Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2020-2021

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x - y = 3 \\ (a-1)x + (a+1)y - (2-a)z = -2a \\ (-2a+2)x - ay + \left(a^2 - a - 2\right)z = 3a - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $\left|A^3\right| = 8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2 - t & t^2 + 2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y + z + 3 = 0 \\ x + 6y - z - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos A (–1, –2, 3) y B (2, –2, –1) . Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u.

(2.5 puntos)

P5) Sea la función $f(x)=\left(x^2-3x+10\right)^{\log\left[2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 3]

(1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f(\alpha)=\dfrac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.25 puntos)

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$$

(2.5 puntos)

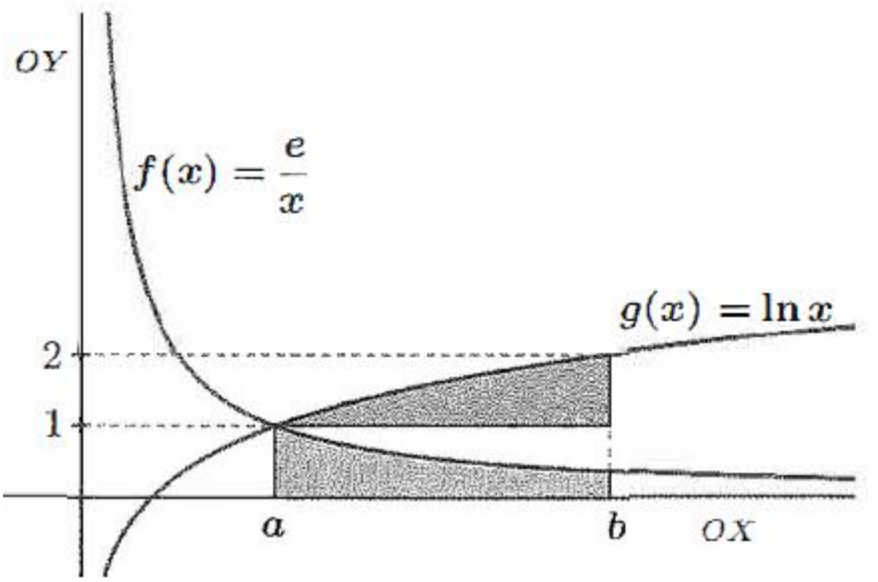
P7) Sea la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f\,'(\alpha)=3/2\ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Calcula los valores de las abcisas *a* y *b* que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a-1)x-y=3 \\ (a-1)x+(a+1)y-(2-a)z=-2a \\ (-2a+2)x-ay+\left(a^2-a-2\right)z=3a-1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ a-1 & a+1 & a-2 \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix}$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente al inicial.

$$A/B=\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª} & & & \\ a-1 & a+1 & a-2 & -2a \\ -a+1 & 1 & 0 & -3 \\ \hline 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \rightarrow \text{Nueva fila 2ª} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Fila 3ª} + 2\cdot\text{Fila 1ª} & & & \\ -2a+2 & -a & a^2-a-2 & 3a-1 \\ 2a-2 & -2 & 0 & 6 \\ \hline 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \text{Fila 3ª} + \text{Fila 2ª} & & & \\ 0 & -a-2 & a^2-a-2 & 3a+5 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ \hline 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & a+2 & a-2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{pmatrix}$$

La nueva matriz de coeficientes tiene determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}=(a-1)(a+2)\left(a^2-4\right)=(a-1)(a+2)(a+2)(a-2)$$

Vemos cuando se anula. $|A|=0 \Rightarrow (a-1)(a+2)(a+2)(a-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \\ a=2 \end{cases}$

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1, \quad a \neq 2 \quad y \quad a \neq -2$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es compatible determinado (tiene solución única).
Lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & a-2 \\ a+2 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-2)}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ a+2 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)(a+2)\cancel{(a-2)}} = \frac{\cancel{(a+2)}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)\cancel{(a+2)}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2a-3 & a+2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)(a+2)} = \frac{3(a+2)-1-2a-3}{(a-1)(a+2)} = \frac{3a+6-1-2a-3}{(a-1)(a+2)} = \frac{\cancel{a+2}}{(a-1)\cancel{(a+2)}} = \boxed{\frac{1}{a-1}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 3 & 0 \\ 0 & -2a-3 & a-2 \\ 0 & a+2 & a^2-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)(-2a-3)(a^2-4)-(a-1)(a-2)(a+2)}{(a-1)(a+2)(a+2)(a-2)} =$$

$$= \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}\cancel{(a+2)}\left[(-2a-3)-1\right]}{\cancel{(a-1)}(a+2)\cancel{(a+2)}\cancel{(a-2)}} = \frac{-2a-4}{a+2} = \frac{-2\cancel{(a+2)}}{\cancel{a+2}} = \boxed{-2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 3 \\ 0 & a+2 & -2a-3 \\ 0 & 0 & a+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 0 & a+2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}\cancel{(a+2)}}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a+2)}\cancel{(a+2)}(a-2)} = \frac{1}{a-2}$$

La solución es $x = \frac{1}{a-1}, \quad y = -2, \quad z = \frac{1}{a-2}$

CASO 2. $a = 1$

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$\left.\begin{array}{r}-y=3\\ 3y-z=-5\\ -3z=3\end{array}\right\}$. Lo intentamos resolver.

$$\begin{cases}-y=3\\ 3y-z=-5\\ -3z=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3\\ 3y-z=-5\\ z=\dfrac{3}{-3}=-1\end{cases}\Rightarrow 3(-3)-(-1)=-5\Rightarrow -9+1=-5 \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$

y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Por el teorema de Rouché el sistema es incompatible.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ 4y=-7\\ 0=4\end{array}\right\}$ ¡IMPOSIBLE!

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 4. $a=-2$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Y la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

por lo que el rango de A es 2, el de la ampliada también 2 y es menor que el número de incógnitas. Por el teorema de Rouché el sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos. El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} -3x-y=3 \\ -4z=1 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -3x-3=y \\ \boxed{z=-\frac{1}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-3-3t \\ z=-\frac{1}{4} \end{array}\right\}}$$

P2) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $\left|A^3\right|=8$, siendo A la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Calculamos el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} t-1 & t+1 & 3 \\ t^2-t & t^2+2t & t \\ 1-t & -1-t & -2 \end{vmatrix}=\left\{\text{Saco factor común en 1ª columna}\right\}=(t-1)\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ t & t(t+2) & t \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Saco factor común en 2ª fila}\right\}=t(t-1)\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ -1 & -1-t & -2 \end{vmatrix}=\left\{\text{Le sumo a la 3ª fila la 1ª}\right\}=$$

$$=t(t-1)\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 1 & t+2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\left\{\text{Le resto a la 2ª fila la 1ª}\right\}=t(t-1)\begin{vmatrix} 1 & t+1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=t(t-1)(1)=t(t-1)$$

Ponemos la condición pedida $\left|A^3\right|=8$ y tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} |A|=t(t-1)\Rightarrow |A|^3=\left[t(t-1)\right]^3\Rightarrow \left|A^3\right|=\left[t(t-1)\right]^3 \\ \left|A^3\right|=8 \end{array}\right\}\Rightarrow \left[t(t-1)\right]^3=8\Rightarrow t(t-1)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-t-2=0\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{2}=\boxed{2=t} \\ \dfrac{1-3}{2}=\boxed{-1=t} \end{cases}$$

Los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $\left|A^3\right|=8$ son $t=-1$ y $t=2$.

P3) Encuentra la ecuación general del plano π que es paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1}$$

y equidista de ambas.

(2.5 puntos)

Estudiamos previamente la posición relativa de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x+6y-z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ x=7-6y+z \end{cases} \Rightarrow 7-6y+z+2y+z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y+2z+10=0 \Rightarrow -2y+z+5=0 \Rightarrow z=-5+2y \Rightarrow x=7-6y-5+2y=2-4y$$

$$r \equiv \begin{cases} x=2-4t \\ y=t \\ z=-5+2t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-4,1,2) \\ P_r(2,0,-5) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(3,3,1) \\ P_s(3,-2,-2) \end{cases}$$

Las coordenadas de los vectores directores de las rectas no son proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-4,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{-4}{3}=\frac{1}{3}=\frac{2}{1}? \text{ No se cumple ninguna de las igualdades.}$$

Las rectas o son secantes o se cruzan. Realizamos el producto mixto de los vectores directores $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y el vector $\overrightarrow{P_rP_s}$.

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(3,-2,-2)-(2,0,-5)=(1,-2,3)$$

$$\left[\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -36+1-12-6-9-8=1-71=-70 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano pedido tendrá como vector normal el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-4,1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(3,3,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5i+10j-15k=(-5,10,-15) \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,3)$$

El plano tiene ecuación $\pi \equiv x-2y+3z+D=0$.

Para obtener el valor de D le añadimos la condición de ser equidistante de las rectas.

$$\left.\begin{array}{r} d(r,\pi)=d(s,\pi)\Rightarrow d(P_r,\pi)=d(P_s,\pi) \\ \pi \equiv x-2y+3z+D=0 \\ P_s(3,-2,-2) \\ P_r(2,0,-5) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|2-0-15+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|3+4-6+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-13+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} = \frac{|1+D|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |-13+D|=|1+D| \Rightarrow \begin{cases} -13+D=1+D \Rightarrow -12=0 \text{ ¡NO ES VÁLIDO!} \\ -13+D=-(1+D) \Rightarrow -13+D=-1-D \Rightarrow 2D=12 \Rightarrow \boxed{D=6} \end{cases}$$

El plano equidistante de las dos rectas tiene ecuación $\pi \equiv x-2y+3z+6=0$

P4) Un lado de un paralelogramo está sobre la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Otro lado lo determinan los puntos A (–1, –2, 3) y *B* (2, –2, –1). Calcula los otros dos vértices del paralelogramo sabiendo que su perímetro mide 16 u.

(2.5 puntos)

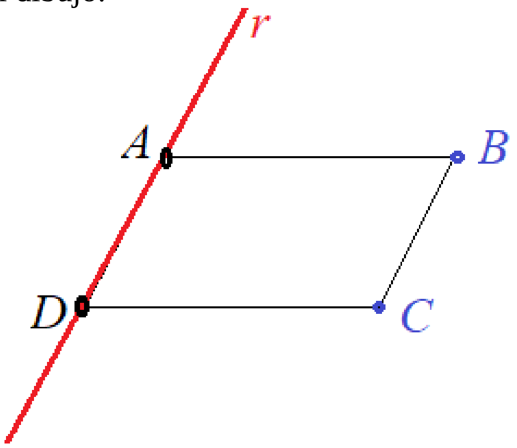
Un punto *P* de la recta *r* tiene coordenadas:

$$r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1-t \\ z = 1+2t \end{cases} \Rightarrow P(1-2t, -1-t, 1+2t)$$

El punto A(–1, –2, 3) pertenece a la recta. Con *t* = *1* tenemos $\begin{cases} x = 1-2 = -1 \\ y = -1-1 = -2 \\ z = 1+2 = 3 \end{cases}$

El punto *B* (2, –2, –1) no pertenece a la recta *r*. $\begin{cases} 2 = 1-2t \\ -2 = -1-t \\ -1 = 1+2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2t \\ -1 = -t \\ -2 = 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2t \\ 1 = t \\ -1 = t \end{cases}$ ¡IMPOSIBLE!

La situación planteada es la del dibujo:



El punto D pertenece a la recta *r*, por lo que sus coordenadas son $D(1-2t, -1-t, 1+2t)$ y el punto C se obtiene sumando al punto D el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2,-2,-1) - (-1,-2,3) = (3,0,-4)$$
$$C = D + \overrightarrow{AB} = (1-2t, -1-t, 1+2t) + (3,0,-4) = (4-2t, -1-t, -3+2t)$$

Los vértices del paralelogramo son A (–1, –2, 3), *B* (2, –2, –1), $C(4-2t, -1-t, -3+2t)$ y $D(1-2t, -1-t, 1+2t)$.

Como el perímetro es 16 se debe cumplir que la suma de los módulos de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ sea 8.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(3,0,-4)\\ \overrightarrow{AD}=(1-2t,-1-t,1+2t)-(-1,-2,3)=(2-2t,1-t,-2+2t)\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{16}{2}=8\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}+\sqrt{(2-2t)^2+(1-t)^2+(-2+2t)^2}=8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+\sqrt{4+4t^2-8t+1+t^2-2t+4+4t^2-8t}=8\Rightarrow\sqrt{4+4t^2-8t+1+t^2-2t+4+4t^2-8t}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9t^2-18t+9=9\Rightarrow 9t^2-18t=0\Rightarrow 9t(t-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{t=0}\\ \boxed{t=2}\end{cases}$$

Hay dos soluciones al problema:

Si $t = 0$ los puntos son $\left.\begin{array}{r}C(4-2t,-1-t,-3+2t)\\ D(1-2t,-1-t,1+2t)\\ t=0\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{C=(4,-1,-3);\quad D(1,-1,1)}$

Si $t = 2$ los puntos son $\left.\begin{array}{r}C(4-2t,-1-t,-3+2t)\\ D(1-2t,-1-t,1+2t)\\ t=2\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{C=(0,-3,1);\quad D(-3,-3,5)}$

P5) Sea la función $f(x)=\left(x^2-3x+10\right)^{\log\left[2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}\right]}$

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo [1, 3]

(1.25 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f(\alpha)=\frac{3}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.25 puntos)

a) Vemos si la base es positiva.

$$x^2-3x+10=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-40}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-31}}{2}=\textit{No existe}$$

Es una parábola que no corta el eje de abscisas y es siempre positiva, pues en un punto cualquiera, por ejemplo $x=2$ → $2^2-6+10=8>0$.

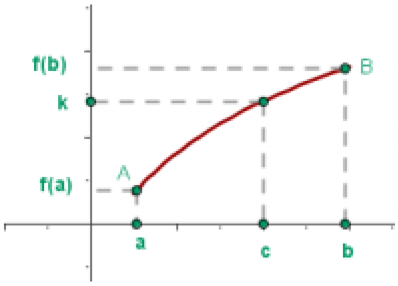
Vemos si el contenido del logaritmo es positivo, para que pueda estar definido.

$$x\in[1,3]\Rightarrow x+2\in[3,5]\Rightarrow\frac{x+2}{6}\in\left[\frac{1}{2},\frac{5}{6}\right]\Rightarrow\frac{\pi(x+2)}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]=[90^{\circ},150^{\circ}]\Rightarrow\sin\frac{\pi(x+2)}{6}>0$$

$$\left.\begin{array}{r}2^{x-1}>0\\ x\in[1,3]\Rightarrow\sin\frac{\pi(x+2)}{6}>0\end{array}\right\}\Rightarrow 2^{x-1}\sin\frac{\pi(x+2)}{6}>0$$

La función está bien definida y es composición y producto de funciones continuas. Luego es continua.

b) Aplicamos el teorema de los valores intermedios.
Si una función es continua en el intervalo [a, b] y k es un número comprendido entre los valores f(a) y f(b), entonces existe algún c en (a, b) tal que f(c) = k.



Lo aplicamos a nuestra función.
f(x) es continua en [1,3].

$$f(1)=\left(1^2-3+10\right)^{\log\left[2^{1-1}\sin\frac{\pi(1+2)}{6}\right]}=8^{\log\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)}=8^0=1,$$

$$f(3)=\left(3^2-9+10\right)^{\log\left[2^{3-1}\sin\frac{\pi(3+2)}{6}\right]}=10^{\log 4\sin\frac{5\pi}{6}}=4\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{4}{2}=2$$

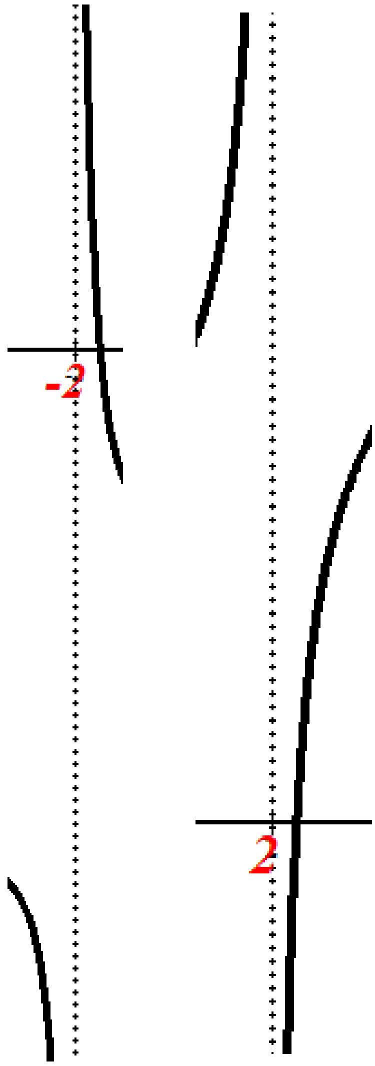
Como $f(1)=1<\frac{3}{2}<2=f(3)$ entonces existe un valor $c\in(1,3)$ tal que $f(c)=\frac{3}{2}$

P6) Calcula las asíntotas de esta función y estudia la posición de la curva respecto a ellas:

$$f(x)=\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}$$

(2.5 puntos)

El denominador de la función se anula para $x = -2$ y $x = 2$.
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$



Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x = -2$?

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}=\frac{(-2)^3-4(-2)-1}{(-2)^2-4}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}=\frac{(-2)^3-4(-2)-1}{(-2)^2-4}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

¿$x = 2$?

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}=\frac{(2)^3-4(2)-1}{(2)^2-4}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}=\frac{(2)^3-4(2)-1}{(2)^2-4}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Las asíntotas verticales son $x = -2$ y $x = 2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x-1}{x^3-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-4x-1}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-4x-1-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x^2-4}=\frac{-1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua es $y=x$

Comprobamos si la función se acerca a la asíntota por encima o por debajo valorando ambas en el valor $x = 100$ y $x = -100$.

$$f(100)=\frac{100^3-400-1}{100^2-4}\simeq 99.99 \quad \text{y la asíntota vale y = 100}$$

En el $+\infty$ la función se acerca a la asíntota por debajo.

$f(-100) = \dfrac{(-100)^3 + 400 - 1}{(-100)^2 - 4} \simeq -100.0001$ y la asíntota vale y = –100

En el –∞ la función se acerca a la asíntota por debajo.

P7) Sea la función $f(x)=\ln\left(\dfrac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,3]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,3)$ tal que $f'(\alpha)=3/2\ln 2$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) Vemos si el cociente que contiene el logaritmo neperiano es positivo y está bien definida la función.

¿El numerador es positivo?

$$\left.\begin{array}{r} x\in[1,2]\Rightarrow \dfrac{\pi x}{2}\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{2}\right]\Rightarrow 0\le \sin\dfrac{\pi x}{2}\le 1\Rightarrow -2\le -x\sin\dfrac{\pi x}{2} \\ x\in[1,2]\Rightarrow 5x\in[5,10]\Rightarrow 5x-2\in[3,8] \end{array}\right\}\Rightarrow 1\le 5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x\in[2,3]\Rightarrow \dfrac{\pi x}{2}\in\left[\dfrac{2\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]\Rightarrow -1\le \sin\dfrac{\pi x}{2}\le 0\Rightarrow -3\le -x\sin\dfrac{\pi x}{2} \\ x\in[2,3]\Rightarrow 5x\in[10,15]\Rightarrow 5x-2\in[8,13] \end{array}\right\}\Rightarrow 5\le 5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}$$

En los dos tramos el numerador es positivo.

¿El denominador es positivo?

$$x^2-4x+6=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-24}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-8}}{2}=\text{ ¡NO EXISTE!}$$

El denominador es una parábola que no corta el eje OX, y por tanto es siempre positiva.
$x = 10 \rightarrow 10^2 - 4\cdot 10 + 6 = 66 > 0$.

Está bien definida la función en el intervalo [1, 3] y es composición, producto y división de funciones continuas que no se anulan, por lo que es continua.

b) Usamos el teorema del valor medio (Lagrange)

Sea *f(x)* una función real. Si se cumple que *f(x)* es continua en [a, b] y derivable en (a, b) entonces se tiene que existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Lo aplicamos a nuestra función.

$$f(x)=\ln\left(\frac{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2-4x+6}\right)=\ln\left(5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}\right)-\ln\left(x^2-4x+6\right)$$

$$f'(x)=\frac{5-\sin\frac{\pi x}{2}-x\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{5x-2-x\sin\frac{\pi x}{2}}-\frac{2x-4}{x^2-4x+6}$$

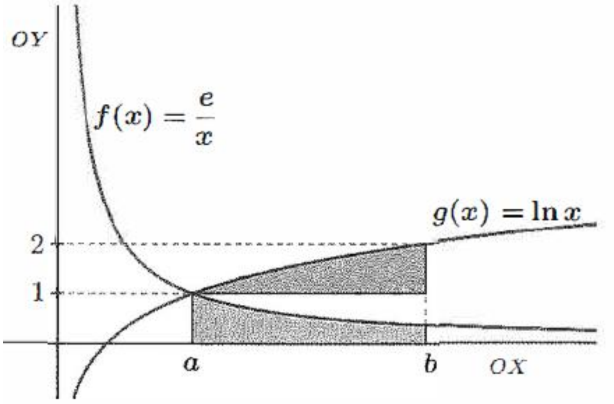
$f(x) = \ln\left(\dfrac{5x - 2 - x\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x^2 - 4x + 6}\right)$ es continua en $[1,3]$ y derivable en (1, 3).

Entonces existe $c \in [1,3]$ tal que

$$f\,'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3-1} = \frac{\ln\left(\dfrac{15 - 2 - 3\sin\dfrac{3\pi}{2}}{9 - 12 + 6}\right) - \ln\left(\dfrac{5 - 2 - \sin\dfrac{\pi}{2}}{1 - 4 + 6}\right)}{2} = \frac{\ln\dfrac{16}{3} - \ln\dfrac{2}{3}}{2}$$

$$f\,'(c) = \frac{\ln 16 - \ln 3 - \ln 2 + \ln 3}{2} = \frac{\ln 2^4 - \ln 2}{2} = \frac{4\ln 2 - \ln 2}{2} = \frac{3\ln 2}{2}$$

P8) Calcula los valores de las abcisas a y b que aparecen en el gráfico, y, después, comprueba que las áreas de las dos regiones sombreadas son iguales:



.

(2.5 puntos)

Como $g(a) = f(a) = 1$ entonces $g(a) = 1 = \ln a \Rightarrow \boxed{a = e}$.

También se cumple que $f(a) = f(e) = \frac{e}{e} = 1$.

Como $g(b) = 2 = \ln b \Rightarrow \boxed{b = e^2}$

El área inferior es:

$$\text{Área inferior} = \int_e^{e^2} \frac{e}{x} dx = e\int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = [e \ln x]_e^{e^2} = [e \ln e^2] - [e \ln e] = 2e - e = \boxed{e\, u^2}$$

El área superior es el área encerrada entre la gráfica de $g(x)$ y la recta horizontal $y = 1$ entre e y e^2.

$$\text{Área superior} = \int_e^{e^2} \ln x - 1 dx = \int_e^{e^2} \ln x dx - \int_e^{e^2} 1 dx = \int_e^{e^2} \ln x dx - [x]_e^{e^2} = \ldots$$

$$\boxed{\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \to v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K}$$

$$\ldots = [x \ln x - x - x]_e^{e^2} = [x \ln x - 2x]_e^{e^2} = [e^2 \ln e^2 - 2e^2] - [e \ln e - 2e] = 2e^2 \ln e - 2e^2 - e + 2e = \boxed{e\, u^2}$$

Como se comprueba las dos áreas valen e u^2