Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de A^T, es decir, la matriz traspuesta de A.
b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X \cdot A+3\cdot A=B$.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+y+z=a+1 \\ a\cdot x \quad +z=a-1 \\ x \quad -y+z=3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente es sistema anterior para $a=0$, si es posible.

3. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$

4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta $r\equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta *r*.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s\equiv\begin{cases} x=0+2\lambda \\ y=1-2\cdot a\cdot\lambda \\ z=0+2\lambda \end{cases}$ y $t\equiv \frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a\in\mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.

5. Sean los puntos A(0, 0, 1), B(2, 1, 0), C(1, 1, 1) y D(1, 1, 2).

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

6. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=ax^3-2x^2-x+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función pase por el punto (1, 2) y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ be^x & x\geq 0 \end{cases}$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.

7. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & si \quad 1\leq x\leq 3 \\ 2e^x & si \quad x>3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

8. a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el determinante de A^T, es decir, la matriz traspuesta de A.
b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $X\cdot A+3\cdot A=B$.

a)

$$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left|A^T\right|=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=2+1-2=1$$

b) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$|A|=\left|A^T\right|=1\neq 0$. Existe la inversa de *A*.

Despejamos la matriz X de la ecuación.

$$X\cdot A+3\cdot A=B\Rightarrow\left(X+3I\right)\cdot A=B\Rightarrow X+3I=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}-3I$$

Calculamos la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$X=B\cdot A^{-1}-3I\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&0&-2\\-1&1&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1-1&1&-2+2\\1-1&-1+1&-1+2\\1&0&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-3&1&0\\0&-3&1\\1&0&-5\end{pmatrix}}$$

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = a+1 \\ a \cdot x \quad + z = a-1 \\ x \quad - y + z = 3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente es sistema anterior para $a = 0$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a+1 \\ a & 0 & 1 & a-1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a - a + 1 = 2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2 - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{2} = 1$$

Distinguimos dos casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3. También será 3 el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única)

CASO 2. $a = 1$

En este caso la matriz A/B queda: $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizamos el método de Gauss para triangular la matriz y estudiar su rango con más facilidad.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} \; - \; 2 \cdot \text{Fila 2ª} \\ 0 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad\;\; 2 \quad\; 0 \quad 4 \\ \hline 0 \quad\;\; 0 \quad\; 0 \quad 5 \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la ampliada es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

b) Para $a = 0$ el sistema tiene solución única, pues estamos en el caso 1 ya estudiado.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad\quad z = -1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

Lo resolvemos.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad \boxed{z = -1} \\ x - y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 1 \\ x - y - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - y \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - y - y = 4 \Rightarrow -2y = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1} \Rightarrow x = 2 - (-1) = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

La solución es $x = 3$, $y = -1$, $z = -1$.

3. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{2}{3+e^x}dx$.

(Cambio de variable sugerido: $e^x = t$)

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx$

a)

$$\int \frac{2}{3+e^x}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt\\ dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}\end{array}\right\} = \int \frac{2}{3+t}\frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{t(3+t)}dt = \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Descomposición en fracciones simples.}\\ \frac{1}{t(3+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{3+t} \Rightarrow \frac{1}{t(3+t)} = \frac{A(3+t)+Bt}{t(3+t)} \Rightarrow 1 = A(3+t)+Bt\\ t=0 \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}\\ t=-3 \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{t(1+t)} = \frac{1/3}{t} - \frac{1/3}{1+t}\end{array}}$$

$$\ldots = 2\left[\int \frac{1/3}{t}dt - \int \frac{1/3}{3+t}dt\right] = \frac{2}{3}\left[\ln t - \ln(3+t)\right] =$$

$$= \left\{\text{Deshacemos el cambio } t = e^x\right\} = \frac{2}{3}\ln e^x - \frac{2}{3}\ln\left(3+e^x\right) = \boxed{\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\ln\left(3+e^x\right) + K}$$

b)

$$\int \frac{-x+1}{x^2+3}dx = \int \frac{-x}{x^2+3}dx + \int \frac{1}{x^2+3}dx = \boxed{1} + \boxed{2} = \ldots$$

$$\boxed{1} = \int \frac{-x}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}dx = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)$$

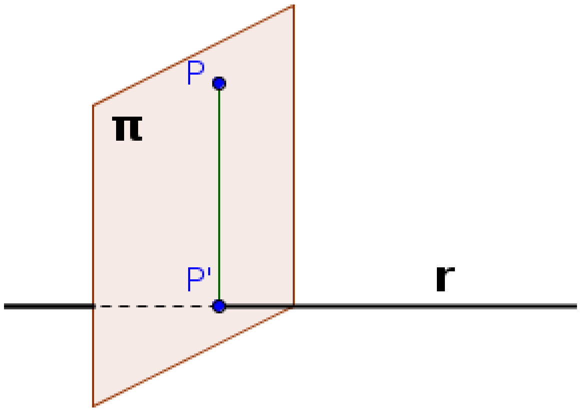
$$\boxed{2} = \int \frac{1}{x^2+3}dx = \left\{\begin{array}{c}\text{Divido entre 3}\\ \text{numerador y denominador}\end{array}\right\} = \int \frac{\frac{1}{3}}{\frac{x^2}{3}+\frac{3}{3}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{3}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\ldots = \boxed{-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + K}$$

4. a) **[1,25 puntos]** Sea el punto P(1, 0, 1) y la recta $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Calcula razonadamente la distancia del punto P a la recta *r*.

b) **[1,25 puntos]** Sean las rectas $s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases}$ y $t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Calcula razonadamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las dos rectas sean paralelas.



a) Para hallar la distancia de un punto P a la recta *r*, podemos hacerlo hallando el plano **π** perpendicular a la recta que pasa por el punto P, luego determinamos el punto de corte de recta y plano (P´). La distancia del punto P a la recta *r* será igual a la distancia del punto P al P´ (módulo del vector que une dichos puntos).

Determinamos la ecuación del plano **π**

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,1,-1) \\ \pi \perp r \\ P(1,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{n} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,-1) \\ P(1,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y - z + D = 0 \\ P(1,0,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 0 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

Hallamos el punto P´ de corte de recta *r* y plano π.

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y - z = 0 \\ r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,1,-1) \\ P_r(-1,0,1) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -1 + t + t - 1 + t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3t = 2 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow P´\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{PP´}$.

$$\overrightarrow{PP'} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1,0,1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Y por último hallamos la distancia de P a la recta *r* como el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$

$$d(P,r) = d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{\sqrt{24}}{3} \simeq 1.63\, u$$

b) Para que dos rectas sean paralelas deben de tener vectores directores de coordenadas proporcionales y que un punto de una de ellas no pertenezca a la otra (no son coincidentes).

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 1 - 2 \cdot a \cdot \lambda \\ z = 0 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2, -2a, 2) \\ P_s(0,1,0) \end{cases} \qquad t \equiv \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_t} = (a, -1, 1) \\ P_t(1,-1,2) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = (2, -2a, 2) \\ \overrightarrow{v_t} = (a, -1, 1) \\ s \,||\, t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1 \\ \frac{-2a}{-1} = \frac{2}{1} \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Son paralelas o coincidentes para *a = 1*.
Comprobamos que para *a = 1* no sean coincidentes, es decir, la misma recta. Para ello compruebo que el punto P_s no pertenece a la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{r} t \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} \\ ¿P_s(0,1,0) \in t\,? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{0-1}{1} = \frac{1+1}{-1} = \frac{0-2}{1}? \Rightarrow ¿-1 = -2 = -2?$$

No son ciertas las dos igualdades, solo la segunda. La recta *t* no pasa por el punto *Ps* y las rectas son paralelas.

5. Sean los puntos A(0, 0, 1), B(2, 1, 0), C(1, 1, 1) y D(1, 1, 2).

- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C, y la de la recta perpendicular a este plano y que pasa por el punto D.

El volumen de un tetraedro es el valor absoluto de la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen uno de sus vértices con los otros 3 vértices.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(2,\ 1,\ 0)-(0,\ 0,\ 1)=(2,1,-1)\\ \overrightarrow{AC}=(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 0,\ 1)=(1,1,0)\\ \overrightarrow{AD}=(1,\ 1,\ 2)-(0,\ 0,\ 1)=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=2-1+1-1=1$$

$$\boxed{Volumen\quad ABCD=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|}{6}=\frac{1}{6}u^3}$$

El plano que pasa por A, B y C tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y contiene al punto A.

$$\left.\begin{array}{r}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(2,\ 1,\ 0)-(0,\ 0,\ 1)=(2,1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,\ 1,\ 1)-(0,\ 0,\ 1)=(1,1,0)\\ A(0,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi\equiv\begin{vmatrix}x-0&y-0&z-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=0$$

$$\pi\equiv-y+2(z-1)-(z-1)+x=0\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x-y+z-1=0}$$

La recta *r* perpendicular a este plano tiene como vector director el normal del plano.

$$\pi\equiv x-y+z-1=0\Rightarrow\vec{n}=(1,-1,1)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,-1,1)\\ D(1,1,2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{1}}$$

6. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x)=ax^3-2x^2-x+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función pase por el punto (1, 2) y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ be^x & x\geq 0 \end{cases}$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina razonadamente los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en *x = 0*.

a) Si la función pasa por el punto (1, 2) entonces *f(1) = 2*.

$$f(1)=2\Rightarrow a-2-1+b=2\Rightarrow \boxed{a+b=5}$$

Además, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en este punto sea 1 significa que la derivada de la función para *x = 1* sea 1. *f ´(1) = 1.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^3-2x^2-x+b\Rightarrow f\,'(x)=3ax^2-4x-1 \\ f\,'(1)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a-4-1=1\Rightarrow 3a=6\Rightarrow \boxed{a=2}$$

Sustituimos este valor de "a" en la ecuación obtenida antes y tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} a+b=5 \\ a=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores buscados son *a = 2* y *b = 3.*

b) Para que sea continua en x = 0 deben de coincidir el valor de la función y los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=be^0=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-ax+1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} be^x=b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{b=1}$$

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ e^x & x\geq 0 \end{cases}$

Calculamos la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-ax+1 & x<0 \\ e^x & x\geq 0 \end{cases}\Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} 2x-a & x<0 \\ e^x & x>0 \end{cases}$$

Al ser derivable en *x = 0* las derivadas laterales deben coincidir.

$$\left.\begin{array}{r} f\,'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x-a=-a \\ f\,'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^x=e^0=1 \\ f\,'(0^-)=f\,'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow -a=1\Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son *a = –1* y *b = 1.*

7. a) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{x-2}-1}{2x-4}$.

b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & si \quad 1 \le x \le 3 \\ 2e^x & si \quad x>3 \end{cases}$$

determina razonadamente su dominio y estudia su continuidad. En los puntos en los que no lo sea indica razonadamente el tipo de discontinuidad.

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}-1}{2x-4} = \frac{e^0-1}{4-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x \to 2} \frac{e^{x-2}}{2} = \frac{e^0}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) La función $f(x)=\begin{cases} x^2-2 & si \quad x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} & si \quad 1 \le x \le 3 \\ 2e^x & si \quad x>3 \end{cases}$ puede presentar problemas de definición cuando el denominador se anule, en el resto de expresiones no hay problemas. El denominador se anula para $x = 2$. Luego su dominio es $\mathbb{R}-\{2\}$

En cada tramo de definición es continua. En el primer tramo es un trozo de parábola, después un cociente donde hemos quitado el valor que anula el denominador y el último es una exponencial.

Falta ver si es continua en los cambios de definición.

¿$x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\dfrac{2-1}{1-2}=-1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2-2 = 1-2=-1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-2} = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{¡Continua en } x=1!$$

¿$x = 3$?

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{6-1}{3-2}=5 \\ \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x-1}{x-2} = \dfrac{6-1}{3-2}=5 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 2e^x = 2e^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \text{¡No es continua en } x=3!$$

En $x = 3$ hay una discontinuidad inevitable de salto finito.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2e^3\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$$

En *x = 2* hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, pues tiene una asíntota en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{3}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x-1}{x-2}=\dfrac{3}{0^+}=+\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \text{ es una asíntota vertical}$$

La función es continua en $\mathbb{R}-\{2,3\}$

8. a) Se sabe que el 20% de los usuarios de una red social nunca comparte fotografías, mientras que el otro 80% sí que lo hace. Además, de los usuarios que no comparten fotografías, el 50% ha comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos. De los usuarios que comparten fotografías, se sabe que el 90% ha comentado alguna vez una fotografía de sus contactos. Elegimos un usuario de esta red social al azar.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que haya comentado alguna vez una fotografía de alguno de sus contactos?

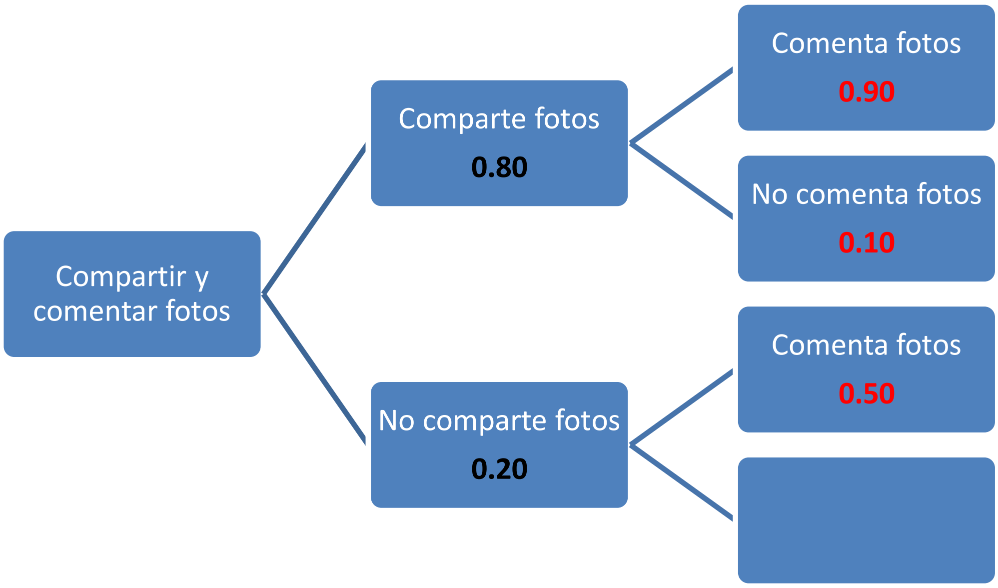
a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que nunca ha comentado una fotografía de alguno de sus contactos, ¿cuál es la probabilidad de que comparta fotos?

b) Un algoritmo de reconocimiento facial es capaz de identificar de manera correcta al 80% de las personas a partir de sus fotografías. Se procesan las fotografías de 4 personas con este algoritmo.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que identifique correctamente a las 4 personas de las fotografías?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que identifique correctamente al menos a una persona?

a) Construimos un diagrama de árbol.



a.1) Utilizamos el teorema de la probabilidad total

$$P(\text{Comenta foto}) = P(\text{Comparte foto})P(\text{Comenta foto / Comparte foto}) +$$
$$+P(\text{No comparte foto})P(\text{Comenta foto / No comparte foto}) =$$
$$= 0.8 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.82}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori.

$$P(\text{Comparte foto / No comenta foto}) = \frac{P(\text{Comparte foto } \cap \text{ No comenta foto})}{P(\text{No comenta foto})} =$$
$$= \frac{P(\text{Comparte foto})P(\text{No comenta foto / Comparte foto})}{P(\text{No comenta foto})} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{1 - 0.82} = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.444}$$

b)

X = Número de personas que identifica correctamente.
X es una binomial con n = 4 y p = 0.8.
X = B(4, 0.8)

b.1) Nos piden calcular $P(X=4)=\{\text{Miro en la tabla}\}=0.4096$

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561

b.2) Nos piden $P(X\geq 1)$

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\{\text{Miro en la tabla}\}=$$
$$=0.0256+0.1536+0.4096+0.4096=\boxed{0.9984}$$

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
4	0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016	0.0001
	1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0256	0.0036
	2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.1536	0.0486
	3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4096	0.2916
	4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.4096	0.6561