Universitat de les Illes Balears

Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model III

Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre les vuit proposades. Disposau de 90 minuts. Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total de punts obtinguts entre 4. Només es tindran en compte les respostes clarament justificades i raonades usant llenguatge matemátic o no matemátic, segons orrespongui. Es valoraran negativament els errors de cálcul. Es permet utilitzar calculadora científica básica. No es permet l'ús de calculadores gráfiques ni programables, ni de dispositius amb accés a Internet o aparells que puguin transmetre o emmagatzemar informació.

1 Donat el sistema d'equacions en funció del parámetre a:

$$\begin{aligned} x+y+z&=5\\ 5x+ay-z&=11\\ 3x-y+az&=2. \end{aligned}$$

a) Discutiu per a quins valors de *a* el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)
b) Trobau la solució del sistema per *a = 2*. (4 punts)

2 Un ajuntament concedeix llicéncies per a la construcció d'una urbanització de, com a máxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital máxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.
a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)
c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici máxim. Determinau també aquest benefici máxim. (2 punts)

3 Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix} k & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3k\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2\\ k & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes M · N i M^2. En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)
b) Estudiau per a quins valors de k és M · N invertible. (3 punts)
c) Calculau la inversa de M · N per a *k = 1*. (2 punts)
d) Per a *k = 1*, trobau la matriu X que compleix $(M\cdot N)\cdot X=B$, on $B=\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4 Donada la funció $f(x)=ax^3+bx^2+x$, definida per a tot $x\in\mathbb{R}$.
a) Trobau *a* i *b* sabent que *f(x)* té un punt crític en el punt *x = 1* i la seva gráfica passa pel punt (3, 0). (5 punts)
b) Estudiau el creixement i decreixement de *f(x)* per *a = 3* i *b = 3*. (5 punts)

5 El benefici B(x), en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad per\ a\ x \geq 0\ .$$

a) Calculau el benefici de vendrén 110 unitats. (1 punt)
b) Representau gráficament la funció. (3 punts)
c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui máxim? Quin és aquest benefici máxim? (3 punts)
d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & si \quad x < 0 \\ e^{ax} + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perqué *f* sigui contínua i derivable. (5 punts)
b) Per a *a = 4* calculau l'área compresa entre la gráfica de *f(x)* i les rectes *x = 1*, *x = 2* i *y = 0*. (5 punts)

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:
a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)
b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)
c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A \cap B) = 0.1 \quad p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.6 \qquad P(A/B) = 0.5\ ,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.
a) Calculau p(B). (3 punts)
b) Calculau $p(A \cup B)$. (3 punts)
c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

1 Donat el sistema d'equacions en funció del parámetre a:

$$x+y+z=5$$
$$5x+ay-z=11$$
$$3x-y+az=2.$$

a) Discutiu per a quins valors de *a* el sistema té solució i quantes en té en cada cas. (6 punts)
b) Trobau la solució del sistema per *a = 2*. (4 punts)

a)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & a & -1\\ 3 & -1 & a\end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & a & -1 & 11\\ 3 & -1 & a & 2\end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & a & -1\\ 3 & -1 & a\end{vmatrix}=a^2-3-5-3a-5a-1=a^2-8a-9$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2-8a-9=0\Rightarrow a=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(-9)}}{2}=\frac{8\pm10}{2}=\begin{cases}\dfrac{8-10}{2}=-1\\ \dfrac{8+10}{2}=9\end{cases}$$

Analizamos tres situaciones distintas.

CASO 1. $a\neq-1\ y\ a\neq9$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

CASO 2. $a=-1$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & -1 & -1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Se observa que la columna 2ª y 3ª son iguales. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la fila 1ª y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix}5 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5+3=-2\neq0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 5\\ 5 & -1 & -1 & 11\\ 3 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, Comprobamos si tiene rango 3, tomando el menor que resulta de quitar la columna 2ª (= columna 3ª).

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2+33-25+15-10+11 = -37+59 = 22 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

CASO 3. $a=9$

La matriz A tiene determinante nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$. La matriz A tiene rango 2 pues el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª tiene determinante no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = 9-5 = 4 \neq 0$.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & 9 & -1 & 11 \\ 3 & -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, Comprobamos si tiene rango 3, tomando el menor que resulta de quitar la columna 1ª.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 9 & -1 & 11 \\ -1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -2-11+405-5-18-99 = 270 \neq 0$$

El rango de A/B es 3 y el rango de A es 2. Al ser distintos el sistema no tiene solución.

Resumiendo: Si $a \neq -1$ *y* $a \neq 9$ el sistema tiene una única solución, si $a=9$ o $a=-1$ el sistema no tiene solución.

b) Para $a = 2$ estamos en el caso 1 y el sistema tiene una única solución.

La determinamos usando el método de Cramer.

Para $a = 2$ la matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

con determinante $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4-3-5-6-10-1 = 4-25 = -21$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20-2-11-4-22-5}{-21} = \frac{8}{7}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 5 & 11 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{22-15+10-33-50+2}{-21}=\frac{64}{21}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 5 & 2 & 11\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 5 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{4+33-25-30-10+11}{-21}=\frac{17}{21}$$

La solución es $x=\frac{8}{7};\ y=\frac{64}{21};\ z=\frac{17}{21}$

2 Un ajuntament concedeix llicéncies per a la construcció d'una urbanització de, com a máxim, 120 habitatges, de dos tipus, A i B. Per això l'empresa constructora disposa d'un capital màxim de 15 milions d'euros, essent el cost de construcció de l'habitatge de tipus A de 100000 euros i el de tipus B de 300000 euros. El benefici obtingut per la venda d'un habitatge de tipus A és de 20000 euros i per la venda d'un de tipus B és de 40000 euros.
a) Plantejau la maximització del benefici de la companyia com un problema de programació lineal. (4 punts)
b) Dibuixau la regió factible per a la solució, indicant les rectes i vértexs que la delimiten. (4 punts)
c) Calculau el nombre d'habitatges de cada tipus que s'han de construir per tal d'obtenir un benefici màxim. Determinau també aquest benefici màxim. (2 punts)

a) Llamamos x = número de viviendas tipo A e y = número de viviendas tipo B.

La función a maximizar es el beneficio que dado que se obtiene un beneficio de 20000 € por cada vivienda tipo A y 40000 € por cada vivienda tipo B su expresión será:

$$B(x,y)=20000x+40000y$$

Esta función está sometida a restricciones que establecemos como un sistema de inecuaciones.

"*La urbanización a construir tendrá como máximo de 120 viviendas*" → $x+y\le 120$
"*El coste de construir una vivienda tipo A es de 100000 € y 300000 € la de tipo B y la empresa solo dispone de 15000000 €*" → $100000x+300000y\le 15000000 \Rightarrow x+3y\le 150$
El número de viviendas debe ser positivo → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos todas estas inecuaciones en un sistema cuya solución es una región del plano que llamamos región factible.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ x+3y\le 150 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

b) Empezamos dibujando la región factible y para ello primero dibujamos las rectas que delimitan dicha región.

$x+y=120$

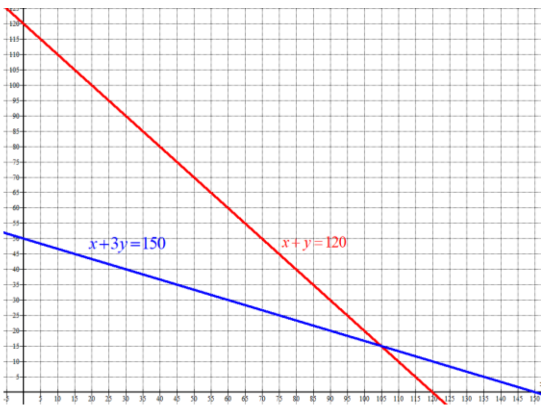
x	$y=120-x$
0	120
105	15
120	0

$x+3y=150$

x	$y=\frac{150-x}{3}$
0	50
105	15
150	0

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

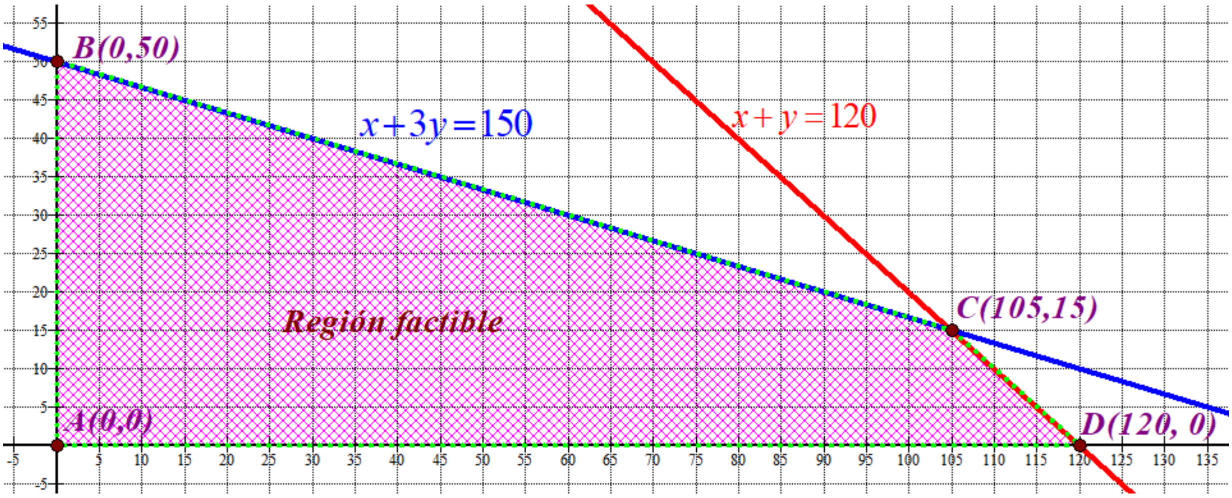
Primer cuadrante



La región factible es la región del primer cuadrante que cumple las inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 120 \\ x+3y\leq 150 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

, por lo tanto es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del punto C se obtienen de resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=120 \\ x+3y=150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=120-y \\ x=150-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 120-y=150-3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=30 \Rightarrow y=15 \Rightarrow x=120-15=105 \Rightarrow C(105,15)$$

c) Para obtener el máximo beneficio valoramos la función $B(x,y)=20000x+40000y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 50) → $B(0,50)=0+2000000=2000.000$

C(105, 15) → $B(105,15)=2.100.000+600.000=2.700.000$

D(120, 0) → $B(120,0)=2.400.000+0=2.400.000$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice C(105, 15). Significa que construyendo 105 viviendas del tipo A y 15 del tipo B se consiguen unos beneficios máximos de 2.700.000 €.

3 Considerau les següents matrius:

$$M=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Raonau si és possible calcular els productes M · N i M². En el cas que ho sigui, calculau-los. (2 punts)

b) Estudiau per a quins valors de k és M · N invertible. (3 punts)

c) Calculau la inversa de M · N per a *k = 1*. (2 punts)

d) Per a *k = 1*, trobau la matriu X que compleix $(M\cdot N)\cdot X=B$, on $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$$\underset{2\times\boxed{3\cdot 3}\times 2}{M\cdot N}\xrightarrow{\quad}\underset{2\times 2}{=Otra\ matriz}$$

Si es posible pues el número de columnas de M es igual al número de filas de N y se obtiene una matriz cuadrada de orden 2.

$$\underset{2\times\boxed{3\cdot 2}\times 3}{M^2=M\cdot M}$$

No es posible pues la matriz M no es cuadrada y no coinciden su número de filas con el número de columnas.

Calculamos *M · N*.

$$M\cdot N=\begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ k & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+k+0 & 2k-1+0 \\ 0-k-6k & 4+1+9k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{pmatrix}$$

b)

Para que $M\cdot N$ sea invertible su determinante debe ser no nulo.
Averiguamos cuando se anula.

$$|M\cdot N|=\begin{vmatrix} k & 2k-1 \\ -7k & 9k+5 \end{vmatrix}=k(9k+5)+7k(2k-1)=9k^2+5k+14k^2-7k=23k^2-2k$$

$$|M\cdot N|=0\Rightarrow 23k^2-2k=0\Rightarrow k(23k-2)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k=0}\\ o\\ 23k-2=0\rightarrow\boxed{k=\dfrac{2}{23}}\end{cases}$$

Para los valores $k=\dfrac{2}{23}$ o $k=0$ no existe la inversa de $M\cdot N$.

Existe la inversa para cualquier valor de $k\neq\dfrac{2}{23}$ y $k\neq 0$

c) Para $k = 1$ la matriz $M \cdot N$ queda $M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$. Calculamos su inversa.

$$(M \cdot N)^{-1} = \frac{Adj\left((M \cdot N)^T\right)}{|M \cdot N|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -7 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 14 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}{21} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

d) Para $k = 1$ la matriz $M \cdot N$ tiene inversa → $(M \cdot N)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}$

Lo utilizamos para despejar en la ecuación matricial.

$$(M \cdot N) \cdot X = B \Rightarrow X = (M \cdot N)^{-1} B$$

$$X = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/21 \\ 1/3 & 1/21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/21 \\ 2/3 & 1/21 \end{pmatrix}$$

4 Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x$, definida per a tot $x \in \mathbb{R}$.
a) Trobau *a* i *b* sabent que *f(x)* té un punt crític en el punt *x = 1* i la seva gráfica passa pel punt (3, 0). (5 punts)
b) Estudiau el creixement i decreixement de *f(x)* per *a = 3* i *b = 3*. (5 punts)

a) Si la función tiene un punto crítico en *x = 1* significa que *f ´(1) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + bx^2 + x \Rightarrow f´(x) = 3ax^2 + 2bx + 1 \\ f´(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + 1 \Rightarrow \boxed{0 = 3a + 2b + 1}$$

Además pasa por el punto (3, 0) que significa que *f(3) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + bx^2 + x \\ f(3) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + 3 \Rightarrow 27a + 9b + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{9a + 3b + 1 = 0}$$

Resolvemos el sistema que forman las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{r} 3a + 2b + 1 = 0 \\ 9a + 3b + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -9a - 6b - 3 = 0 \\ 9a + 3b + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$-3b - 2 = 0 \Rightarrow -3b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{2}{3}} \Rightarrow 3a + 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a - \frac{4}{3} + 1 = 0 \Rightarrow 9a - 4 + 3 = 0 \Rightarrow 9a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{9}}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{9}$ y $b = -\frac{2}{3}$

b) Para *a = b = 3* la función queda $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$.
Vemos como cambia el signo de la derivada.

$$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + x \Rightarrow f´(x) = 9x^2 + 6x + 1$$

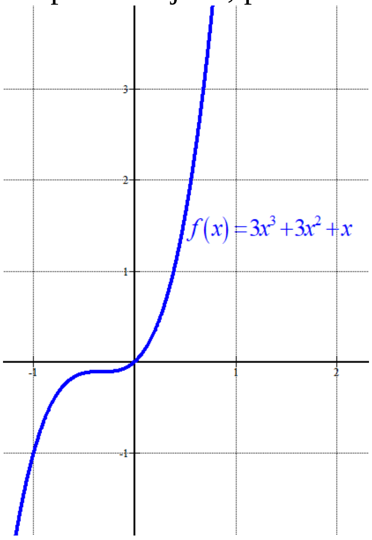
$$f´(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

Estudiamos que pasa antes y después de $x = -\frac{1}{3}$.

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ tomo *x = –5* y la derivada vale $f´(-5) = 9(-5)^2 + 6(-5) + 1 = 196 > 0$.
  La función crece en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$
- En $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ tomo *x =0* y la derivada vale $f´(0) = 1 > 0$. La función crece en $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

La función crece en todo momento. Es creciente en $\mathbb{R}$.

No pide dibujarla, pero lo hago para comprobar la bondad de la solución.



En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

5 El benefici B(x), en euros, que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte es representa per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad per\ a\ x \geq 0 .$$

a) Calculau el benefici de vendrén 110 unitats. (1 punt)
b) Representau gráficament la funció. (3 punts)
c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui máxim? Quin és aquest benefici máxim? (3 punts)
d) Quantes unitats ha de vendre per tenir un benefici igual a 3900 euros? I per tenir un benefici superior a 3900 euros? (3 punts)

a) Nos piden B(110).

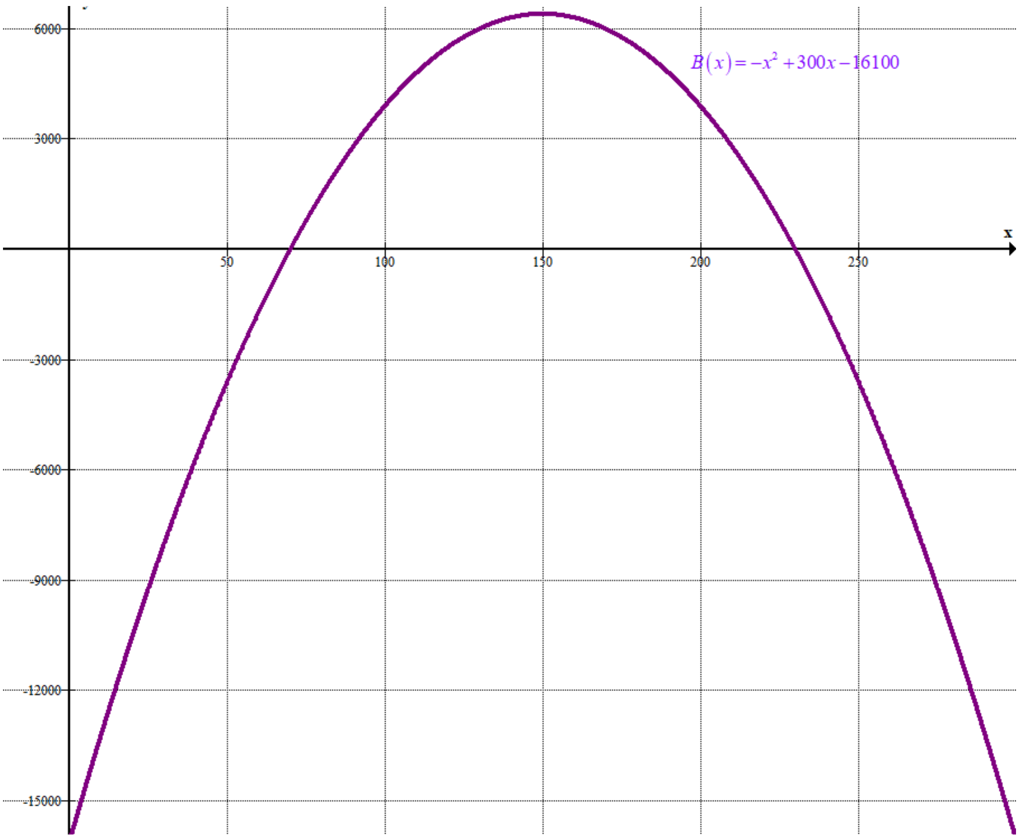
$$B(110) = -110^2 + 300 \cdot 110 - 16100 = \boxed{4800\ €}$$

b) Es una parábola, obtenemos el vértice y una tabla de valores.

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \Rightarrow B'(x) = -2x + 300$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 300 = 0 \Rightarrow 2x = 300 \Rightarrow x = 150$$

El vértice está en $x = 150$.

x	$y = -x^2 + 300x - 16100$
0	-16100
100	3900
150	6400
200	3900
300	-16100



c) El beneficio máximo se aprecia en la gráfica de la función que se produce en el vértice de la parábola. Está situada en *x = 150*.
Con la venta de 150 unidades se obtiene un beneficio máximo de 6400 €.

$$B(150) = -150^2 + 300 \cdot 150 - 16100 = \boxed{6400\text{ €}}$$

d) ¿Cuál es el valor de x para que B(x) = 3900?

$$B(x) = 3900 \Rightarrow -x^2 + 300x - 16100 = 3900 \Rightarrow -x^2 + 300x - 20000 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-300 \pm \sqrt{300^2 - 4(-1)(-20000)}}{-2} = \frac{-300 \pm 100}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-300-100}{-2} = 200 \\ \dfrac{-300+100}{-2} = 100 \end{cases}$$

Un beneficio de 3900 euros se consigue con 100 unidades y con 200 unidades.
Un beneficio superior a 3900 € se consigue con la producción entre 100 y 200 unidades, atendiendo a la información que nos ofrece la gráfica

6 Considerem la funció a trossos següent

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ e^{ax}+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

a) Calculau els valors de a perqué *f* sigui contínua i derivable. (5 punts)

b) Per a *a = 4* calculau l'área compresa entre la gráfica de *f(x)* i les rectes *x = 1*, *x = 2* i *y = 0*. (5 punts)

a) Para que sea continua en *x = 0* debe de cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2-3x+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{ax}+1=e^0+1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

Es continua, independientemente del valor de *a*.

La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$ es $f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad x<0 \\ ae^{ax} & si \quad x>0 \end{cases}$

Para que sea derivable en *x = 0* deben ser iguales las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=2\cdot 0-3=-3 \\ f'(0^+)=a\cdot e^{a\cdot 0}=a \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{-3=a}$$

Para que sea derivable en *x = 0* debe ser *a = –3*.

b) Para *a = 4* la función es $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & si \quad x<0 \\ e^{4x}+1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Cuando $x\in[1,2]$ la función es $f(x)=e^{4x}+1$.

Buscamos los puntos de corte de la función y la recta *y = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=e^{4x}+1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{4x}+1=0 \Rightarrow e^{4x}=-1 \text{ ¡No es posible!}$$

La función exponencial nunca se anula.

El área del recinto es la integral definida entre 1 y 2 de $f(x)=e^{4x}+1$.

$$Área=\int_1^2 e^{4x}+1dx=\left[\frac{e^{4x}}{4}+x\right]_1^2=\left[\frac{e^{4\cdot 2}}{4}+2\right]-\left[\frac{e^4}{4}+1\right]=\frac{e^8}{4}-\frac{e^4}{4}+1=\boxed{\frac{e^8-e^4}{4}+1\simeq 732.58\,u^2}$$

7 El pes de les persones d'un col·legi major segueix una llei normal de mitjana 70 kg i desviació típica 15 kg. Si escollim a l'atzar una persona del col·legi, calculau la probabilitat dels següents esdeveniments:

a) El seu pes sigui superior a 80 kg. (3 punts)

b) El seu pes sigui inferior a 50 kg. (3 punts)

c) Pesi entre 60 i 120 kg. (4 punts)

X = Peso de una persona de un colegio mayor.

X = N(70, 15)

a)

$$P(X>80)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{80-70}{15}\right)=P(Z>0.67)=1-P(Z\leq 0.67)=$$

$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.7486=\boxed{0.2514}$$

b)

$$P(X<50)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{50-70}{15}\right)=P(Z<-1.33)=P(Z\geq 1.33)=$$

$$1-P(Z<1.33)=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=1-0.9082=\boxed{0.0918}$$

c)

$$P(60<X<120)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{60-70}{15}<Z<\frac{120-70}{15}\right)=P(-0.67<Z<3.33)=$$

$$=P(Z<3.33)-P(Z<-0.67)=P(Z<3.33)-P(Z>0.67)=P(Z<3.33)-\left[1-P(Z\leq 0.67)\right]=$$

$$=\{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\}=0.9996-[1-0.7486]=\boxed{0.7482}$$

8 De dos esdeveniments d'un mateix espai mostral se sap que

$$p(A\cap B)=0.1 \quad p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.6 \qquad P(A/B)=0.5,$$

$\overline{A}$ i $\overline{B}$ denoten els esdeveniments complementaris de A i B respectivament.

a) Calculau p(B). (3 punts)

b) Calculau $p(A\cup B)$. (3 punts)

c) Són els esdeveniments A i B independents? Raonau la resposta. (4 punts)

a) Como $P(A/B)=0.5$ entonces:

$$\left.\begin{array}{l} P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \\ P(A/B)=0.5 \\ P(A\cap B)=0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=\frac{0.1}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.1}{0.5}=0.2}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B) \\ P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=0.6 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.6=1-P(A\cup B) \Rightarrow \boxed{P(A\cup B)=0.4}$$

c) Nos falta conocer el valor de P(A).

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0.4=P(A)+0.2-0.1 \Rightarrow P(A)=0.4-0.1=0.3$$

Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.
Calculamos el valor de cada miembro de la igualdad y vemos si son iguales.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.1 \\ P(A)P(B)=0.2\cdot 0.3=0.06 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

Los sucesos *A* y *B* son dependientes.