



## **Sèrie 2**

### **Criteris generals per a la correcció:**

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**
  - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores **NO** es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
  - En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
  - En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
  - Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.



Proves d'accés a la Universitat 2021, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

1.

[1,25 punts]

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta tangent en el punt de la paràbola  $(a, f(a)) = (a, 4 - a^2)$  és:

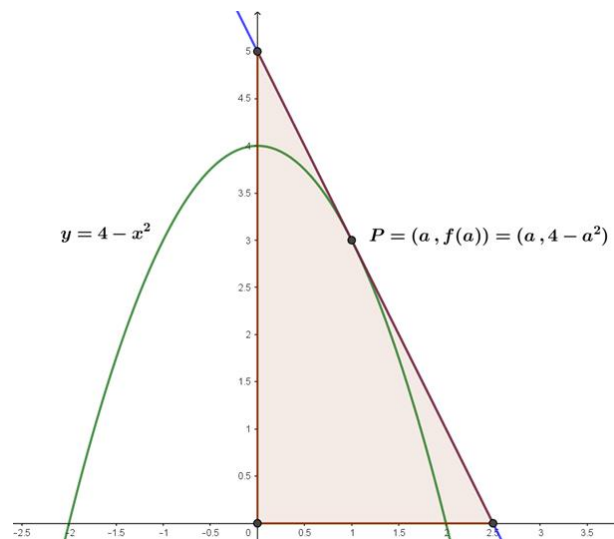
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculem la derivada i l'avaluem en  $x = a$ :

$$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(a) = -2a.$$

La recta tangent a la paràbola és:

$$y - (4 - a^2) = -2a \cdot (x - a) \rightarrow y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$



Calculem el punt de tall amb l'eix  $OX$  ( $y = 0$ ):

$$0 = -2ax + a^2 + 4; \quad x = \frac{a^2 + 4}{2a}$$

Tenim el punt  $\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)$ .

El punt de tall amb l'eix  $OY$  ( $x = 0$ ) és:

$$y = a^2 + 4$$

I tenim el punt  $(0, a^2 + 4)$ .



b)

[1,25 punts]

El triangle té vèrtexs en els punts  $(0,0)$ ,  $(\frac{a^2+4}{2a}, 0)$  i  $(0, a^2 + 4)$ , per tant, és un triangle rectangle de base  $\frac{a^2+4}{2a}$  i altura  $a^2 + 4$ . La seva àrea és:

$$S(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2+4}{2a} \right) (a^2+4) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivem i igulem a zero:

$$S'(a) = \frac{(a^2+4) \cdot (3a^2-4)}{4a^2}, \quad S'(a) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ a = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Rebutgem la solució  $a = -\frac{2}{\sqrt{3}}$  ja que  $a$  ha de ser positiu, per tant, el valor buscat és  $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , que serà un mínim ja que:

$$S'(a) = \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és decreixent per a } a < \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \geq 0 & \text{si } a \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow S \text{ és creixent per a } a > \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



## **Pautes de correcció:**

a) 0,25 punts pel plantejament, on s'indiqui que la recta tangent té pendent  $f'(a)$ .

0,5 punts per l'expressió de la recta tangent.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'abscisses.

0,25 punts pel punt de tall amb l'eix d'ordenades.

Tot i que cal donar les dues coordenades dels punts de tall, en cas de no donar la coordenada 0, no es penalitza.

b) 0,25 punts per la funció àrea.

0,5 punts per la derivada primera.

0,25 punts pel valor de  $a$  on s'assoleix el mínim.

0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.

Es considera correcta si es dona la solució sense racionalitzar.



Proves d'accés a la Universitat 2021, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

2

a)

[1,5 punts]

Escrivim el sistema en forma matricial:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

El determinant de la matriu de coeficients,  $A$ , és:

$$\det A = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -p^3 + 3p^2 - 2p = -p(p-1)(p-2)$$

Els valors de  $p$  que fan que el determinant sigui zero són:  $p = 0, p = 1$  i  $p = 2$ .

Aleshores:

- Si  $p \neq 0, 1, 2 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$  Sistema compatible determinat
- Si  $p = 0$ , el sistema en forma matricial és:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = 2; \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$  Sistema incompatible

- Si  $p = 1$ , el sistema en forma matricial és:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = 2; \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$  Sistema incompatible

- Si  $p = 2$ , el sistema en forma matricial és:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{núm. incògnites} = 3 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminat



b)

[1 punt]

Per a  $p = 2$  el sistema és compatible indeterminat, dues de les equacions són coincidents. Cal resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 - z \\ 2x + 2y = 1 - 4z \end{cases}$$

Prenem  $z = t$  com a paràmetre i tenim  $x = \frac{3}{2} + t$ ,  $y = -3t - 1$ ,  $z = t$  per a tot  $t \in \mathbb{R}$ .

**Pautes de correcció:**

- a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.  
0,25 punts per arribar als valors crítics per a la discussió.  
1 punt per la discussió dels quatre casos (0,25 punts per cada cas).
- b) Si han fet bé el cas  $p = 2$  en l'apartat a), 0,5 punts pel càlcul de cada variable en funció d'un paràmetre lliure.  
Si no fan servir l'apartat a), 0,25 punts per observar que és un sistema compatible indeterminat i 0,75 punts per la solució.



Proves d'accés a la Universitat 2021, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

---

3.

a)

[1,25 punts]

L'equació de la recta perpendicular al pla  $x = y$  que passa pel punt  $(-1, 3, 1)$  té com a vector director  $(1, -1, 0)$ , per tant l'equació és:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + t(1, -1, 0) = (-1 + t, 3 - t, 1)$$

Fem la intersecció d'aquesta recta amb el pla i trobarem  $M$ , el punt mig del segment  $PP'$ :

$$x = y \rightarrow -1 + t = 3 - t \rightarrow t = 2; \quad M = (1, 1, 1)$$

Finalment,  $M = \frac{P+P'}{2} \rightarrow P' = 2M - P = (2 + 1, 2 - 3, 2 - 1) = (3, -1, 1)$

b)

[1,25 punts]

El vector normal al pla que ens demanen és perpendicular a la recta  $r$  i també ha de ser perpendicular al pla  $\pi$ . El calculem fent el producte vectorial:

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 - 3\vec{e}_3 + \vec{e}_1 \rightarrow (1, 1, -5)$$

L'equació del pla és  $x + y - 5z + D = 0$  i si imposem que ha de passar pel punt  $(1, 0, 2)$  determinem el terme independent  $D$ :

$$1 - 10 + D = 0 \rightarrow D = 9$$

Finalment, l'equació del pla demanat és  $x + y - 5z + 9 = 0$



**Pautes de correcció:**

a) 0,5 punts pel plantejament, on s'expliqui com es calcula el punt simètric.

0,25 punts per la recta perpendicular.

0,25 punts pel punt mig.

0,25 punts per la solució.

b) 0,5 punts pel plantejament.

0,25 punts pel vector normal al pla.

0,5 punts per l'equació cartesiana del pla.

En cas de resoldre qualssevol dels apartats per estratègies diferents a les donades en aquestes pautes també es considerarà correcte.





4.

a)

[1 punt]

La recta tangent és horitzontal en els punts on la derivada s'anul·la, aleshores:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} \rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow 1 - \ln x = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

Així, l'únic punt amb recta tangent horitzontal és  $(x, y) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$

Per determinar si és un extrem relatiu podem fer servir el criteri de la segona derivada:

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2 \ln x}{x^3}$$

$$f''(e) = \frac{-3 + 2 \ln e}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0 \rightarrow \text{indica que correspon a un màxim relatiu.}$$

b)

[0,5 punts]

En relació amb les asímptotes, com que la funció només està definida per  $x > 0$ , cal mirar l'asímptota només per a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ ind.}$$

Aplicant la regla de l'Hôpital, resoldrem aquesta indeterminació:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per tant, l'eix d'abscisses,  $y = 0$ , és una asímptota horitzontal d'aquesta funció.



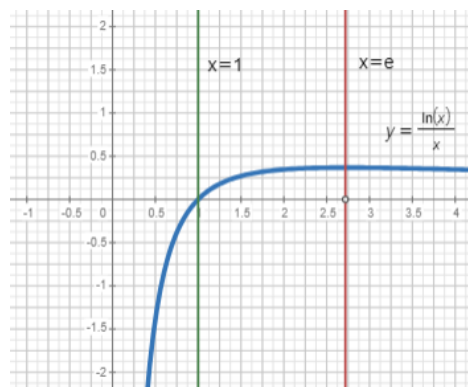
c)

[1 punt]

L'àrea demanada correspon a la integral definida:

$$A = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

La representació gràfica és:



**Pautes de correcció:**

- 0,25 punts pel plantejament, on es digui que el pendent de la recta horitzontal ha de ser zero.  
0,25 punts per la derivada.  
0,25 punts pel punt on la recta tangent és horitzontal.  
0,25 punts per justificar que és un màxim relatiu.
- 0,25 punts pel plantejament, on s'expliqui que només cal estudiar el límit quan  $x \rightarrow +\infty$ .  
0,25 punts per l'asíptota horitzontal.
- 0,25 punts per la integral definida que correspon a l'àrea demanada.  
0,25 punts per la primitiva.  
0,25 punts per la regla de Barrow i resultat de l'àrea.  
0,25 punts per la gràfica.

En cas que responguin que l'àrea és infinita –perquè no s'esmenta l'eix d'abscisses en l'enunciat–, es puntuarà 0,5 punts per la gràfica i 0,5 per dir raonadament que és infinita.



5.

a)

[1,25 punts]

Calculem  $A^2$  :

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El determinant de la matriu  $A^2$  és  $|A^2| = 1 \neq 0$ , per tant, és una matriu invertible.

Multipliquem l'equació matricial per  $(A^2)^{-1}$  per l'esquerra, així ens queda:

$$A^2 \cdot X = A - 3 \cdot I \rightarrow X = (A^2)^{-1}(A - 3 \cdot I)$$

Calculem la matriu inversa de  $A^2$ :

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Finalment:

$$X = A(A - 3 \cdot I)$$

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



b)

[1,25 punts]

Sumem  $I$  a les dues bandes de la igualtat que ens donen:

$$M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0 \rightarrow M^3 - 3M^2 + 3M = I$$

Traiem  $M$  factor comú per l'esquerra:

$$M \cdot (M^2 - 3M + 3I) = I \quad (*)$$

Fem el determinant a banda i banda de la igualtat i tenim:

$$\det(M \cdot (M^2 - 3M + 3I)) = \det I = 1 \rightarrow \det M \cdot \det(M^2 - 3M + 3I) = 1$$

D'on podem afirmar que  $\det M \neq 0$ , ja que si s'anul·lés la igualtat anterior no se satisfaria. Així doncs,  $M$  és invertible i podem expressar la inversa de la forma següent:

$$M^{-1} = M^2 - 3M + 3I$$

De l'expressió (\*) es pot deduir directament que la matriu  $M$  és invertible i que l'expressió de la inversa, sense haver de justificar que el determinant és diferent de 0.

**Pautes de correcció:**

a) 0,25 punts per calcular  $A^2$ .

0,25 punts per aïllar  $X$ .

0,5 punts per la inversa de  $A^2$ .

0,25 punts pel resultat final de  $X$ .

b) 0,5 punts per operar correctament amb la igualtat donada.

0,5 punts per justificar que  $M$  és invertible.

0,25 punts per trobar l'expressió la matriu inversa demanada.



6.

a)

[1,25 punts]

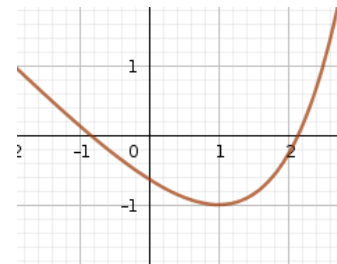
La funció és contínua per ser la suma de dues funcions contínues, l'exponencial i una polinòmica de primer grau.

Per analitzar-ne la monotonia estudiarem el signe de la derivada:

$f'(x) = e^{x-1} - 1 = 0$  per tant  $e^{x-1} = 1$  d'on  $x - 1 = 0$  i, així,  $x = 1$  és un punt crític.

Fem la taula de comportament

$x$	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	decreix	-1	creix



La funció té un mínim relatiu (i absolut) en el punt  $(1, -1)$ , és monòtona decreixent en l'interval  $(-\infty, 1)$  i monòtona creixent en l'interval  $(1, +\infty)$ .

b)

[1,25 punts]

Per demostrar si la funció té o no arrels aplicarem el teorema de Bolzano. En aquest cas la funció és contínua en tots els reals, per tant, ho és en qualsevol interval tancat, concretament en l'interval  $[-1, 3]$ .

Els tots dos extrems de l'interval la funció és positiva:

$$f(-1) = e^{-2} > 0 \text{ i } f(3) = e^2 - 4 > 0$$

Per altra banda, sabem que  $f(-1) > 0$  i que en  $x = 1$  la funció té un mínim absolut. Així, pel teorema de Bolzano, podem afirmar que:

- existeix una arrel en l'interval obert  $(-1, 1)$ . Aquesta arrel és única ja que la funció és monòtona decreixent en aquest interval.
- existeix una altra arrel en l'interval  $(1, 3)$  que també és única per ser monòtona creixent en aquest interval.

Així no pot existir cap altra arrel d'aquesta funció en l'interval donat.



**Pautes de correcció:**

- a) 0,25 punts per justificar la continuïtat.
- 0,25 punts pel càlcul de la derivada.
- 0,25 punts per trobar l'abscissa del punt crític.
- 0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.
- 0,25 punts per justificar el mínim relatiu.
- b) 0,25 punts per mencionar les hipòtesis del teorema de Bolzano.
- 0,5 punts per justificar l'existència de dues arrels.
- 0,5 punts per la unicitat en cada interval a partir de la monotonia.