GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2021	CONVOCATORIA: JUNIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Se dan los planos $\pi_1: x+y+z=a-1$, $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$.

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. (4 puntos)
b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. (3 puntos)
c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. (3 puntos)

Problema 3. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$, obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

Problema 4. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{bmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m. (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde I es la matriz identidad en el caso $m = 1$. (4 puntos)

Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$, se pide:

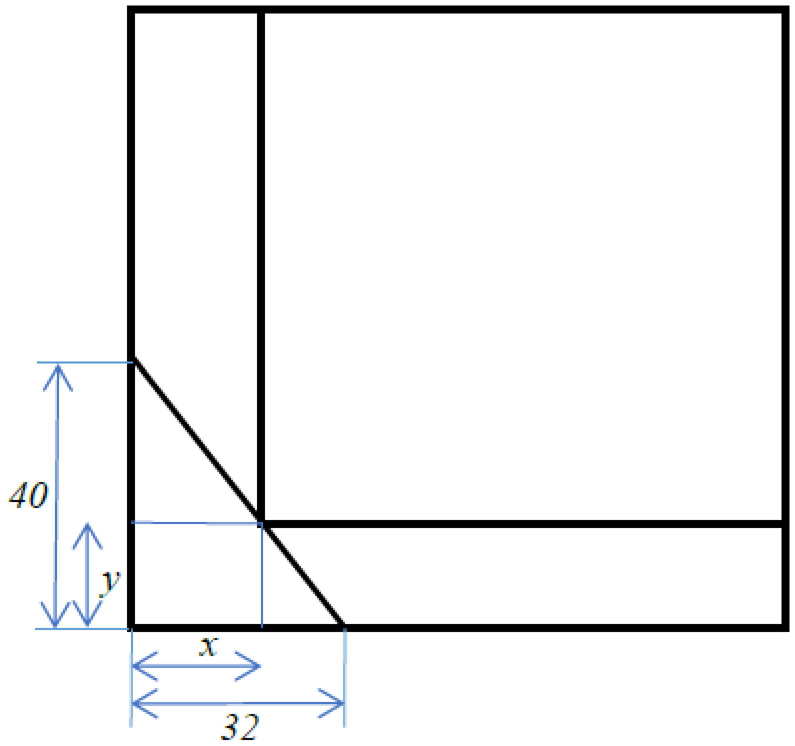
a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)
b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)
c) Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)

c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



Soluciones:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$$

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a. (5 puntos)
b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible. (5 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{array}\right)$

Obtenemos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}=a-1+4+a^2+a-2(a-1)(a+1)-1-2a=a^2+2-2a^2+2=-a^2+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$ utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^{\text{a}} - \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ \hline 0 & -4 & 3 & -1 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{\text{a}} - 2\cdot\text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & -4 & 3 & -5 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a}} \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3.
El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$ utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a}} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^{a}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{a} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{a}} \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -6 & -4 \\ \hline 0 & 0 & -5 & -5 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{a} - 5 \cdot \text{Fila } 2^{a}} \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 2. Pero el número de incógnitas es 3.
El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para el caso 1 siendo $a \neq 2 \ y \ a \neq -2$ y el sistema compatible determinado. Obtenemos sus soluciones con el método de Cramer.

$$|A| = -a^2 + 4$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2a-2-2+a^2+a+a^2-1-1-4a}{-a^2+4} = \frac{2a^2-a-6}{-a^2+4}$$

$$\boxed{x=\frac{\cancel{(a-2)}(2a+3)}{\cancel{(a-2)}(-a-2)}=\frac{2a+3}{-a-2}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a+1\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a-1 & 2\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}}=\frac{1+8-a-1-2a-2-2+2}{-a^2+4}=\frac{-3a+6}{-a^2+4}=\frac{-3\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-2)}(-a-2)}=\boxed{\frac{3}{a+2}=y}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & a-1 & 1\\ 2 & a & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & a+1\\ 1 & a-1 & 2\\ 2 & a & 1\end{vmatrix}}=\frac{-a+1+2+2a-4a+4+1-a}{-a^2+4}=\frac{-4a+8}{-a^2+4}=\frac{-4\cancel{(a-2)}}{\cancel{(a-2)}(-a-2)}=\boxed{\frac{4}{a+2}=z}$$

En el caso 3 siendo $a=2$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido por el método de Gauss.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)\Rightarrow (A/B)''=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+3z=2\\ -z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+y+3z=2\\ \boxed{z=1}\end{array}\right\}\Rightarrow x+y+3=2\Rightarrow\boxed{x=-y-1}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-t-1\\ y=t\\ z=1\end{cases}}$$

Para $a\neq 2$ y $a\neq -2$ el sistema tiene solución $x=\frac{2a+3}{-a-2}$; $y=\frac{3}{a+2}$; $z=\frac{4}{a+2}$

Para $a = 2$ el sistema tiene solución: $x = -t - 1$; $y = t$; $z = 1$ siendo t un número real.

Problema 2. Se dan los planos $\pi_1 : x+y+z=a-1$, $\pi_2 : 2x+y+az=a$ y $\pi_3 : x+ay+z=1$.
a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. (4 puntos)
b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. (3 puntos)
c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. (3 puntos)

a) Planteamos un sistema con los tres planos y lo estudiamos como un sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$, calculamos su determinante e igualamos a cero.

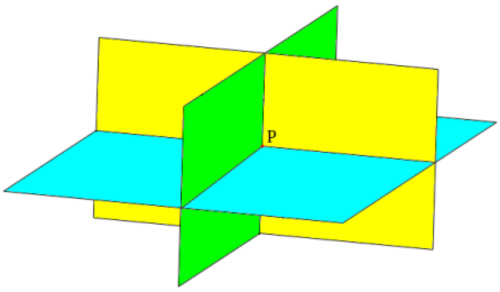
$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{(-3)^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=1=a \\ \dfrac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Establecemos tres situaciones distintas que analizamos.

CASO 1. $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema tiene una única solución. Esta solución es un punto, que es el punto de corte de los tres planos. Los tres planos se cortan en un punto.



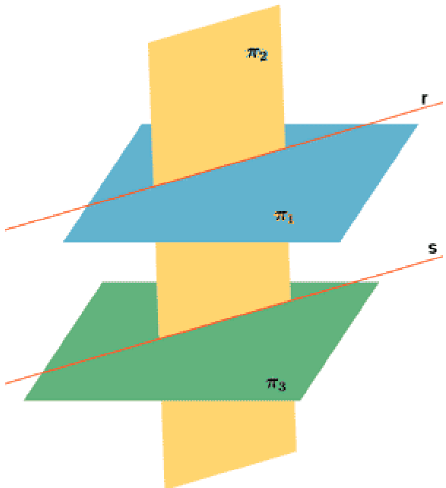
CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango no es 3. Analizamos la matriz ampliada y la transformamos en otra matriz equivalente triangular.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }2^a-2\cdot\text{Fila }1^a}\\2&1&1&1\\-2&-2&-2&0\\\hline 0&-1&-1&1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-\text{Fila }1^a}\\1&1&1&1\\-1&-1&-1&0\\\hline 0&0&0&1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema no tiene solución.
Los tres planos no se cortan al mismo tiempo.
Como las ecuaciones son $\pi_1: x+y+z=0$, $\pi_2: 2x+y+z=1$ y $\pi_3: x+y+z=1$ tenemos que los planos π_1 y π_3 son paralelos y son secantes con el plano π_2



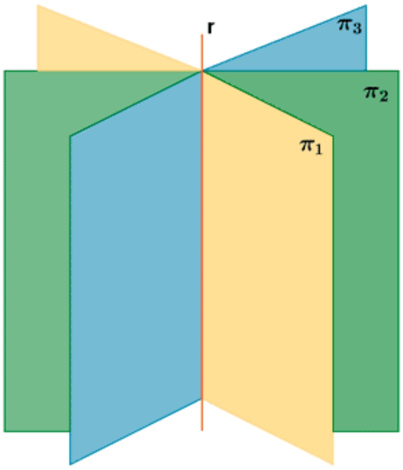
CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango no es 3. Analizamos la matriz ampliada y la transformamos en otra matriz equivalente triangular.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }2^a-2\cdot\text{Fila }1^a}\\2&1&2&2\\-2&-2&-2&-2\\\hline 0&-1&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-\text{Fila }1^a}\\1&2&1&1\\-1&-1&-1&-1\\\hline 0&1&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a+\text{Fila }2^a}\\0&1&0&0\\0&-1&0&0\\\hline 0&0&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow(A/B)''=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

El rango de A es 2 al igual que el rango de A/B. Y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.
Los planos son secantes y se cortan en una recta común a los tres.



b) Para $a = 1$ estamos en el caso 1 estudiado y hemos visto que los planos π_1 y π_3 son paralelos y por tanto no tienen recta común.

c) Para $a = 2$ estamos en el caso 3 y si existe la recta común cuya ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 : x+y+z=1 \\ \pi_2 : 2x+y+2z=2\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r : \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \end{cases}}$$

Problema 3. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$, obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. (2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. (4 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$. (4 puntos)

a) El dominio de la función lo forman todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)} \Rightarrow x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x=-2 \end{cases}$$

Dominio de *f(x)* = $\mathbb{R}-\{-2,0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿*x = 0*?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{0-1}{0(0+2)}=\frac{-1}{0}=\infty$$

x = 0 es asíntota vertical.

¿*x = –2*?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{-2-1}{-2(-2+2)}=\frac{-3}{0}=\infty$$

x = –2 es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=\frac{0}{1}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Derivamos la función y vemos cuando cambia de signo.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{x^2+2x-(x-1)(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}=\frac{x^2+2x-2x^2-2x+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{-x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2}=0 \Rightarrow -x^2+2x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)2}}{-2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores $x=1-\sqrt{3}$ y $x=1+\sqrt{3}$. Añadimos como puntos de separación también los excluidos del dominio, por no poder usarlos en el cálculo de la derivada.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos $x = -3$ y la derivada vale

  $f\,'(-3)=\dfrac{-(-3)^2+2(-3)+2}{\left((-3)^2+2(-3)\right)^2}=\dfrac{-13}{+}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$

- En $\left(-2,1-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f\,'(-1)=\dfrac{-(-1)^2+2(-1)+2}{\left((-1)^2+2(-1)\right)^2}=\dfrac{-1}{+}<0$. La función decrece en $\left(-2,1-\sqrt{3}\right)$

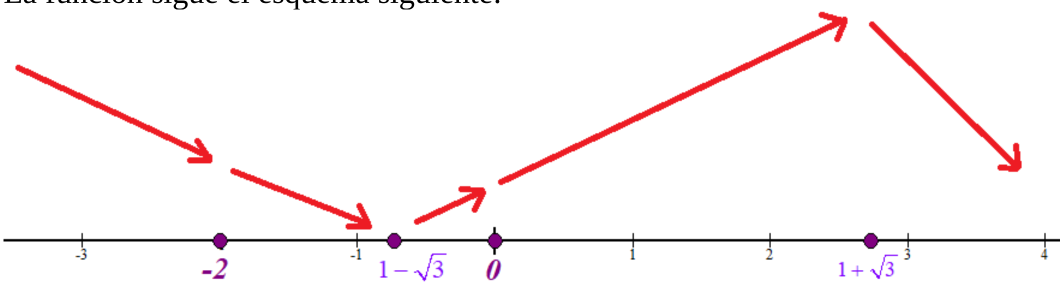
- En $\left(1-\sqrt{3},0\right)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

  $f\,'(-0.5)=\dfrac{-(-0.5)^2+2(-0.5)+2}{\left((-0.5)^2+2(-0.5)\right)^2}=\dfrac{0.75}{+}>0$. La función crece en $\left(1-\sqrt{3},0\right)$

- En $\left(0,1+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{-1^2+2+2}{\left(1^2+2\right)^2}=\dfrac{3}{+}>0$. La función crece en $\left(0,1+\sqrt{3}\right)$

- En $\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{-3^2+6+2}{\left(3^2+6\right)^2}=\dfrac{-1}{+}<0$. La función decrece en $\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$

  La función sigue el esquema siguiente:



  La función decrece en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$ y crece en $\left(1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right)$.

c)

$$\int f(x)dx=\int\frac{x-1}{x(x+2)}dx=\ldots$$

Descomponemos la fracción del integrando en fracciones simples.

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} \\ \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \\ x-1 = A(x+2)+Bx \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to -1 = 2A \to A = -\dfrac{1}{2} \\ x=-2 \to -3 = -2B \Rightarrow B = \dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \dfrac{x-1}{x(x+2)} = \dfrac{-1/2}{x} + \dfrac{3/2}{x+2} \end{array}}$$

$$\ldots = \int \frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2}\,dx = \int \frac{-1/2}{x}\,dx + \int \frac{3/2}{x+2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| = \frac{1}{2}\left(3\ln|x+2| - \ln|x|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|x+2|^3 - \ln|x|\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{(x+2)^3}{x}\right|\right) + K}$$

Problema 4. Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{bmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro *m*. (4 puntos)
b) Explicad cuándo la matriz A es invertible. (2 puntos)
c) Resolved la ecuación $XA=I$ donde *I* es la matriz identidad en el caso *m* = 1. (4 puntos)

a) El rango de A es igual o menor que 3.
¿El rango de A es 3?
Para ello debe ser el determinante de A no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & m\\ 0 & m & 0\\ 2 & 1 & m^2+1\end{vmatrix}=-m\left(m^2+1\right)-2m^2=-m^3-m-2m^2$$

$$|A|=0\Rightarrow -m^3-2m^2-m=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\left(m^2+2m+1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ o\\ m^2+2m+1=0\Rightarrow m=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=-1\end{cases}$$

Para $m\neq 0$ *y* $m\neq -1$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

Estudiamos los dos casos que nos quedan por contemplar:

Si $m=0$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Observamos que la fila 2ª es nula, por lo que consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 2ª y la columna 3ª con determinante $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5\neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

Si $m=-1$ el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 2ª son iguales.

Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 3ª con determinante $\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m\neq 0$ *y* $m\neq -1$ el rango de A es 3. Si *m = 0* o *m = –1* el rango de A es 2.

b) Hemos averiguado cuando el determinante de A se anula, por lo que podemos afirmar que la matriz A es invertible si *m* es distinta de 0 y 1.

c) Para *m = 1* el determinante de A es no nulo y existe la inversa de A, por lo que podemos despejar la matriz X en la ecuación $XA = I$.

$$XA = I \Rightarrow X = I \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Calculamos la inversa de A para *m = 1*.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2-2 = -4 \neq 0 \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}{-4} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/4 \end{pmatrix}}$$

La solución es $X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -5/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Problema 5. Dados el punto $P(1,2,3)$ y el plano $\pi \equiv 3x+2y+z+4=0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π. (2 puntos)

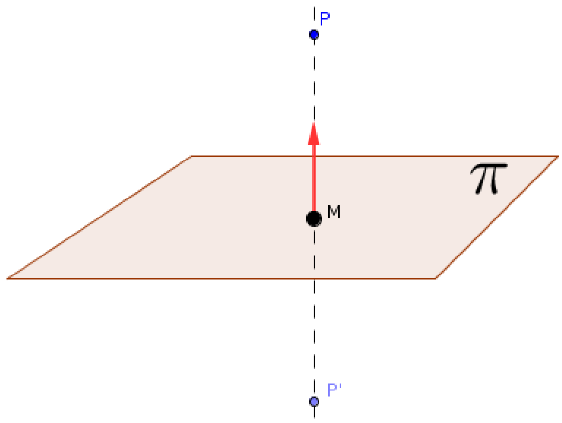
b) Calculad el punto P' que es simétrico del punto P respecto del plano π. (5 puntos)

c) Calculad la ecuación del plano π´ que pasa por P' y es paralelo a π. (3 puntos)

a) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2,3) \\ \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|3+4+3+4|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\ unidades$$

b) Hallamos la recta r perpendicular al plano que pasa por P. Después hallamos el punto M de corte de recta r y plano π. El punto P´ lo obtendremos sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.



La recta perpendicular al plano π tiene como vector director el normal del plano π.

$$\pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(3,2,1) \\ P(1,2,3)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases}$$

El punto de corte de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3+\lambda \end{cases} \\ \pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+9\lambda+4+4\lambda+3+\lambda+4=0 \Rightarrow 14+14\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+3(-1)=-2 \\ y=2+2(-1)=0 \\ z=3-1=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M(-2,0,2)$$

Sumamos al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$

$$\left.\begin{array}{l} M(-2,0,2) \\ \overrightarrow{PM}=(-2,0,2)-(1,2,3)=(-3,-2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{P'=(-2,0,2)+(-3,-2,-1)=(-5,-2,1)}$$

c) El plano π´ que pasa por *P*' y es paralelo a π tiene como vector normal el mismo que el plano π.

$$\pi \equiv 3x+2y+z+4=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P'(-5,-2,1)\in\pi' \\ \vec{n'}=\vec{n}=(3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P'(-5,-2,1)\in\pi' \\ \pi'\equiv 3x+2y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -15-4+1+D=0 \Rightarrow D=18$$

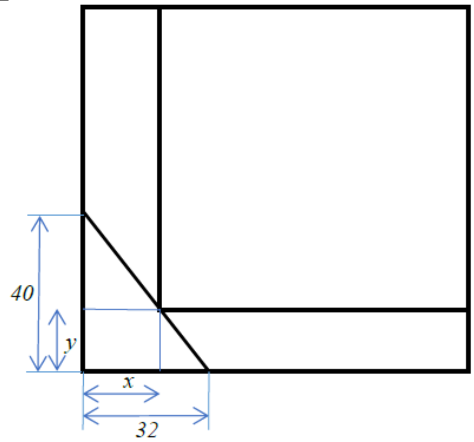
$$\boxed{\pi'\equiv 3x+2y+z+18=0}$$

Problema 6. Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto (x, y) (véase la figura).

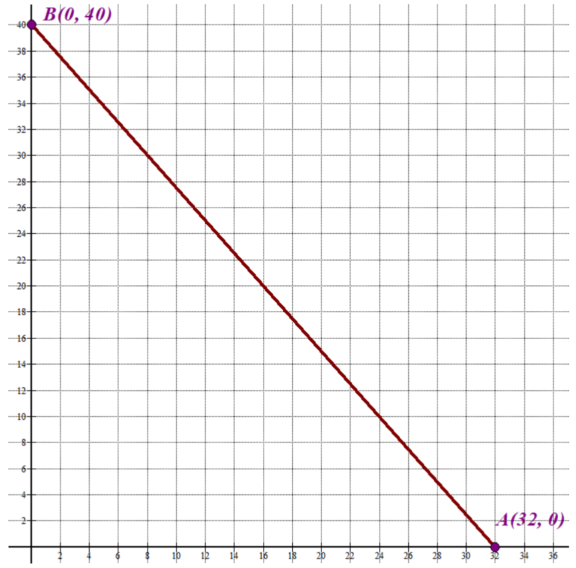
a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida como función de x, cuando $0 \leq x \leq 32$. (4 puntos)

b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima. (4 puntos)

c) Calculad el valor de dicha área máxima. (2 puntos)



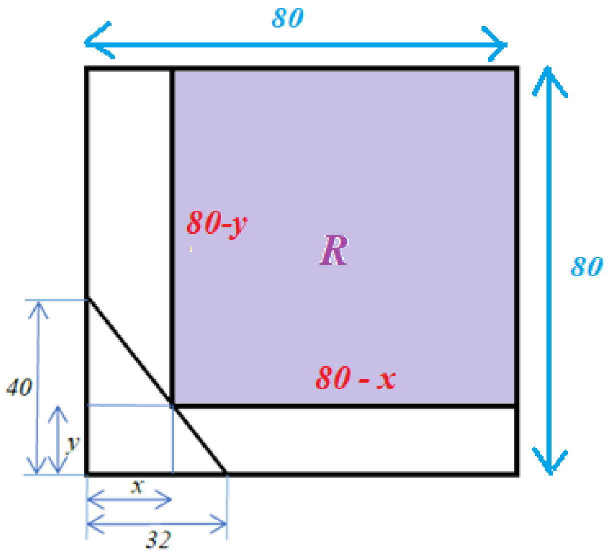
a) Averiguamos la ecuación de la recta que hace de hipotenusa del triángulo de espejo que se ha roto.



$$\left.\begin{array}{l} y = mx + n \\ A(32,0) \in recta \\ B(0,40) \in recta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 32m + n \\ 40 = 0 + n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = 32m + n \\ 40 = n \end{array}\right\} \Rightarrow 32m + 40 = 0 \Rightarrow m = -\frac{40}{32} = -\frac{5}{4}$$

$$y = -\frac{5}{4}x + 40$$

Tenemos la situación que aparece en el dibujo siguiente:



El área del rectángulo R vendrá expresada en función de *x* como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{5}{4}x+40 \\ área(x,y)=f(x,y)=(80-x)(80-y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=(80-x)\left(80-\left(-\dfrac{5}{4}x+40\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(80-x)\left(80+\frac{5}{4}x-40\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=(80-x)\left(40+\frac{5}{4}x\right)=3200+100x-40x-\frac{5}{4}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{4}x^2+60x+3200$$

b) Derivamos e igualamos a cero en busca del máximo del área.

$$f(x)=-\frac{5}{4}x^2+60x+3200 \Rightarrow f'(x)=-\frac{10}{4}x+60$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\frac{10}{4}x+60=0 \Rightarrow -10x+240=0 \Rightarrow x=\frac{240}{10}=24$$

$$f'(x)=-\frac{10}{4}x+60 \Rightarrow f''(x)=-\frac{10}{4} \Rightarrow f''(24)=-\frac{10}{4}<0$$

En $x = 24$ hay un máximo relativo. Será el máximo absoluto pues la expresión del área es una parábola.

Para $x = 24$ tenemos que $y=-\frac{5}{4}24+40=-30+40=10$

Las dimensiones de R que hacen máxima el área son 80 – 24 = 56 cm y 80 – 10 = 70 cm.

c) Como las dimensiones del rectángulo R son 56 cm x 70 cm el área máxima es 70 · 56 = 3920 cm^2.