EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2021 - **JUNIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX - B = C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2 \ln\left(x\right)dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln\left(x\right)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos *A = (a, 4, 3), B = (0, 0, 5)* y *C = (0, 3, –1).*

a) **[1 p.]** Calcule los valores de *a* para los cuales el triángulo *ABC* tiene un ángulo recto en el vértice *A*.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de *a = 3*, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos *A* y *B* y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ = 10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de la distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} ax+y+\ z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+\ y+z=a+2 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Realizamos el estudio completo y luego respondemos a las preguntas planteadas en cada apartado.

Consideramos la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^2+1+1+a-1-a=-a^2+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a\neq 1 \quad y \quad a\neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas. El sistema tiene **solución única**.

CASO 2. $a=-1$

Para $a=-1$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale cero.

La matriz A tiene rango 2 pues al considerar el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$

La matriz A/B tiene también rango 2 pues no tiene rango 3, ya que el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna (= 3ª columna) tiene determinante 0 →

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+4-4-1+1=0$$. El rango de A/B es 2.

Por lo que el rango de A/B (2) es igual al rango de A (2) y es menor que el número de incógnitas (3). El sistema tiene **infinitas soluciones**.

CASO 3. $a=1$

Para $a=1$ las matrices quedan $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz A no tiene rango 3 pues su determinante vale 0.
La matriz A tiene rango 2 pues si consideramos el menor de orden 2 que resulta de eliminar la 3ª fila y la 3ª columna tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0$

Para determinar el rango de la matriz ampliada A/B consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª columna (=1ª columna) →

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2+1+4+4-3-1=3\neq 0$$

El rango de A/B es 3.

Como rango de A (2) es distinto de rango de A/B (3) el sistema no tiene solución.

Respondemos a lo planteado en cada apartado.

a) El sistema tiene solución única en el caso 1, es decir, cuando $a\neq 1 \quad y \quad a\neq -1$.

b) El sistema tiene infinitas soluciones en el caso 2, es decir, cuando $a=-1$.
Lo resolvemos para $a=-1$.
El sistema queda:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Como tiene dos ecuaciones iguales (2ª y 3ª), podemos eliminar la tercera ecuación y obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Continuamos resolviendo:

$$\begin{cases} -x+y+z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=4 \\ z=1-y-x \end{cases} \Rightarrow -x+y+1-y-x=4 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{-3}{2}} \Rightarrow z=1-y+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{z=\frac{5}{2}-y}$$

La solución es $\boxed{x=-\frac{3}{2}; \quad y=t; \quad z=\frac{5}{2}-t}$

c) El sistema no tiene solución para $a=1$. Es el caso 3 estudiado anteriormente.

2: Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

a) **[1,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

b) **[1 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AX-B=C^t$, donde C^t denota la matriz traspuesta de C.

a) Para que A tenga inversa debe de tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&2&2\end{vmatrix}=2+0+0-1-0-0=1\neq 0$$

La matriz es regular. Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&0&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\0&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}}$$

b) Como sabemos que la matriz A tiene inversa, podemos utilizarla para despejar en la ecuación la matriz X.

$$AX-B=C^t \Rightarrow AX=C^t+B \Rightarrow X=A^{-1}\left(C^t+B\right)$$

Sustituimos y obtenemos la matriz X buscada.

$$C^t+B=\begin{pmatrix}-2&1\\0&-1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}\left(C^t+B\right)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+0-1&2+0-2\\0+0+0&0-2+0\\1+0+1&-1+2+2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3&0\\0&-2\\2&3\end{pmatrix}}$$

$$3\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\longrightarrow 3\times 2$$

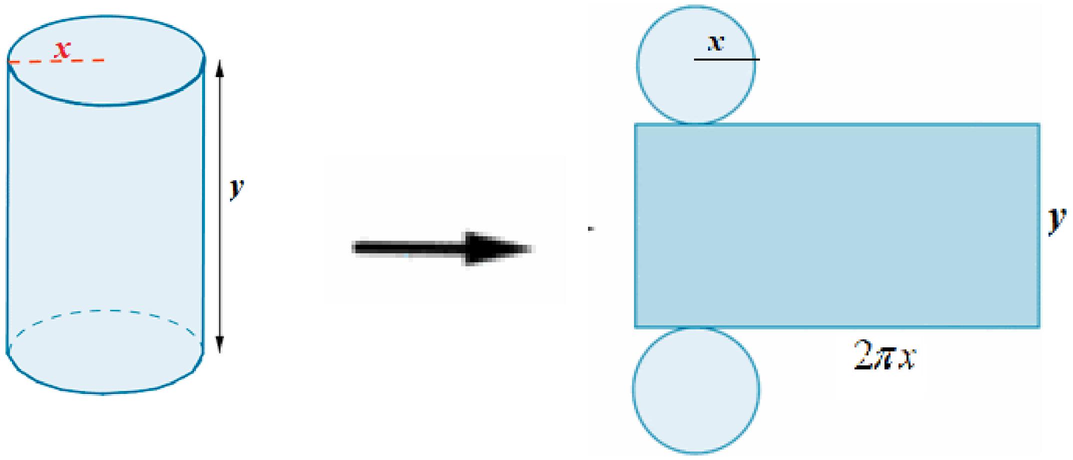
3: En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).

Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2.

a) **[1 p.]** Si denotamos por x el radio de las tapas y por y la altura de la lata, demuestre que el coste total del material necesario para construir dicha lata viene dado por $10\pi x^2 + 6\pi xy$.

b) **[1,5 p.]** Si el volumen de la lata es 90π cm^3, determine sus dimensiones (radio y altura) para que el coste del material sea mínimo.

a) Hacemos un dibujo para aclarar lo que se pide.



El material necesario se divide en dos partes: las dos tapas, teniendo cada una un área $\pi r^2 = \pi x^2$ y el área lateral que es un rectángulo de base la longitud de la circunferencia de la tapa $2\pi x$ y de altura y, por lo que el área total es:

$$\textit{área total} = 2 \cdot \text{área tapa} + \text{área lateral} = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot y$$

Como las tapas cuestan a 5 € el cm^2 y el resto a 3 € el cm^2 el coste queda expresado:

$$\text{Coste}(x,y) = 2\pi x^2 \cdot 5 + 2\pi x \cdot y \cdot 3 = 10\pi x^2 + 6\pi xy$$

b) Utilizando la fórmula del volumen de un cilindro y sabiendo que este volumen es 90π cm^3 se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Volumen cilindro} = \textit{Área}\text{ base} \cdot \text{altura} = \pi x^2 \cdot y \\ \text{Volumen cilindro} = 90\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi x^2 \cdot y = 90\pi \Rightarrow x^2 \cdot y = 90 \Rightarrow y = \frac{90}{x^2}$$

Sustituimos en la función coste para que dicha función sólo dependa de una variable.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Coste}(x,y) = 10\pi x^2 + 6\pi xy \\ y = \dfrac{90}{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Coste}(x) = 10\pi x^2 + 6\pi x \frac{90}{x^2} = 10\pi x^2 + \frac{540\pi}{x}$$

Derivamos esta función y la igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

$$C(x)=10\pi x^2+\frac{540\pi}{x} \Rightarrow C'(x)=20\pi x-\frac{540\pi}{x^2}$$

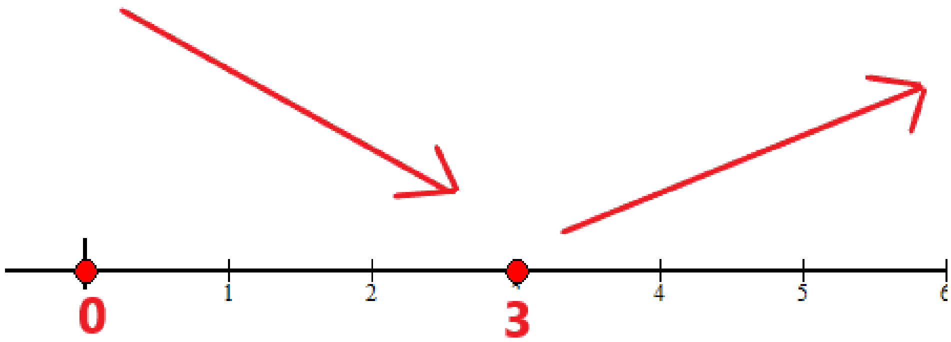
$$C'(x)=0 \Rightarrow 20\pi x-\frac{540\pi}{x^2}=0 \Rightarrow 20\pi x=\frac{540\pi}{x^2} \Leftarrow 20\pi x^3=540\pi \Rightarrow x^3=\frac{540\pi}{20\pi}=27 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{27}=3}$$

Comprobamos si este punto crítico es máximo o mínimo de la función coste.

- En (0, 3) tomamos $x = 2$ y la derivada vale $C'(2)=40\pi-\frac{540\pi}{2^2}=40\pi-160\pi=-120\pi<0$. La función decrece en (0, 3).
- En (3, +∞) tomamos $x = 4$ y la derivada vale $C'(4)=80\pi-\frac{540\pi}{4^2}=80\pi-40\pi=40\pi>0$. La función crece en (3, +∞).

La función coste sigue el esquema siguiente:



Mirando el esquema se deduce que la función coste presenta un mínimo valor en $x = 3$.

El cilindro de 90π cm^3 con dimensiones que minimizan el coste es el que tiene como radio 3 cm y como altura $y=\frac{90}{x^2}=\frac{90}{3^2}=10$ cm.

4: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes. a) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. b) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x^2\ln(x)\,dx$. Determine la primitiva de la función $f(x)=x^2\ln(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas (1, 0).

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty-\infty=$ Indeterminación $=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{\infty+\infty}=\frac{1}{\infty}=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral indefinida.

$$\int x^2\ln(x)\,dx=\int\ln(x)\cdot x^2dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integracion por partes}\\ u=\ln x\rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^2dx\rightarrow v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}=\boxed{\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+K=F(x)}$$

La primitiva que pasa por el punto de coordenadas (1, 0) debe cumplir:

$$\left.\begin{array}{l}F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+K\\ F(1)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1^3}{3}\ln 1-\frac{1^3}{9}+K=0\Rightarrow K=\frac{1}{9}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{1}{9}$

5: Considere los planos de ecuaciones $\pi_1 : x-y+z=0$ y $\pi_2 : x+y-z=2$.

a) **[1 p.]** Compruebe que los planos se cortan y calcule la ecuación de la recta *r* determinada por la intersección de ambos planos.

b) **[1,5 p.]** Compruebe que el punto A = (3, 2, 1) no está en π_1 ni en π_2 y calcule la ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A*.

a) Para que los planos se corten sus vectores normales no deben ser paralelos, es decir, las coordenadas de sus vectores normales no deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x-y+z=0\\ \pi_2 : x+y-z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1)\\ \overrightarrow{n_2}=(1,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{1}{1}=\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}? \text{ ¡NO ES CIERTO!}$$

Por lo que los planos no son paralelos ni coincidentes y deben cortarse en una recta.

Resolviendo el sistema formado por los dos planos obtendremos la ecuación de la recta en paramétricas.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x-y+z=0\\ \pi_2 : x+y-z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}x-y+z=0\\ x=2-y+z\end{array}\right\} \Rightarrow 2-y+z-y+z=0 \Rightarrow -2y+2z=-2 \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=1+z} \Rightarrow x=2-(1+z)+z=2-1-z+z=1 \Rightarrow \boxed{r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1+t\\ z=t\end{array}\right.}$$

b) Comprobamos si el punto A pertenece a alguno de los planos sustituyendo sus coordenadas en la ecuación del plano y viendo si satisface la igualdad.

$¿A=(3,\ 2,\ 1)\in\pi_1?$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x-y+z=0\\ A=(3,\ 2,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow ¿3-2+1=0?\ ¿2=0?\ \text{ ¡No es cierto!}$$

$¿A=(3,\ 2,\ 1)\in\pi_2?$

$$\left.\begin{array}{l}\pi_2 : x+y-z=2\\ A=(3,\ 2,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow ¿3+2-1=2?\quad ¿4=2?\quad \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto A no pertenece al plano π_1 ni al π_2.

La ecuación del plano π_3 que contiene a la recta *r* y pasa por el punto *A* tendrá como vectores directores el vector director de la recta *r* y el vector que une un punto de la recta *r* con el punto *A*.

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=1\\ y=1+t\\ z=t\end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ P_r=(1,1,0)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}P_r=(1,1,0)\\ A=(3,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rA}=(3,2,1)-(1,1,0)=(2,1,1)$$

Obtenemos la ecuación del plano π_3.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rA}=(2,1,1)\\ A=(3,2,1)\in\pi_3\end{array}\right\}\Rightarrow \pi_3:\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z-1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow x-3+2(y-2)-2(z-1)-(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-3+2y-4-2z+2-x+3=0\Rightarrow 2y-2z-2=0\Rightarrow \boxed{\pi_3: y-z-1=0}$$

6: En este ejercicio las cuestiones a) y b) son totalmente independientes.

Considere los puntos $A = (a, 4, 3)$, $B = (0, 0, 5)$ y $C = (0, 3, -1)$.

a) **[1 p.]** Calcule los valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

b) **[1,5 p.]** Tomando el valor de $a = 3$, determine la ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$.

a) Para que sea recto en el vértice A deben ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} A=(a,\ 4,\ 3) \\ B=(0,\ 0,\ 5) \\ C=(0,\ 3,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ 5)-(a,\ 4,\ 3)=(-a,-4,2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,\ 3,-1)-(a,\ 4,\ 3)=(-a,-1,-4) \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=90^{\circ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-a,-4,2)(-a,-1,-4)=0 \Rightarrow a^2+4-8=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Los valores de A que hacen que el triángulo ABC sea recto en el vértice A son **+2 y –2.**

b) Para $a = 3$ el punto A tiene coordenadas $A = (3, 4, 3)$.

El plano π que pasa por A y B y es paralelo a la recta $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ tiene como vectores directores el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector director de la recta.

Determinamos el vector director de la recta.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ y=3-2x \end{cases} \Rightarrow x-(3-2x)+z=0 \Rightarrow x+2x-3+z=0 \Rightarrow 3x+z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=3-3x \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=3-2t \\ z=3-3t \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,-2,-3) \\ P\ =(0,3,3) \end{array}\right\}$$

Determinamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,-2,-3) \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,-4,2) \\ B=(0,0,5)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-5 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+9y-4(z-5)-6(z-5)-2y-12x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+9y-4z+20-6z+30-2y-12x=0 \Rightarrow \boxed{\pi:-16x+7y-10z+50=0}$$

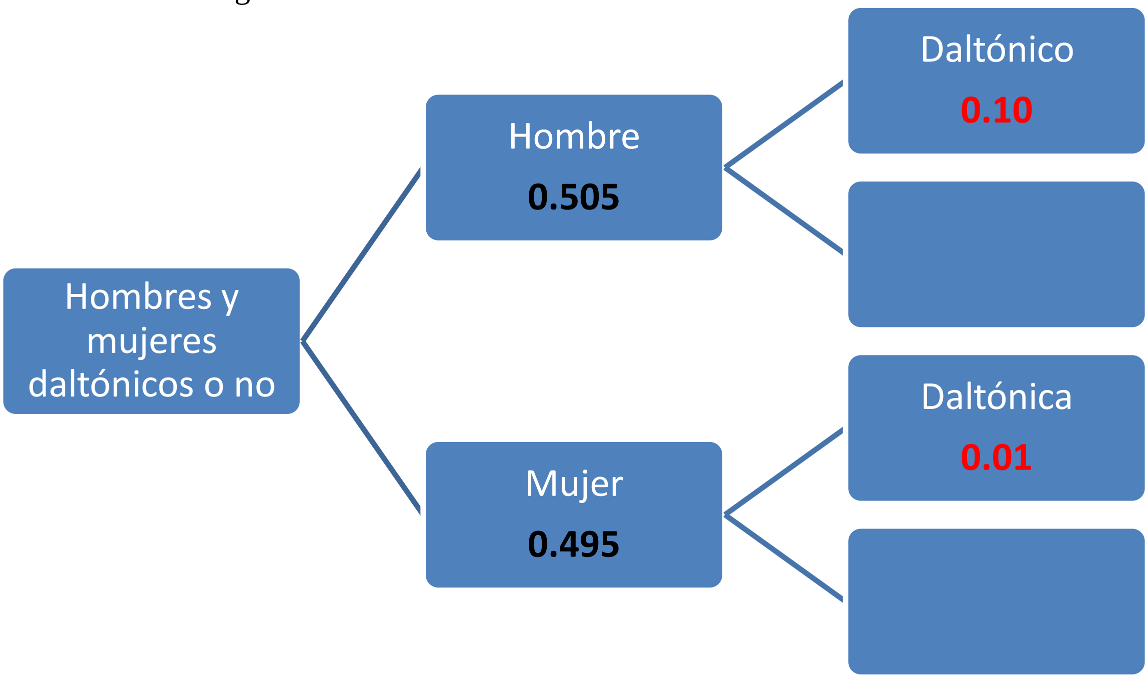
7: Un estudio revela que el 10 % de los hombres son daltónicos y que el 1 % de las mujeres son daltónicas. Según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5% de hombres y un 49,5 % de mujeres. Determine:

a) **[1 p.]** La probabilidad de que una persona elegida al azar sea daltónica.

b) **[1 p.]** Si una persona es daltónica, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

c) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "ser una persona daltónica" y "ser mujer"?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos H = "Ser hombre" y D = "Ser daltónico".

Por lo que $\overline{H}$ = "Ser mujer" y $\overline{D}$ = "No ser daltónico".

a)

$$P(D)=P(H\cap D)+P(\overline{H}\cap D)=P(H)P(D/H)+P(\overline{H})P(D/\overline{H})=$$

$$=0.505\cdot 0.10+0.495\cdot 0.01=\boxed{0.05545}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{H}/D)=\frac{P(\overline{H}\cap D)}{P(D)}=\frac{P(\overline{H})P(D/\overline{H})}{P(D)}=\frac{0.495\cdot 0.01}{0.05545}=\boxed{\frac{99}{1109}=0.0893}$$

c) ¿Son independientes los sucesos D y $\overline{H}$?

¿$P(D\cap\overline{H})=P(D)P(\overline{H})$?

¿ $0.495\cdot 0.01=0.05545\cdot 0.495$?

¿0.0495 = 0.02744775? No son iguales y por tanto no son independientes.

8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.

La velocidad de los vehículos en una autopista con límite de velocidad de 120 Km/h sigue una distribución normal de media μ km/h y desviación típica σ = 10 km/h. Se sabe que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h.

a) **[0,75 p.]** Calcule la media de la distribución.

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es el porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida?

c) **[1 p.]** La DGT establece una multa de 100 euros a los vehículos que viajan entre 120 y 150 km/h ¿Cuál es la probabilidad de ser sancionado con dicha multa?

X = Velocidad de un vehículo en una autopista.

X = N(μ, 10)

a) Que el 69,15 % de los vehículos no sobrepasan la velocidad de 130 km/h significa que:

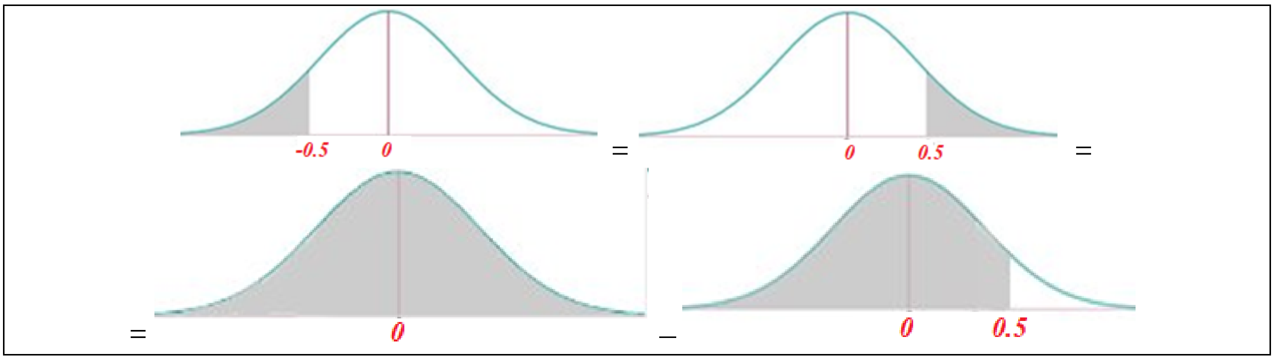
$$P(X \le 130) = 0.6915 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{130-\mu}{10}\right) = 0.6915 \Rightarrow \{\text{Buscamos esta probabilidad en la tabla N(0,1)}\} \Rightarrow \dots$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729

$$\dots \Rightarrow \frac{130-\mu}{10} = 0.5 \Rightarrow 130-\mu = 5 \Rightarrow 130-5 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 125\ km/h}$$

b) $P(X \le 120) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{120-125}{10}\right) = P(Z \le -0.5) = \dots$



$$\dots \Rightarrow P(Z \ge 0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = \{\text{Buscamos esta probabilidad en la tabla N(0,1)}\} = \dots$$

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72

$$\ldots \Rightarrow 1-0.6915=\boxed{0.3085}$$

El porcentaje de vehículos que no sobrepasan la velocidad máxima permitida es del 30.85 %.

c)

$$P(120 \leq X \leq 150)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{120-125}{10} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{150-125}{10}\right)=$$

$$=P(-0.5 \leq Z \leq 2.5)=P(Z \leq 2.5)-P(Z \leq -0.5)=P(Z \leq 2.5)-P(Z \geq 0.5)=$$

$$=P(Z \leq 2.5)-\left[1-P(Z \leq 0.5)\right]=\{\text{ Miramos en la tabla N(0,1)}\}=\ldots$$

z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713
2.0	0.9772
2.1	0.9821
2.2	0.9861
2.3	0.9893
2.4	0.9918
2.5	0.9938

z	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72

$$\ldots=0.9938-[1-0.6915]=\boxed{0.6853}$$