un 5% de los desayunos que se llevan desde casa incluyen bebidas azucaradas, pero en los desayunos comprados en la cafetería este porcentaje es del 60% y en los desayunos comprados en el bazar del 80%.
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.
b) Justificar si es cierto que más de un 30% de los desayunos del alumnado incluyen bebidas azucaradas.
c) Justificar si es cierto que, elegido un desayuno al azar, la probabilidad que un estudiante lo haya traído desde casa, sabiendo que el desayuno incluye una bebida azucarada, es mayor que 0,1

a) Solo el 100 – 50 – 40 = 10 % son desayunos comprados en el bazar.
Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = "Desayuno de casa", B = "Desayuno de cafetería", C = "Desayuno de Bazar"

D = "Desayuno con bebida azucarada", $\overline{D}$ = "Desayuno sin bebida azucarada"

Las probabilidades de los sucesos A, B y C aparecen en el diagrama de árbol.

b) Calculamos la probabilidad de que un desayuno lleve bebidas azucaradas.
Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.05+0.4\cdot 0.60+0.1\cdot 0.80=\boxed{0.345}$$

La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga bebidas azucaradas en su desayuno es de 0.345, es decir 34.5% de los alumnos toman bebidas azucaradas en el desayuno.
Por lo que SI es cierto que más del 30 % toman bebidas azucaradas en el desayuno.

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=\frac{0.5\cdot 0.05}{0.345}=\boxed{\frac{5}{69}\simeq 0.0725}$$

No es cierta la afirmación, pues la probabilidad es 0.0725 < 0.1.

4B. Se ha comprobado que, al aplicar un determinado medicamento, la probabilidad de que elimine el acné a un paciente es del 80 %. Suponiendo independencia de sucesos:
a) Si se lo toman 100 pacientes**,** ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe con más de 75 pacientes?
b) Si se lo toman 225 pacientes**,** ¿cuál es la probabilidad de que el medicamento actúe entre 170 y 190 pacientes?
c) ¿Cuál es el número esperado de pacientes sobre los que NO se eliminará el acné si se toman el medicamento 500 pacientes?

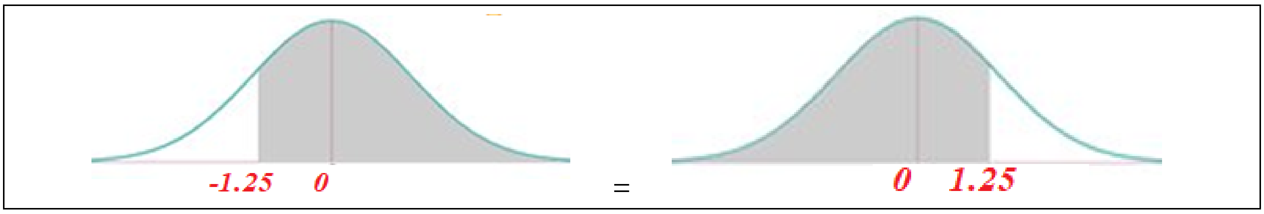
Llamamos X = Número de pacientes que se curan con un medicamento.

N = nº de pacientes = 100. p = P(Un paciente se cure) = 0.80
La variable X es una binomial de parámetros n = 100 y p = 0.8. X = B(100, 0.8)

Como las 100 repeticiones del experimento "tomar un medicamento y ver si te curas" son independientes con idéntica probabilidad en cada repetición y "n" es muy grande la aproximamos por una normal de media n · p = 100 · 0.8 =80 > 5, n · q = 100 · 0.2 = 20 > 5 y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 4$.

Aproximamos las probabilidades con una normal X ´ = N(80, 4).

a) $P(X \geq 75) = P(X\,' \geq 75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{75-80}{4}\right) = P(Z \geq -1.25) = \ldots$



$\ldots = P(Z \leq 1.25) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = \boxed{0.8944}$

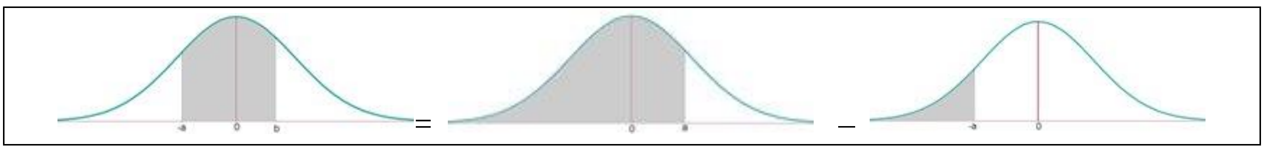
b)

Media = n · p = 225 · 0.8 = 180 >5, también se cumple n · q = 225 · 0.2 = 45 >5.
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{225 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = 6$

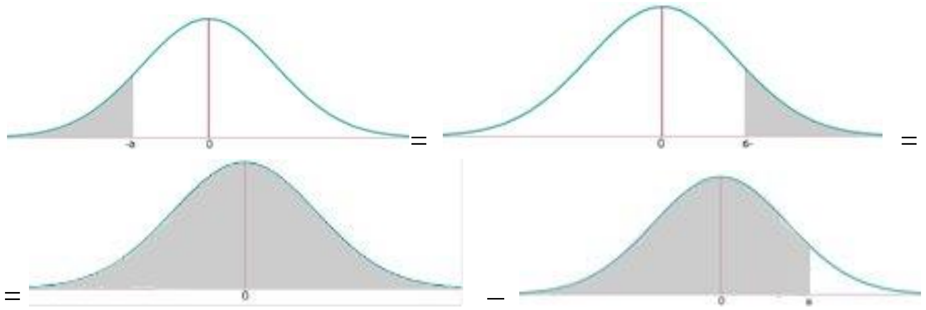
En este caso razonando como en el apartado anterior tenemos X = B(225, 0.8) se aproxima con una normal X ´ = N(180, 6).

$$P(170 \leq X \leq 190) = P(170 \leq X\,' \leq 190) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{170-180}{6} \leq Z \leq \frac{190-180}{6}\right) = P(-1.67 \leq Z \leq 1.67) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \le 1.67) - P(Z \le -1.67) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \le 1.67) - P(Z \ge 1.67) = P(Z \le 1.67) - \left[1 - P(Z \le 1.67)\right] =$$

$$= \{\text{ Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.9525 - [1 - 0.9525] = \boxed{0.905}$$

c) Hemos llamado "q" a la probabilidad de NO curarse el acné. Esta probabilidad vale 0.2. Consideramos la variable Y que cuenta el número de pacientes que no se curan de entre 500. Y = B(500, 0.2) y su esperanza es la media = n · p.
Por lo que en 500 pacientes el número esperado de pacientes que no se curan es de:

$$Esperanza = n \cdot q = 500 \cdot 0.2 = 100$$

En un grupo de 500 pacientes 100 es el número esperado de pacientes a los que no se les curará el acné.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952