UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021
Convocatoria: Ordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=xe^{1/x^3}$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.- (2 puntos) Sea *f* una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función *f* y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en el punto $x=0$.

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje *OX* y las rectas $x=0$ y $x=5$.

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real *a*. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para *a = 0*.

5.- (2 puntos) Hallar *A* y *B*, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A-5B=C, \\ -A+3B=D \end{cases}$$

donde *C* y *D* son las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de $C^T D$, donde C^T es la matriz traspuesta de *C*.

6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A|=1$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $\left|4B^{-1}A^T\right|^2$.

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:
a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,
b) está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$,
c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=z+3, \\ y=-z+4 \end{cases}$

8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=z$$

9.- (2 puntos) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.
a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?.
b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

10.- (2 puntos) Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.
a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=xe^{1/x^3}$$

Determinar el dominio y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

El único problema que se plantea con la definición de la función $f(x)=xe^{1/x^3}$ es el cociente del exponente. Vemos cuando se anula.

$$\frac{1}{x^3}\to x^3=0\Rightarrow x=0$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=0$

El único valor excluido del dominio es *x = 0*. Comprobamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x^3}=\lim_{x\to 0^+} 0\cdot e^{+\infty}=0\cdot\infty=Indeterminación=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{1/x^3}}{\frac{1}{x}}=\frac{e^{+\infty}}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=Indeterminación(L\'{}Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{3}{x^4}e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2e^{1/x^3}}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3e^{1/x^3}}{x^2}=$$

$$=\frac{3e^{+\infty}}{0^+}=3e^{+\infty}\frac{1}{0^+}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} xe^{1/x^3}=0\cdot e^{1/0^-}=0\cdot e^{-\infty}=0\cdot 0=\boxed{0}$$

La asíntota $x=0$ solo lo es por la derecha.

Asíntota horizontal. $y=b$

Calculamos los límites de la función en el infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{1/x^3}=(+\infty)e^{1/(+\infty)}=(+\infty)e^0=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{1/x^3}=(-\infty)e^{-1/\infty}=(-\infty)e^{-0}=-\infty$$

No hay asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{1/x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x^3}=e^0=1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} xe^{1/x^3} - x = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x^3} - 1\right) = \infty\left(e^0 - 1\right) = \infty \cdot 0 = Indeterminación =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x^3} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{3}{x^4}e^{1/x^3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2e^{1/x^3}}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{1/x^3}}{x^2} = \frac{3e^0}{\infty} = \frac{3}{\infty} = 0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$

2.- (2 puntos) Sea *f* una función continua cuya derivada viene dada de la siguiente manera:

$$f'(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ e^x, & x\geq 0 \end{cases}$$

Hallar la expresión de la función *f* y las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en el punto $x=0$.

Hallamos la expresión de la función en las dos ramas de definición.

$$Si \quad f'(x)=x+1 \Rightarrow f(x)=\int x+1dx=\frac{x^2}{2}+x+K \qquad \text{Para } x<0$$

$$Si \quad f'(x)=e^x \Rightarrow f(x)=\int e^x dx=e^x+K' \qquad \text{Para } x>0$$

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+x+K, & x<0, \\ e^x+K', & x\geq 0 \end{cases}$$

Como la función *f(x)* es continua debe serlo en *x = 0* y coincidir el valor de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2}{2}+x+K=K \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^x+K'=1+K' \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow K=1+K' \Rightarrow K'=K-1$$

La función queda:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{2}+x+K, & x<0, \\ e^x-1+K, & x\geq 0 \end{cases}, \text{ siendo K una constante real cualquiera.}$$

En *x = 0* comprobamos que la derivada por la derecha y la izquierda coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} x+1=1 \\ f'(0)=e^0=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Son iguales}$$

La recta tangente la podemos calcular con la función a la derecha o a la izquierda de *x = 0,* pues la función es continua y la derivada existe en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=K \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-K=1(x-0) \Rightarrow \boxed{y=x+K}$$

3.- (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=5$.

Comprobamos si la función corta el eje OX.

$$f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}=0 \Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

El punto de corte está situado fuera del intervalo del recinto (0, 5).

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 5 de la función $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^2}$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int \frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx = ...$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{x+3}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{x+3}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)}{(x+2)^2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{Ax+2A+B}{(x+2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x+3=Ax+2A+B \Rightarrow \begin{cases} 1=A \\ 3=2A+B \Rightarrow 3=2+B \Rightarrow B=1 \end{cases} \\ \frac{x+3}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2} \end{array}}$$

$$...=\int \frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}\,dx=\int \frac{1}{x+2}\,dx+\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx=\ln|x+2|+\int (x+2)^{-2}\,dx=$$

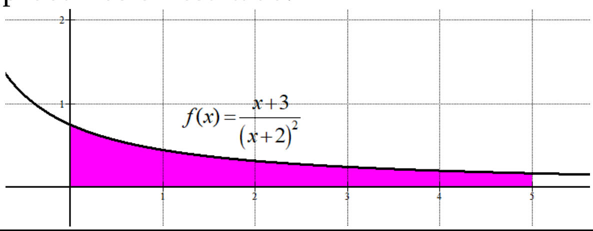
$$=\ln|x+2|+\frac{(x+2)^{-1}}{-1}=\boxed{\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}+K}$$

Lo aplicamos a la integral definida.

$$\acute{A}rea=\left|\int_0^5 f(x)dx\right|=\left|\int_0^5 \frac{x+3}{(x+2)^2}\,dx\right|=\left|\left[\ln|x+2|-\frac{1}{x+2}\right]_0^5\right|=$$

$$=\left|\left[\ln|5+2|-\frac{1}{5+2}\right]-\left[\ln|0+2|-\frac{1}{0+2}\right]\right|=\left|\ln 7-\frac{1}{7}-\ln 2+\frac{1}{2}\right|=\boxed{\ln\frac{7}{2}+\frac{5}{14}\simeq 1.35\,u^2}$$

No pide representar el recinto ni la función, pero comprobamos el resultado.



4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ 2x+ay=-1 \\ ax+y+z=1 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real *a*. Determinar la inversa de la matriz asociada al sistema para *a = 0*.

El sistema tiene asociada la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 0 & -1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A**.**

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=a+0+2a-a^3-2-0=-a^3+3a-2$$

$|A|=0 \Rightarrow -a^3+3a-2=0;$ Utilizamos Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & \lfloor 0 \end{array} \rightarrow a=1 \text{ es raíz}$$

$$-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)2}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \dfrac{1-3}{-2}=1 \\ \dfrac{1+3}{-2}=-2 \end{cases}$$

Para *a = –2* y para *a = 1* se anula el determinante de A.

Estudiamos los 3 casos distintos que se pueden plantear en función del valor de a.

CASO 1. $a\neq 1 \quad y \quad a\neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto el rango de A es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución (COMPATIBLE DETERMINADO).

Obtenemos la solución con la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a-a-a^2+1}{-a^3+3a-2}=\frac{1-a^2}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{(1-a)(1+a)}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{a+1}{(a-1)(a+2)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & -1 & 0\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & a & 0\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-1+2a+a^2-2}{-a^3+3a-2}=\frac{a^2+2a-3}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a+3)(a-1)}{-(a-1)^2(a+2)}=\frac{a+3}{-(a-1)(a+2)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & a & -1\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & a\\ 2 & a & 0\\ a & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a-a+2-a^2-2+1}{-a^3+3a-2}=\frac{-a^2+1}{-(x-1)^2(x+2)}=\frac{a+1}{(a-1)(a+2)}$$

CASO 2. $a=1$

El sistema queda:

$\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y\quad=-1\\ x+y+z=1\end{cases}$ que tiene dos ecuaciones iguales, la primera y la tercera, por lo que es equivalente a otro sistema con 2 ecuaciones y 3 incógnitas que resolvemos.

$$\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y\quad=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\ \boxed{y=-2x-1}\end{cases}\Rightarrow x-2x-1+z=1\Rightarrow -x+z=2\Rightarrow\boxed{z=2+x}$$

El sistema tiene infinitas soluciones (COMPATIBLE INDETERMINADO):

$x=t$; $y=-1-2t$; $z=2+t$

CASO 3. $a=-2$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l}x+y-2z=1\\ 2x-2y=-1\\ -2x+y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll}\text{Ecuación 2ª } - \text{ 2}\cdot\text{Ecuación 1ª} & & & \\ 2x & -2y & & =-1\\ -2x & -2y & +4z & =-2\\ \hline & -4y & +4z & =-3\rightarrow\text{Nueva ecuación 2ª}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll}\text{Ecuación 3ª + 2}\cdot\text{Ecuación 1ª} & & & \\ -2x & +y & +z & =1\\ 2x & +2y & -4z & =2\\ \hline & 3y & -3z & =3\rightarrow\text{Nueva ecuación 3ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y-2z=1\\ -4y+4z=-3\\ 3y-3z=3\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y-2z=1\\ -4y+4z=-3\\ y-z=1\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4\cdot \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \;4y \quad -4z \quad = 4 \\ \underline{-4y \quad +4z \quad = -3} \\ \qquad\quad 0 \qquad = 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-2z=1 \\ -4y+4z=-3 \\ {\color{red}0=1} \end{array}\right\} \;{\color{red}\text{¡IMPOSIBLE!}}$$

El sistema no tiene solución (SISTEMA INCOMPATIBLE).

Para $a = 0$ la matriz A tiene determinante no nulo y podemos hallar su inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-2-0=-2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}}$$

5.- (2 puntos) Hallar A y B, matrices soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3A-5B=C, \\ -A+3B=D \end{cases}$$

donde C y D son las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz inversa de C^TD, donde C^T es la matriz traspuesta de C.

Despejamos en el sistema las matrices A y B.

$$\begin{cases} 3A-5B=C, \\ -A+3B=D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A-5B=C, \\ -D+3B=A \end{cases} \Rightarrow 3(-D+3B)-5B=C \Rightarrow -3D+9B-5B=C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B=C+3D \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{4}(C+3D)} \Rightarrow A=-D+3\frac{1}{4}(C+3D) \Rightarrow A=-D+\frac{3}{4}C+\frac{9}{4}D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{3}{4}C+\frac{5}{4}D=\frac{1}{4}(3C+5D)}$$

Sustituimos en las expresiones obtenidas las matrices C y D.

$$A=\frac{1}{4}(3C+5D)=\frac{1}{4}\left[3\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 36 & 12 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B=\frac{1}{4}(C+3D)=\frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 16 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinamos C^TD.

$$C^TD=\begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+21+1 & 8+0-2 \\ -8+12-2 & -16+0+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 2 \longrightarrow 2\times 2$$

Calculamos su determinante $|C^TD|=\begin{vmatrix} 26 & 6 \\ 2 & -12 \end{vmatrix}=-324\neq 0$. Tiene inversa.

$$(C^TD)^{-1}=\frac{Adj\left((C^TD)^T\right)}{|C^TD|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 26 & 2 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}}{-324}=-\frac{1}{324}\begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -2 & 26 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{1}{54} \\ \frac{1}{162} & -\frac{13}{162} \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Sabiendo que $|A|=1$, donde:

$$A=\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcular el determinante de la matriz B con

$$B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{pmatrix}$$

Calcular $\left|4B^{-1}A^T\right|^2$.

$$|B|=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{La fila 2ª es suma de 2 ternas de números} \rightarrow \\ \text{separamos el determinante en suma de 2 determinantes}\end{matrix}\right\}$$

$$=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix}=$$

$$=\{\text{Fila 1ª igual a fila 2ª} \rightarrow \text{determinante es nulo}\}=$$

$$=0+\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x+a) & 2(y+b) & 2(z+c) \end{vmatrix}=\{\text{sacamos factor comun el 2 en la fila 3ª}\}=$$

$$=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x+a & y+b & z+c \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{La fila 3ª es suma de 2 ternas de números} \rightarrow \\ \text{separamos en suma de 2 determinantes}\end{matrix}\right\}$$

$$=2\left[\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}\right]=\{\text{Fila 1ª igual a fila 3ª} \rightarrow \text{determinante es nulo}\}=$$

$$=2\left[0+\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}\right]=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Intercambio fila 2ª y 3ª} \rightarrow \\ \text{el signo del determinante} \\ \text{cambia de signo}\end{matrix}\right\}=2(-1)\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2(1)=\boxed{-2}$$

$$\left|4B^{-1}A^T\right|=\{\text{Las matrices son cuadradas de orden 3}\}=4^3\left|B^{-1}A^T\right|=$$

$$=\{\text{El determinante del producto es el producto de los determinantes}\}=$$

$$=4^3\left|B^{-1}\right|\cdot\left|A^T\right|=\left\{\begin{matrix}\text{El determinante de la inversa } \left|B^{-1}\right| \text{ es la inversa del determinante } \dfrac{1}{|B|} \\ \text{El determinante de la traspuesta de A es igual que el de la matriz A}\end{matrix}\right\}=$$

$$=64\frac{1}{|B|}|A|=64\cdot\frac{1}{-2}\cdot(1)=-32$$

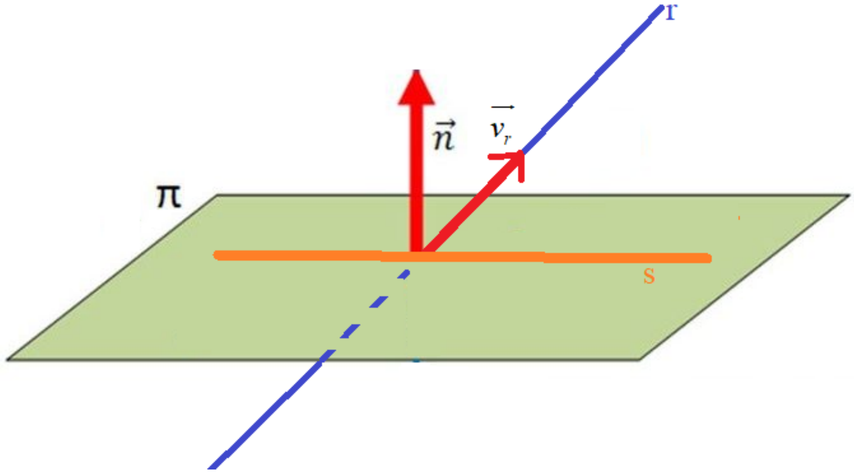
Por lo que $\left|4B^{-1}A^T\right|^2=(-32)^2=1024$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de una recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(0,1,1)$,

b) está contenida en el plano $\pi \equiv x+y+3z-4=0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = z+3, \\ y = -z+4 \end{cases}$



Una recta se define con un punto por el que pasa y por su vector director. El punto es $P(0,1,1)$ y el vector director de la recta *s* del ejercicio es el producto vectorial del normal del plano que la contiene y el director de la recta *r*.

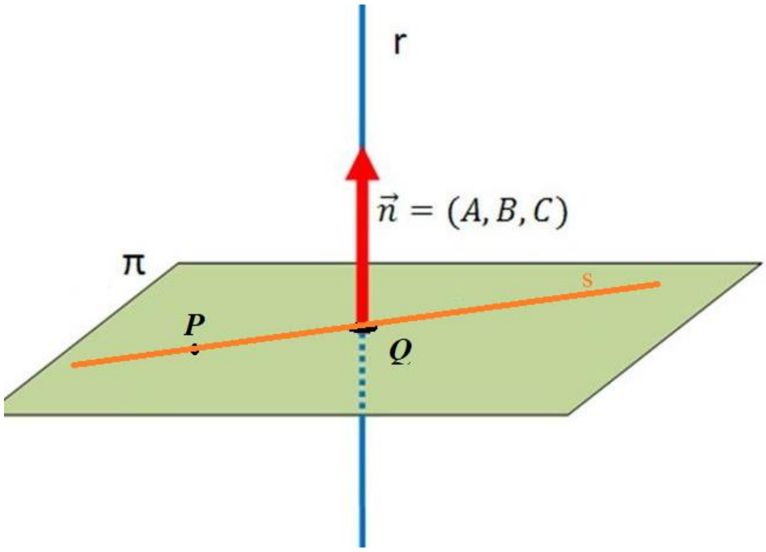
$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+3z-4=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,3) \\ r \equiv \begin{cases} x = z+3, \\ y = -z+4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3+t \\ y = 4-t \Rightarrow \vec{v_r}=(1,-1,1) \\ z = t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_s} = \vec{n} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v_s} = i+3j-k-k-j+3i = 4i+2j-2k \Rightarrow \vec{v_s}=(4,2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s}=(4,2,-2) \\ P(0,1,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}}$$

8.- (2 puntos) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z$$



Determinamos la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta *r* y que contiene el punto P. Este plano tiene como vector normal el director de la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z \Rightarrow \vec{v_r} = (2,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (2,2,1) \\ P(2,-1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+2y+z+D=0 \\ P(2,-1,1) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 4-2+1+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\pi \equiv 2x+2y+z-3=0$$

Hallamos el punto Q de corte de recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1+2t \\ z = t \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+2y+z-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2+2t)+2(1+2t)+t-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4+4t+2+4t+t-3=0 \Rightarrow 9t=-3 \Rightarrow t=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \\ y = 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$$

La recta *s* es la definida por los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{l} Q\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right) \\ P(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right) - (2,-1,1) = \left(\frac{4}{3}-2,\frac{1}{3}+1,\frac{-1}{3}-1\right) = \left(\frac{-2}{3},\frac{4}{3},\frac{-4}{3}\right)$$

Tomamos como vector director de *s* el vector $\overrightarrow{v_s} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\left(\frac{-2}{3},\frac{4}{3},\frac{-4}{3}\right) = (-1,2,-2)$

Hallamos la ecuación de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = (-1,2,-2) \\ P(2,-1,1) \in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}}$$

9.- (2 puntos) La duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado sigue una distribución normal, con media 20 años y desviación típica 5 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de la máquina por un periodo de 25 años.
a) ¿Qué porcentaje de máquinas se espera que no cumplan la garantía?.
b) ¿Qué proporción de máquinas tienen una duración comprendida entre los 15 y 21 años?

X = Duración de un cierto modelo de máquina de aire acondicionado expresado en años.
X = N(20, 5)

a) El enunciado se puede interpretar de dos formas distintas. Resolvemos las dos formas de interpretarlo.

a.1) Lo que nos piden es la probabilidad de que tengamos que usar la garantía y por lo tanto que una máquina no dure 25 años expresado en porcentaje.

z	0	0
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8

$$P(X<25)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{25-20}{5}\right)=$$

$$=P(Z<1)=\{\text{Miramos en la tabla de la N(0, 1)}\}=\boxed{0.8413}$$

El porcentaje de máquinas que se espera usen la garantía es del 84.13 %

a.2) Lo que nos piden es la probabilidad de que no tengamos que usar la garantía y por lo tanto que una máquina dure 25 años o más expresado en porcentaje.

$$P(X\geq 25)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{25-20}{5}\right)=$$

$$=P(Z\geq 1)=1-P(Z<1)=\{\text{Miramos en la tabla de la N(0, 1)}\}=1-0.8413=\boxed{0.1587}$$

El porcentaje de máquinas que se espera no usen la garantía es del 15.87 %

b)

$$P(15<X<21)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{15-20}{5}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{21-20}{5}\right)=$$

$$=P(-1<Z<0.2)=P(Z<0.2)-P(Z<-1)=$$

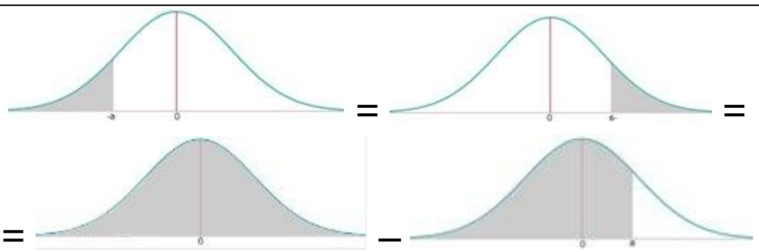
$$=P(Z<0.2)-P(Z\geq 1)=P(Z<0.2)-\left[1-P(Z\leq 1)\right]=$$

$$=\{\text{Miramos en la tabla de la N(0, 1)}\}=$$

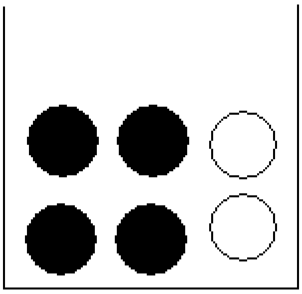
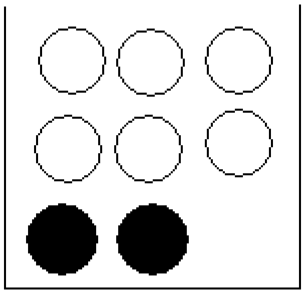
$$=0.5793-[1-0.8413]=\boxed{0.4206=\frac{4206}{10000}=\frac{2103}{5000}}$$

z	0	0,01	0,0
0	0,5000	0,5040	0,50
0,1	0,5398	0,5438	0,54
0,2	0,5793	0,5832	0,58
0,3	0,6179	0,6217	0,62
0,4	0,6554	0,6591	0,66
0,5	0,6915	0,6950	0,69
0,6	0,7257	0,7291	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,76

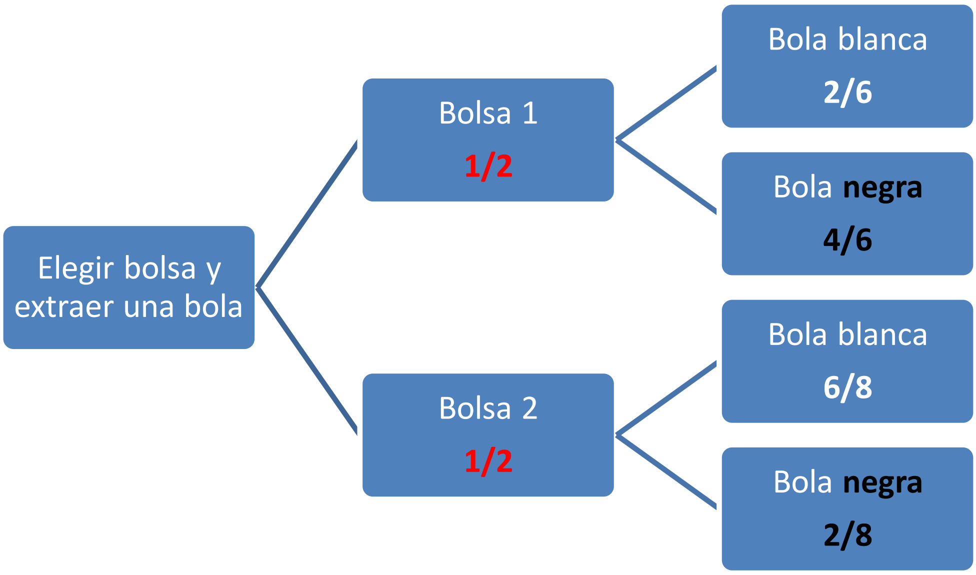
La proporción de máquinas que tendrán una duración comprendida entre los 15 y 21 años es de 2103 de cada 5000.



10.- (2 puntos) Una bolsa contiene 4 bolas negras y 2 blancas. Otra bolsa contiene 2 bolas negras y 6 blancas. Se elige una de las bolsas al azar y se extrae una bola.
a) Calcular la probabilidad de que la bola sea blanca.
b) Sabiendo que la bola es blanca, calcular la probabilidad de que sea de la primera bolsa.

La bolsa 1 es  y la bolsa 2 es 

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y utilizamos la información que aparece en el diagrama de árbol.

$$P(\text{Bola blanca}) = P(\text{Bolsa 1} \cap \text{Bola blanca}) + P(\text{Bolsa 2} \cap \text{Bola blanca}) =$$
$$= P(\text{Bolsa 1})P(\text{Bola blanca / Bolsa 1}) + P(\text{Bolsa 2})P(\text{Bola blanca / Bolsa 2}) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8} = \boxed{\frac{13}{24} = 0.542}$$

b) Esta es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Bolsa 1 / Bola blanca}) = \frac{P(\text{Bolsa 1} \cap \text{Bola blanca})}{P(\text{Bola blanca})} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{24}} = \frac{24}{6\cdot 13} = \boxed{\frac{4}{13} = 0.308}$$