	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $n = 2$, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX+A=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$ que pasa por el punto $A = (0,0,0)$. **(0,8 puntos)**

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P = (1,1,1)$ y $Q = (1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto $P = (0,0,0)$, hallar la ecuación del plano π que contiene a r y pasa por el punto P, **(2 puntos)**

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x)=e^{\left(x^2\right)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos(3x)}{sen^2(x)}$ **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Dadas las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+8$, hallar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los que $g(x)\geq f(x)$. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x). **(1,5 puntos)**

E8.- (Análisis)

Hallar los valores de a, b y c para los cuales el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumple las siguientes condiciones:

- $P(0)=1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x=0$ es $m=1$.
- $\int_0^2 P(x)dx=12$. **(2 puntos)**

E9- (Probabilidad y estadística)

En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.

a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**

b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

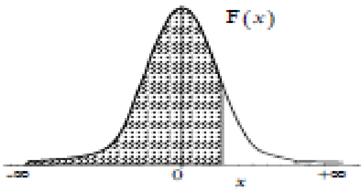
El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.

a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**

b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96,41% de los test? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+\lambda z=0 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = -1$. **(0,8 puntos)**

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+1+2-1+2\lambda+1=3\lambda+3$$

$$|A|=0 \Rightarrow 3\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

Analizamos dos casos distintos.

CASO 1. $\lambda \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $\lambda = -1$

En este caso la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Triangulamos la matriz A/B para establecer los rangos de A y A/B.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 3 & -3 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 2^{\text{a}}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -2 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 3^{\text{a}}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{3\cdot\text{Fila } 3^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila } 2^{\text{a}}} \\ 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva fila } 3^{\text{a}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $\lambda = -1$ estamos en el caso 2 estudiado en el apartado anterior y podemos resolverlo a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (A/B)' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ \boxed{y = z} \end{cases} \Rightarrow x - z + z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

La solución es $x = 0$, $y = t$, $z = t$, siendo $t \in \mathbb{R}$

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de n para los que la matriz A^2 tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para n = 2, hallar la matriz X que verifica la ecuación $AX+A=2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2. **(1 punto)**

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante no se anula.

$$A=\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-1-1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A^2|=\begin{vmatrix} (n-1)^2 & 0 \\ n-2 & 1 \end{vmatrix}=(n-1)^2$$

$$|A^2|=0 \Rightarrow (n-1)^2=0 \Rightarrow n-1=0 \Rightarrow n=1$$

La matriz A^2 tiene inversa cuando n $\neq$ 1.

b) Para n = 2 la matriz A tiene inversa pues su determinante no se anula.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj(A^T)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial planteada.

$$AX+A=2I \Rightarrow AX=2I-A \Rightarrow X=A^{-1}(2I-A)=2A^{-1}-A^{-1}A=2A^{-1}-I$$

$$X=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}$$

E3.- (Geometría)

a) Hallar la recta perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z=1$ que pasa por el punto $A=(0,0,0)$.

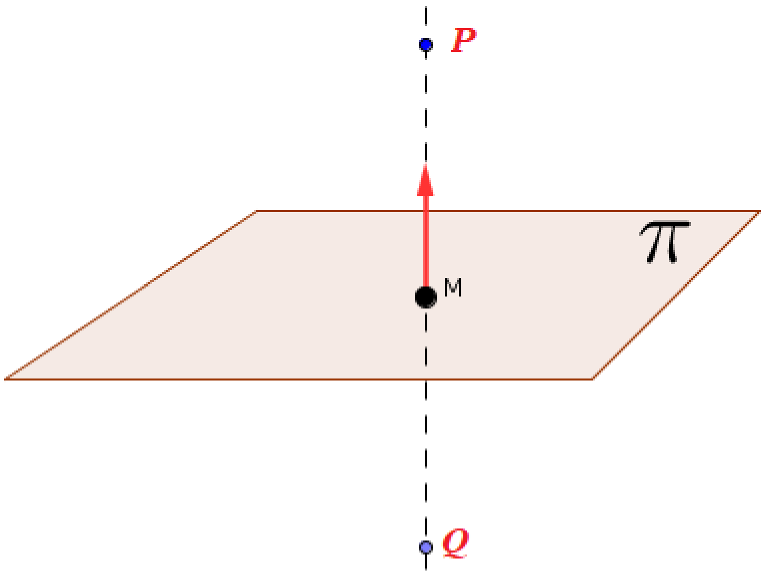
(0,8 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano respecto del cual los puntos $P=(1,1,1)$ y $Q=(1,3,-1)$ son simétricos. **(1,2 puntos)**

a) La recta perpendicular al plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y+z=1 \Rightarrow \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \\ A(0,0,0)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \text{, siendo } \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Hallamos las coordenadas del punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ que pertenece al plano que buscamos.

Determinamos el vector $\overrightarrow{PQ}$ que será el vector normal del plano.

$$M=\frac{(1,1,1)+(1,3,-1)}{2}=\frac{(2,4,0)}{2}=(1,2,0)$$

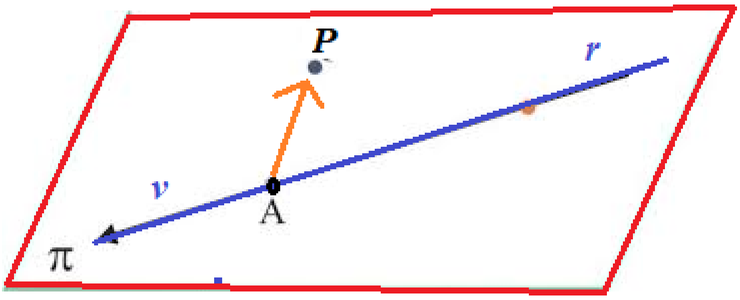
$$\overrightarrow{PQ}=(1,3,-1)-(1,1,1)=(0,2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(0,2,-2) \\ M(1,2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2y-2z+D=0 \\ M(1,2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 4-0+D=0 \Rightarrow D=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 2y-2z-4=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv y-z-2=0}$$

E4.- (Geometría)
Dados la recta $r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}$ y el punto *P = (0,0,0)*, hallar la ecuación del plano π que contiene a *r* y pasa por el punto *P*, **(2 puntos)**

El plano pedido tiene como vectores directores el director de la recta y el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto P.



Hallamos el vector director y un punto de la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1,1,-2) \\ A(-1,2,0) \in r \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AP}$.

$$\overrightarrow{AP} = (0,0,0) - (-1,2,0) = (1,-2,0)$$

Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_r} = (-1,1,-2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AP} = (1,-2,0) \\ P(0,0,0) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 - 2y + 2z - z - 0 - 4x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -4x - 2y + z = 0}$$

E5.- (Análisis)

Representar la función $f(x)=e^{(x^2)}$, determinando antes sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus asíntotas. **(2 puntos)**

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

$$f(x)=e^{(x^2)} \Rightarrow f'(x)=2xe^{(x^2)}$$

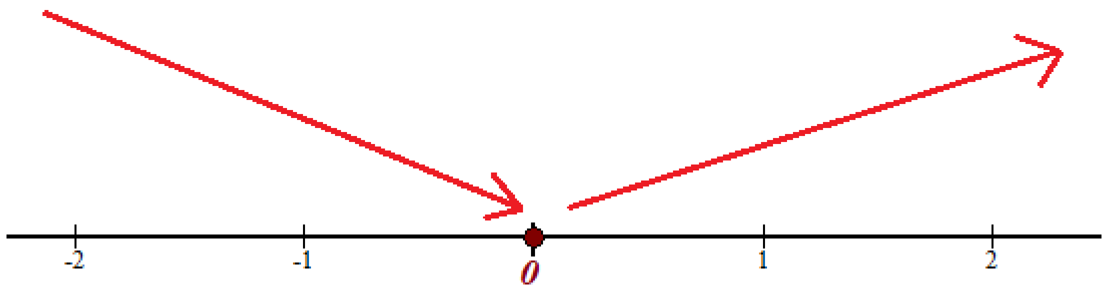
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{(x^2)}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Vemos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=-2e^1=-2e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$

En $(0.+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=2e^1=2e>0$. La función crece en $(0.+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0.+\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$. Como $f(0)=e^0=1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 1).

Estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad.

$$f(x)=e^{(x^2)} \Rightarrow f'(x)=2xe^{(x^2)} \Rightarrow f''(x)=2e^{(x^2)}+2x(2x)e^{(x^2)}=e^{(x^2)}(2+4x^2)$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow (2+4x^2)e^{(x^2)}=0 \Rightarrow 2+4x^2=0 \Rightarrow 1+2x^2=0 \Rightarrow 2x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-\frac{1}{2}}= \text{¡No existe!}$$

No hay punto de inflexión y la curva de la gráfica siempre es cóncava o convexa.

Como $f''(x)=e^{(x^2)}(2+4x^2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=e^0(2+0)=2>0$. La función es siempre convexa (∪).

Calculamos sus asíntotas

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene, pues su dominio son todos los reales.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{(x^2)}=e^{+\infty}=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{\left(x^2\right)}=e^{+\infty}=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\left(x^2\right)}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{\left(x^2\right)}}{1}=+\infty$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\left(x^2\right)}}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^{\left(x^2\right)}}{1}=$$

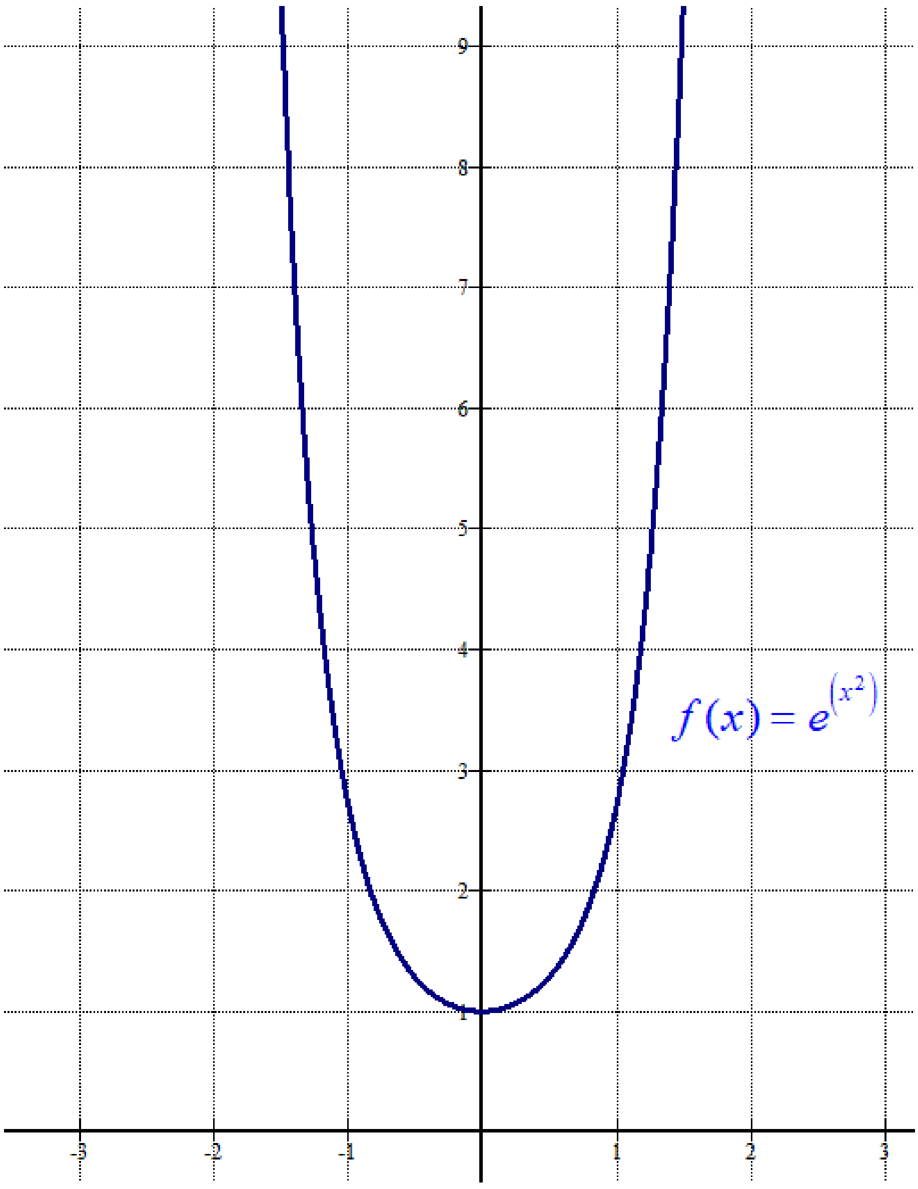
$$=\lim_{x\to-\infty} 2xe^{\left(x^2\right)}=2(-\infty)e^{+\infty}=-\infty$$

No tiene asíntota oblicua.

La función no tiene ninguna asíntota.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y=e^{\left(x^2\right)}$
-2	$e^4\simeq 54.6$
-1	$e\simeq 2.71$
0	1
1	$e\simeq 2.71$
2	$e^4\simeq 54.6$



E6.- (Análisis)

Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos(3x)}{sen^2(x)}$ **(2 puntos)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - \cos(3x)}{sen^2(x)} = \frac{e^0 - 0 - \cos(0)}{sen^2(0)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - 3(-sen(3x))}{2sen(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + 3sen(3x)}{2sen(x)\cos(x)} = \frac{e^0 - 1 + 3sen(0)}{2sen(0)\cos(0)} = \frac{0}{0} =$$

$$= \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 0 + 3\cdot 3\cos(3x)}{2\cos(x)\cos(x) + 2sen(x)(-sen(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 9\cos(3x)}{2\cos^2(x) - 2sen^2(x)} = \frac{e^0 + 9\cos(0)}{2\cos^2(0) - 2sen^2(0)} = \frac{1+9}{2} = \boxed{5}$$

E7.- (Análisis)
a) Dadas las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=-x^2+8$, hallar los valores de $x\in\mathbb{R}$ para los que $g(x)\geq f(x)$
. **(0,5 puntos)**
b) Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x). **(1,5 puntos)**

a) $g(x)\geq f(x)\Rightarrow -x^2+8\geq x^2\Rightarrow 8\geq 2x^2\Rightarrow 4\geq x^2$

Vemos cuando se cumple la igualdad y luego establecemos en que intervalos se cumple la desigualdad pedida.

$$x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

En $(-\infty,-2)$ tomo $x = -5$ y veo si se cumple la inecuación: $¿4\geq(-5)^2?$ ¡No se cumple!

En $(-2,2)$ tomo $x = 0$ y veo si se cumple la inecuación: $¿4\geq(0)^2?$ ¡Si se cumple!

En $(2,+\infty)$ tomo $x = 5$ y veo si se cumple la inecuación: $¿4\geq 5^2?$ ¡No se cumple!

Se cumple solo en el intervalo [–2, 2].

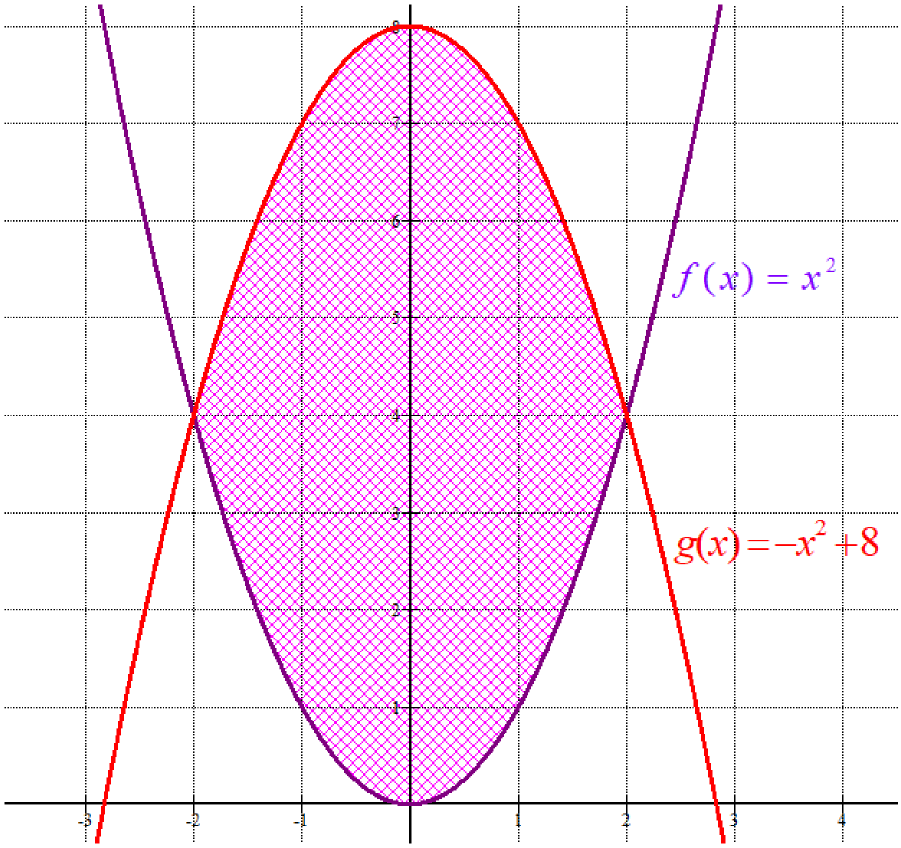
b) Como en el apartado anterior hemos visto donde se cortan las funciones: $x = -2$ y $x = 2$.
También que $g(x)\geq f(x)$ en el intervalo [–2, 2].

El área pedida se calcula con la integral definida entre –2 y 2 de g(x) – f(x).

$$Área=\int_{-2}^{2}-x^2+8-x^2dx=\int_{-2}^{2}-2x^2+8dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[-\frac{2}{3}2^3+16\right]-\left[-\frac{2}{3}(-2)^3+8(-2)\right]=-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}+16=\boxed{\frac{64}{3}\simeq 21.3\,u^2}$$

No piden el dibujo, pero dibujamos para comprobar todo lo obtenido.



E8.- (Análisis)
Hallar los valores de a, b y c para los cuales el polinomio $P(x)=ax^2+bx+c$ cumple las siguientes condiciones:
- $P(0)=1$
- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x=0$ es $m=1$.
- $\int_0^2 P(x)dx=12$. **(2 puntos)**

$$\left.\begin{array}{r} P(x)=ax^2+bx+c \\ P(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=c \Rightarrow \boxed{c=1}$$

Que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $P(x)$ en $x=0$ sea $m=1$ significa que $P\,'(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{r} P(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow P\,'(x)=2ax+b \\ P\,'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2a\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Ya tenemos que el polinomio es $P(x)=ax^2+x+1$. Nos falta determinar el valor de "a".

Utilizamos la tercera condición: $\int_0^2 P(x)dx=12$.

Calculamos la integral definida.

$$\int_0^2 P(x)dx=\int_0^2 ax^2+x+1dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{a}{3}2^3+\frac{1}{2}2^2+2\right]-\left[\frac{a}{3}0^3+\frac{1}{2}0^2+0\right]=\frac{8}{3}a+2+2=\frac{8}{3}a+4$$

Como debe ser 12.

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^2 P(x)dx=12 \\ \int_0^2 P(x)dx=\frac{8}{3}a+4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8}{3}a+4=12 \Rightarrow \frac{8}{3}a=8 \Rightarrow \boxed{a=\frac{24}{8}=3}$$

Los valores son *a = 3, b = c = 1.*

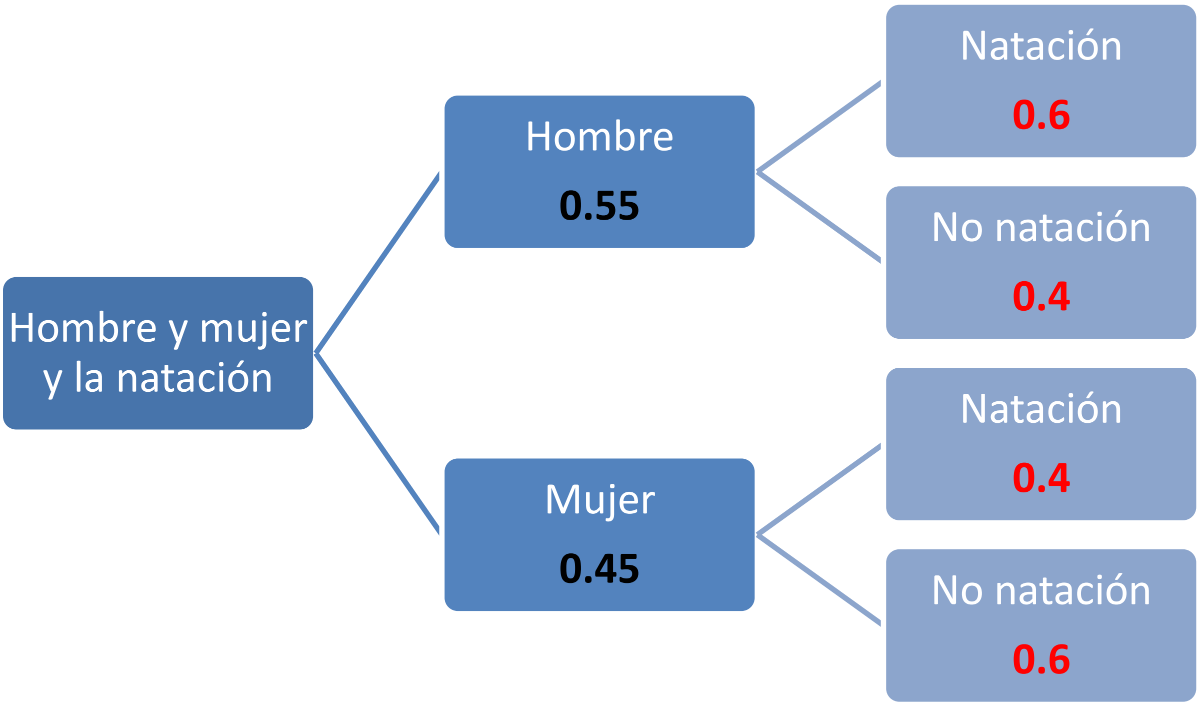
E9- (Probabilidad y estadística)
En un club deportivo, el 55% de los socios son hombres y el 45 % mujeres. Entre los socios, el 60% de los hombres practica la natación, así como el 40% de las mujeres.
a) Describir los sucesos y sus probabilidades, y calcular la probabilidad de que un socio elegido al azar practique la natación. **(1,25 puntos)**
b) Sabiendo que una persona practica la natación, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer? **(0,75 puntos)**

a) Llamamos H al suceso "Elegir un hombre", por lo que el suceso contrario $\overline{H}$ es el suceso "Elegir una mujer".
Llamamos N = "Elegir una persona que practica natación".

Aplicando la regla de Laplace tenemos que $P(H)=\frac{55}{100}=0.55$ y $P(\overline{H})=\frac{45}{100}=0.45$.

También sabemos que $P(N/H)=\frac{60}{100}=0.6$ y que $P(N/\overline{H})=\frac{40}{100}=0.4$

Realizamos un diagrama de árbol.



Observando el diagrama de árbol y aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que:

$$P(N)=P(H\cap N)+P(\overline{H}\cap N)=$$
$$=P(H)P(N/H)+P(\overline{H})P(N/\overline{H})=0.55\cdot 0.6+0.45\cdot 0.4=\boxed{0.51}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{H}/N)=\frac{P(\overline{H}\cap N)}{P(N)}=\frac{P(\overline{H})P(N/\overline{H})}{P(N)}=\frac{0.45\cdot 0.4}{0.51}=\boxed{\frac{6}{17}\simeq 0.35}$$

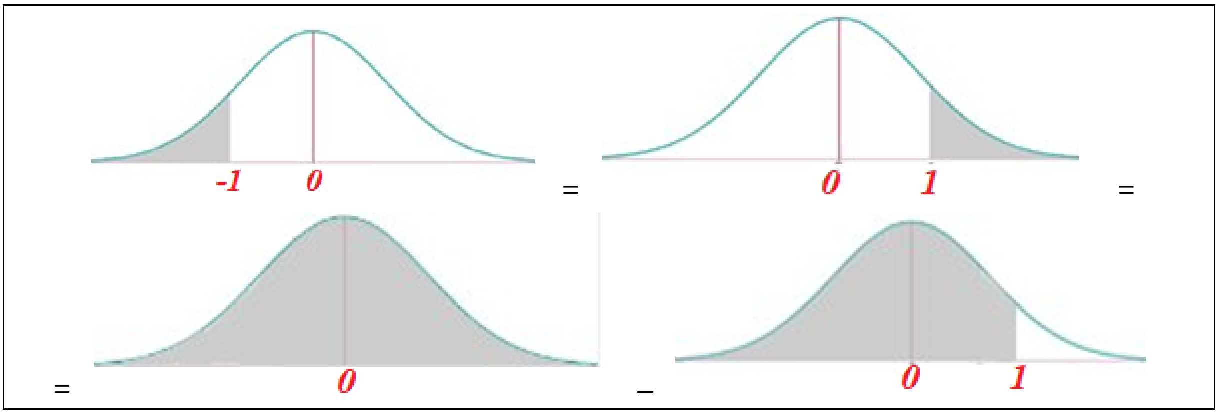
E10.- (Probabilidad y estadística)
El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test para detectar cierta enfermedad sigue una distribución normal de media 20 y de desviación típica 4.
a) ¿En qué porcentaje de test se obtiene el resultado entre 16 y 26 minutos? **(1 punto)**
b) ¿Cuántos minutos son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test? **(1 punto)**

X = El tiempo empleado, en minutos, para obtener la respuesta de un test.
X = N(20, 4).

a)

$$P(16 < X < 26) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{16-20}{4} < Z < \frac{26-20}{4}\right) =$$

$$= P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1) = P(Z < 1.5) - \left(P(Z > 1)\right) = \ldots$$



$$= P(Z < 1.5) - \left(1 - P(Z < 1)\right) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 0.9332 - (1 - 0.8413) =$$

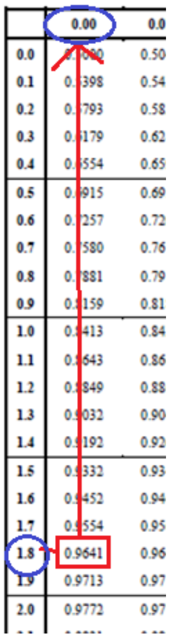
$$= 0.7745 = \boxed{77.45\,\%}$$

b) Llamemos “a” a los minutos que son necesarios para garantizar que se ha obtenido la respuesta del 96.41% de los test.

$$P(X \le a) = 0.9641 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-20}{4}\right) = 0.9641 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Buscamos\ esta\ probabilidad\ 0.9641\ en\ la\ tabla\ N(0,1)\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-20}{4} = 1.8 \Rightarrow a = 4 \cdot 1.8 + 20 = \boxed{27.2 \text{ minutos}}$$



	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84
1.1	0.8643	0.86
1.2	0.8849	0.88
1.3	0.9032	0.90
1.4	0.9192	0.92
1.5	0.9332	0.93
1.6	0.9452	0.94
1.7	0.9554	0.95
1.8	0.9641	0.96
1.9	0.9713	0.97
2.0	0.9772	0.97