Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model I

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemátic o no matemátic, segons orrespongui. Es valoraran negativament els errors de cálcul. Es permet utilitzar calculadora científica básica. No es permet l'ús de calculadores gráfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la cárrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} -4x+a & si \;\; x\le -2 \\ x^2-5 & si \;\; -2<x<1 \\ -7x+3 & si \;\; x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)

b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)

b) Per $a = 0$, determinau els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$. (4 punts)

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t) = \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial ($t = 0$) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

6 Considerem la funció $f(x) = \frac{3}{x} + 8$

a) Trobau els punts de la gráfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'área compresa entre la gráfica de la funció $f(x)$ i les rectes $x = 2$, $x = 4$ i $y = 0$. (4 punts)

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

(5 punts)

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 El vaixell de Dénia a Eivissa porta automóbils i camions a la bodega. Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils. Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la càrrega és de 300 000 kg. La companyia cobra 50 euros per cada automóbil i 300 euros per cada camió.

a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)

b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)

c) Calculau el nombre de cotxes i camions que s'han de carregar per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

a) Llamamos "x" al número de automóviles e "y" al número de camiones.
La función objetivo es el ingreso que viene dada por $I(x,y)=50x+300y$.

Las restricciones son:

"*Cada camió ocupa quatre places d'automóbil. La superfície total de la bodega permet situar-hi fins a 200 automóbils*" → $4y+x\le 200$

"*Cada automóvil pesa 1000 kg, i cada camió, 9000 kg. El pes total permés per a la càrrega és de 300 000 kg*" → $1000x+9000y\le 300000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4y+x\le 200 \\ 1000x+9000y\le 300000 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+4y\le 200 \\ x+9y\le 300 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$x+4y=200$

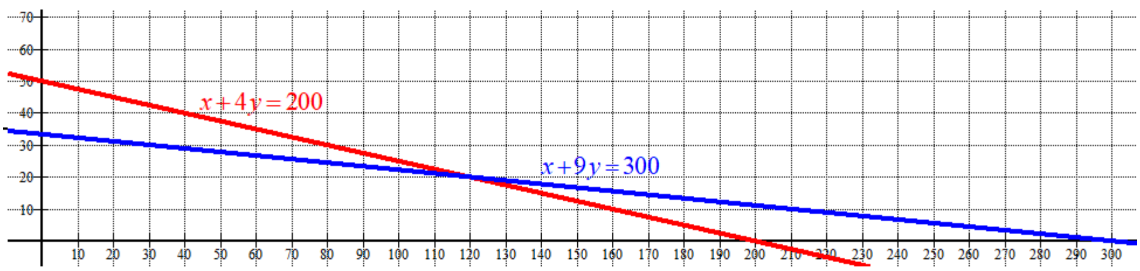
x	$y=\dfrac{200-x}{4}$
120	20
200	0

$x+9y=300$

x	$y=\dfrac{300-x}{9}$
0	300 / 9
120	20

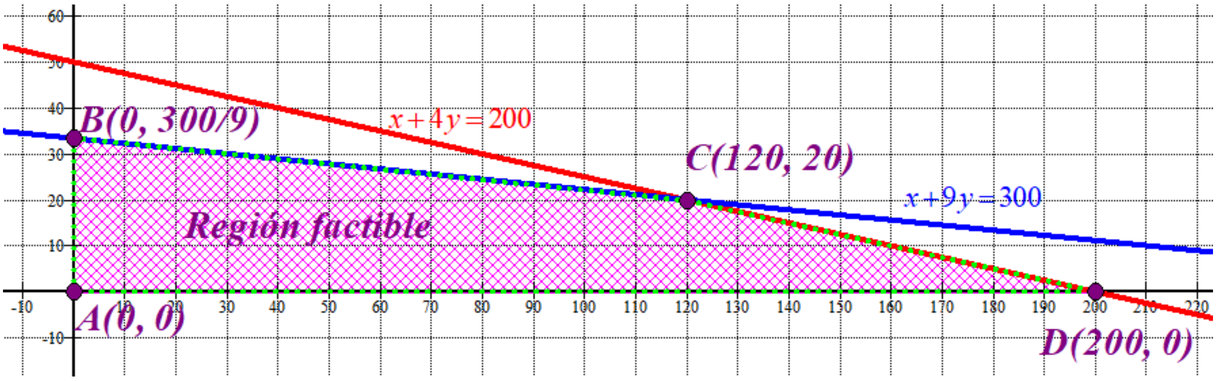
$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{ll} x+4y\le 200 & \rightarrow \text{por debajo} \\ x+9y\le 300 & \rightarrow \text{por debajo} \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 & \rightarrow \text{primer cuadrante} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Coloreamos de rosa dicha región.



Las coordenadas de los vértices son A(0, 0), B(0, 300/9), C(120, 20) y D(200, 0).

c) Valoramos la función beneficio $I(x,y)=50x+300y$ en cada uno de los vértices de la región factible.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 300/9) → $I\left(0,\dfrac{300}{9}\right)=300\dfrac{300}{9}=10000$

C(120, 20) → $I(120,20)=6000+6000=12000$

D(200, 0) → $I(200,0)=10000$

El beneficio máximo se obtiene con 120 coches y 20 camiones. Dicho beneficio máximo es de 12000 €.

2 Donades les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

a) Calculau A^2. (2 punts)

b) Trobau a, b, c tals que $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (8 punts)

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2=\begin{pmatrix} a^2 & a+b & 1 \\ 0 & b^2 & b+c \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=1 \\ c^2=1 \\ a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{1}=\pm 1 \\ b=\sqrt{1}=\pm 1 \\ c=\sqrt{1}=\pm 1 \\ a=-b \\ c=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\ o \\ b=-1 \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

1ª. $a = -1$, $b = 1$ y $c = -1$.

2ª. $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

3 En una botiga de fruita hem comprat pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita, el cost total de les quals és de 68 euros. També observam que si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata.

a) Identificau les variables i interpretau l'enunciat com un conjunt d'equacions lineals. (5 punts)

b) Determinau el nombre de peces de cada fruita que hem comprat. (5 punts)

a) Llamamos "x" el número de manzanas, "y" al número de aguacates y "z" al número de piñas.

"*En arribar a la caixa ens adonam que portam 70 peces de fruita*" → $x+y+z=70$

"*Pomes a 0.5 euros cadascuna, alvocats a 1 euro i pinyes a 1.5 euros la peça. El cost total de les quals és de 68 euros*" → $0.5x+y+1.5z=68$

"*Si les pomes que portam fossin alvocats i els alvocats fossin pomes, la compra ens sortiria 4 euros més barata*" → $0.5y+x+1.5z=68-4$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ 0.5x+y+1.5z=68 \\ 0.5y+x+1.5z=68-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Multiplico por 2} \\ \text{la 2ª y 3ª ecuación} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ y+2x+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=70 \\ x+2y+3z=136 \\ 2x+y+3z=128 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª}} \\ x & +2y & +3z & =136 \\ -x & -y & -z & =-70 \\ \hline 0 & y & +2z & =66 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 2ª}} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª}} \\ 2x & +y & +3z & =128 \\ -2x & -2y & -2z & =-140 \\ \hline 0 & -y & +z & =-12 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 3ª}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ -y+z=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª}} \\ -y & +z & = & -12 \\ y & +2z & = & 66 \\ \hline 0 & 3z & = & 54 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Ecuación 3ª}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ 3z=54 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+2z=66 \\ \boxed{z=\frac{54}{3}=18} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+18=70 \\ y+36=66 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=70-18 \\ \boxed{y=66-36=30} \end{array}\right\} \Rightarrow x+30=52 \Rightarrow \boxed{x=22}$$

Se han comprado 22 manzanas, 30 aguacates y 18 piñas.

4 Considereu la funció definida a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} -4x+a & si \ \ x\le -2 \\ x^2-5 & si \ \ -2<x<1 \\ -7x+3 & si \ \ x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de *a* perqué *f(x)* sigui conínua. (3 punts)
b) És *f(x)* derivable per *a = 1*? (3 punts)
b) Per *a = 0*, determinau els intervals de creixement i decreixement de *f(x)*. (4 punts)

a) Para que la función sea continua en *x = –2* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=-4(-2)+a=8+a \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-} -4x+a=8+a \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} x^2-5=(-2)^2-5=-1 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2) \end{array}\right\}\Rightarrow 8+a=-1\Rightarrow \boxed{a=-9}$$

Para que la función sea continua en *x = –2* debe ser *a = –9.*

¿La función es continua en *x = 1*?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-7(1)+3=-4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2-5=1-5=-4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} -7x+3=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=-4$$

La función es continua en *x = 1.*

b) Para *a = 1* la función no es continua en *x = –2*, por lo que tampoco es derivable en *x = –2.*

Es derivable en cada tramo de definición pues son polinomios.

$$f(x)=\begin{cases} -4x+1 & si \ \ x\le -2 \\ x^2-5 & si \ \ -2<x<1 \\ -7x+3 & si \ \ x\ge 1 \end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -4 & si \ \ x<-2 \\ 2x & si \ \ -2<x<1 \\ -7 & si \ \ x>1 \end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en *x = 1.* Sabemos que es continua, vemos si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2 \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} -7=-7 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=2\neq -7=f'(1^+)$$

La función no es derivable en *x = 1.*

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{-2,1\}$

c) Para $a = 0$ la función es $f(x) = \begin{cases} -4x & si \ \ x \le -2 \\ x^2 - 5 & si \ \ -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & si \ \ x \ge 1 \end{cases}$

Analizamos el crecimiento y decrecimiento por tramos.

En $(-\infty, -2)$ la función es una recta $f(x) = -4x$ con derivada $f\,'(x) = -4 < 0$ por lo que siempre es decreciente en $(-\infty, -2)$.

En $(-2, 1)$ la función es una parábola $f(x) = x^2 - 5$, hallamos su derivada y la igualamos a cero para encontrar su punto crítico.

$$f\,'(x) = 2x$$
$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Dividimos el intervalo $(-2, 1)$ en dos partes: antes de 0 y después de 0.

En $(-2, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1) = -2 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.

En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f\,'(0.5) = 1 > 0$. La función crece en $(0, 1)$.

En $(1, +\infty)$ la función es una recta $f(x) = -7x + 3$ con derivada $f\,'(x) = -7 < 0$ por lo que siempre es decreciente en $(1, +\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

Como en $x = -2$ la función se acerca por la izquierda decreciendo y alcanzando el valor 8 y en $x = -2$ la función vale $(-2)^2 - 5 = -1$ que es menor que 8, entonces también decrece en $x = -2$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ y crece en $(0, 1)$.

5 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve determinat per la funció

$$P(t)=\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1},$$

on $t \geq 0$ mesura el nombre d'anys transcorreguts.

a) Quina és la població inicial ($t = 0$) i la població després de 5 anys? (2 punts)

b) A partir de quin moment la població será inferior a un milió d'individus? (4 punts)

c) Amb el pas dels anys, cap a quin valor tendirá el nombre d'individus de la població? (4 punts)

a) $P(0)=\frac{2+0+0^2}{0^2+0+1}=2$.

La población inicial es de dos millones de individuos.

$$P(5)=\frac{2+5+5^2}{5^2+10+1}=\frac{32}{36}\simeq 0.888888.$$

A los 5 años la población es aproximadamente de 888.888 individuos.

b) $P(t)<1 \Rightarrow \frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}<1 \Rightarrow \left.\begin{cases} t^2+2t+1>0 \\ siendo\ t\geq 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow 2+t+t^2<t^2+2t+1 \Rightarrow 1<t$

A partir del año 1.

Lo comprobamos → $P(1)=\frac{2+1+1^2}{1^2+2+1}=1;\quad P(2)=\frac{2+2+2^2}{2^2+4+1}=\frac{8}{9}\simeq 0.888888$

c) Calculamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{2+t+t^2}{t^2+2t+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{t}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}{\frac{t^2}{t^2}+\frac{2t}{t^2}+\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t}+1}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}+1}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La población tiende a ser un millón de individuos con el paso de los años.

6 Considerem la funció $f(x)=\frac{3}{x}+8$

a) Trobau els punts de la gráfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x+4y+5=0$. (4 punts)

b) Calculau les equacions de les rectes tangents als punts trobats a l'apartat anterior. (2 punts)

c) Calculau l'área compresa entre la gráfica de la funció *f(x)* i les rectes $x=2$, $x=4$ i $y=0$. (4 punts)

a) Averiguamos la pendiente de la recta $3x+4y+5=0$.

$$3x+4y+5=0 \Rightarrow 4y=-3x-5 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{3}{4}}$$

La recta tiene pendiente $-\frac{3}{4}$. Averiguamos cuando la recta tangente a la gráfica de la función tiene esa pendiente, es decir, cuando la derivada de la función vale $-\frac{3}{4}$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{3}{x}+8 \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{x^2} \\ f'(x)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{x^2}=-\frac{3}{4} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Como $f(-2)=\frac{3}{-2}+8=6.5$ uno de los puntos tiene coordenadas (–2, 6.5).

Como $f(2)=\frac{3}{2}+8=9.5$ otro de los puntos tiene coordenadas (2, 9.5).

b) La ecuación de la recta tangente en *x = –2* es $y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2))$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(-2)=f'(-2)(x-(-2)) \\ f(-2)=6.5 \\ f'(-2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-6.5=-\frac{3}{4}(x+2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+6.5-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+5}$$

La ecuación de la recta tangente en *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{r} y-f(2)=f'(2)(x-2) \\ f(2)=9.5 \\ f'(2)=-\frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow y-9.5=-\frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+9.5+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{3}{4}x+11}$$

c) Comprobamos si la función corta a la recta *y = 0* entre *x = 2* y *x = 4*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{3}{x}+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{x}+8=0 \Rightarrow \frac{3}{x}=-8 \Rightarrow x=-\frac{3}{8}$$

Este valor no está comprendido entre $x = 2$ y $x = 4$ por lo que el área de la región pedida es la integral definida entre $x = 2$ y $x = 4$ de la función $f(x)=\dfrac{3}{x}+8$.

$$Área=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 \frac{3}{x}+8dx=\Big[3\ln|x|+8x\Big]_2^4=$$

$$=\Big[3\ln|4|+32\Big]-\Big[3\ln|2|+16\Big]=3\ln|4|-3\ln|2|+16\approx \boxed{18.08\,u^2}$$

7 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Calculau un interval de confiança del 95% per estimar l'edat mitjana de la població. (5 punts)

b) Calculau la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana d'aquesta població amb un nivell de confiança del 92%, l'error com és sigui inferior a 0.5 anys.

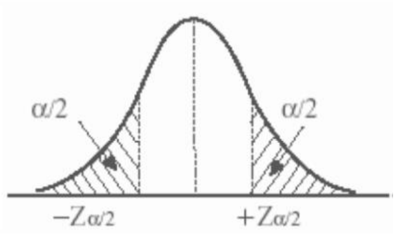
(5 punts)

a) X = N(μ, 2)

$\bar{x} = 17.4$ n = 256

Con un nivel de confianza del 95 %

1 – α = 0,95 → α = 0,05 → α /2 = 0'025 →1 – α /2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ = **1,96**



	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9750
2.0	[illegible]	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

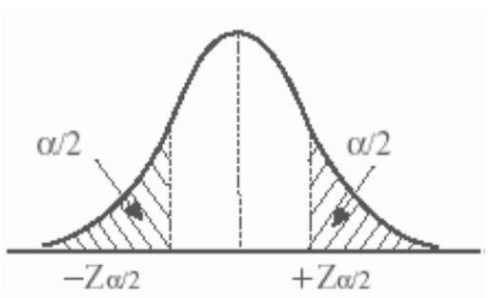
El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245) = (17.155, 17.645)$$

A. ¿n?

Con un nivel de confianza del 92 %

1 – α = 0,92 → α = 0,08 → α /2 = 0'04 →1 – α /2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ = **1.75**



	0	1	2	3	4	5
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]
1.7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9599
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678

El error debe ser 0.5.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.5 = 1.75 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{0.5}{1.75} = \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \cdot 1.75}{0.5} \Rightarrow n = \left(\frac{2 \cdot 1.75}{0.5}\right)^2 = 49$$

Como *n* debe ser entero y superior al “*n*” hallado el tamaño mínimo es de 50 individuos.

8 En una determinada població resideixen 5000 persones en el centre i 10000 a la periféria. Se sap que el 95% dels residents en el centre i que el 20% dels que viuen a la periféria opina que l'ajuntament hauria de restringir l'accés de vehicles privats al centre urbá. Es tria a l'atzar un resident de la població.

a) Quina és la probabilitat que estigui a favor de restringir l'accés de vehicles privats al centre de la ciutat? (3 punts)

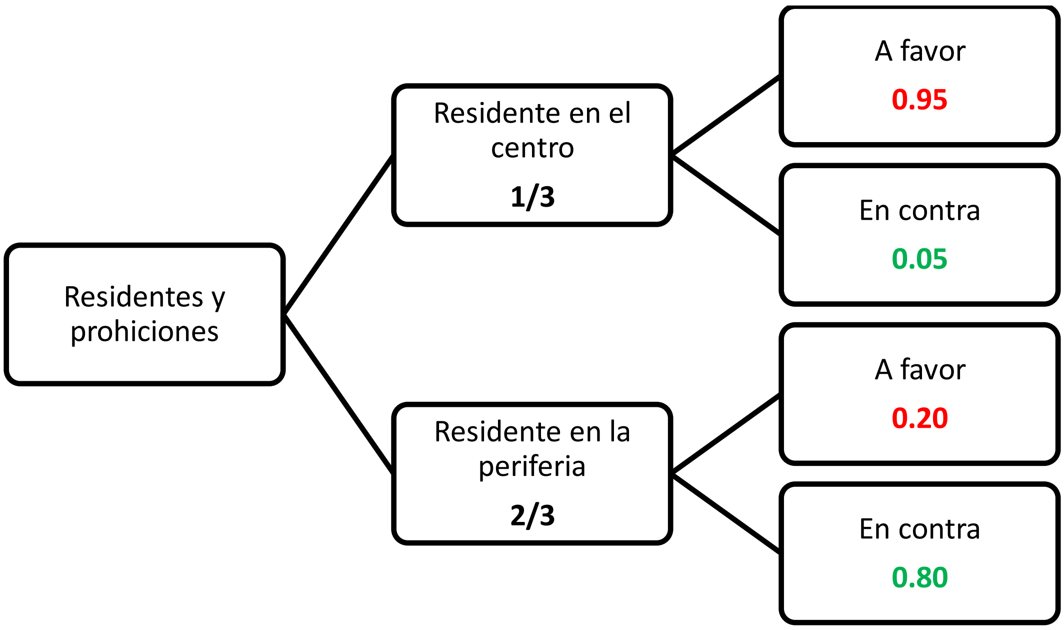
b) Quina és la probabilitat que resideixi en el centre i estigui a favor de la restricció d'accés?

(3 punts)

c) Si la persona triada opina que s'hauria de restringir l'accés, quina és la probabilitat que resideixi en el centre de la ciutat? (4 punts)

Llamamos A = Residente en el centro, B = Residente en la periferia.
C = Favorable a prohibir el acceso al centro con vehículo privado.

$$P(A)=\frac{5000}{15000}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{10000}{15000}=\frac{2}{3}$$



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(A)P(C/A)+P(B)P(C/B)=\frac{1}{3}\cdot 0.95+\frac{2}{3}\cdot 0.20=\boxed{\frac{9}{20}=0.45}$$

b) $P(A\cap C)=P(A)P(C/A)=\frac{1}{3}\cdot 0.95=\boxed{\frac{19}{60}\simeq 0.317}$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}}=\boxed{\frac{19}{27}\simeq 0.704}$$