Evaluación para el Acceso a la Universidad

Convocatoria de 2021

Materia:

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

2. En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x+3+t & si \;\; x<1 \\ 3 & si \;\; x=1 \\ (x-3)^2+t & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^2+bx+c$ tiene un máximo en (0, –3) y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica σ = 60 gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

4. De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x<0\\ t & si\ x=0\\ (x-2)^2 & si\ x>0\end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

4. En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función: $P(t)=-40t^2+240t+540$, con $t = semanas\ y\ (1\le t\le 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)
b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)
c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -1/2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}-6 & 3\end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot C+D^T$. (0.5 puntos9

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D \cdot C$ y $D^T \cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)

6. En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2

5. Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8% de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además, una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

6. Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =15 cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una carpintería ofrece tres modelos de mesas cuyo precio varía en función del tipo de madera utilizada y lo clasifica en: gama baja, media y superior. El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas. Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior y por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada modelo de mesa. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos "x" al precio de la mesa de gama baja, "y" al precio de la mesa de gama media y "z" al precio de la mesa de gama superior.

"*El precio de la mesa de gama superior es el mismo que de las otras dos juntas*" → $z = x + y$

"*Vendiendo 50 mesas de precio medio se obtiene el mismo dinero que con 30 de la superior*" → $50y = 30z$

"*Por la venta de 5 mesas de gama baja, 5 de media y 10 de precio superior se obtienen 7500 euros*" → $5x + 5y + 10z = 7500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{aligned} z = x + y \\ 50y = 30z \\ 5x + 5y + 10z = 7500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{aligned}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} z = x + y \\ 5y = 3z \\ x + y + 2z = 1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5y = 3(x + y) \\ x + y + 2(x + y) = 1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 5y = 3x + 3y \\ x + y + 2x + 2y = 1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y = 3x \\ 3x + 3y = 1500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y = 3x \\ x + y = 500 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2y = 3x \\ x = 500 - y \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2y = 3(500 - y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 1500 - 3y \Rightarrow 5y = 1500 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1500}{5} = 300} \Rightarrow \boxed{x = 500 - 300 = 200} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 200 + 300 = 500}$$

Los precios de las mesas son 200 € la de gama baja, 300 € la de gama media y 500 € la de gama superior.

2. En un terreno se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos. Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas. Por cada hectárea sembrada de aguacates y mangos se obtiene 10000 y 12000 euros respectivamente. Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1 punto)

c) Determina cuántas hectáreas de cada tipo se debe dedicar a cada producto para conseguir máximo beneficio. (0.25 puntos)

a) Llamamos "x" a las hectáreas dedicadas al aguacate e "y" a las hectáreas dedicadas al mango.

Se desea maximizar la ganancia $G(x,y)=10000x+12000y$

b)

"*Se dispone de 18 hectáreas para sembrar aguacates y mangos*" → $x+y\leq 18$

"*Para los aguacates deseamos destinar como mucho 16 hectáreas*" → $x\leq 16$

"*Se quiere que la superficie correspondiente a los mangos no sea mayor que la que ocupen los aguacates*" → $y\leq x$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

El sistema de inecuaciones queda:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 18 \\ x\leq 16 \\ y\leq x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema y que delimitan la región factible.

$x+y=18$

x	$y=18-x$
2	16
9	9

$x=16$

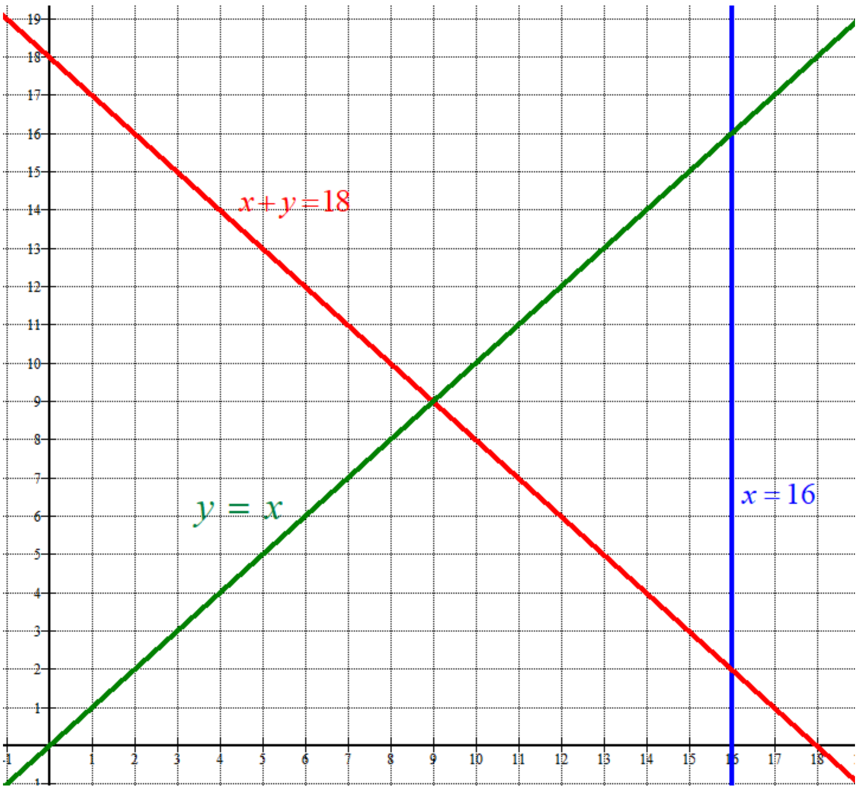
x	y
16	0
16	2

$y=x$

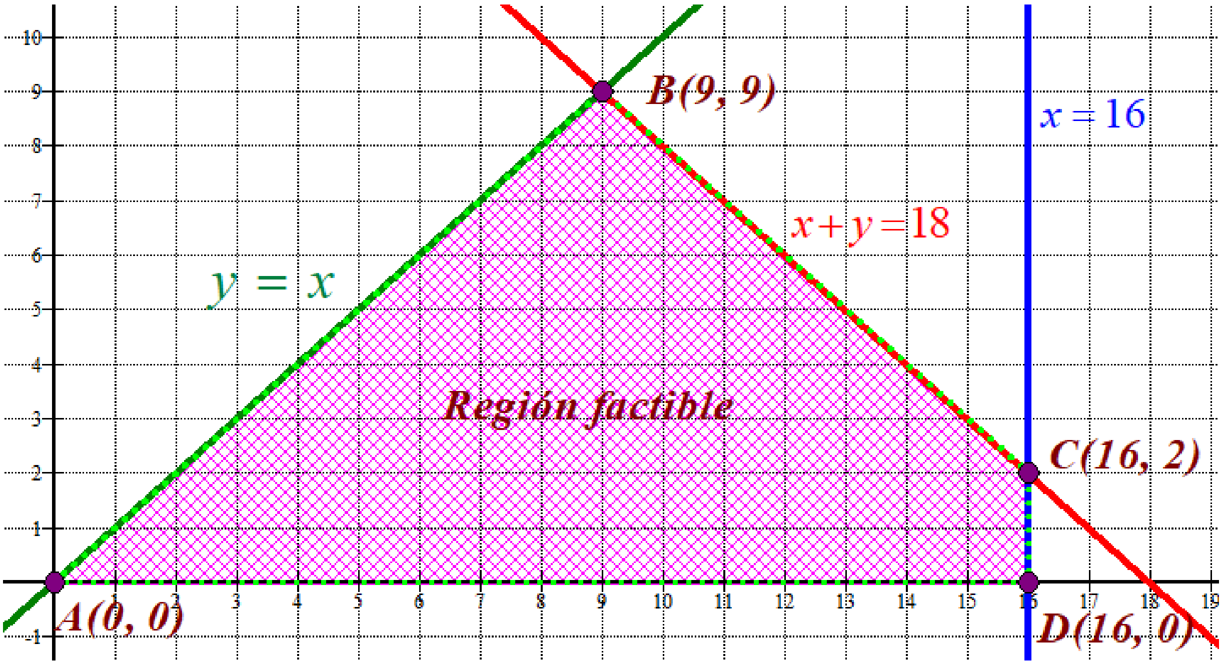
x	$y=x$
0	0
9	9

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\leq 18 \\ x\leq 16 \\ y\leq x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja y verde y a la izquierda de la recta azul.
Coloreo de rosa esta región del plano que cumple las inecuaciones.



c) Valoramos la función objetivo $G(x,y)=10000x+12000y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $G(0,0)=0$ €

B(9, 9) → $G(9,9)=90000+108000=198000$ €

C(16, 2) → $G(16,2)=160000+24000=184000$ €

D(16, 0) → $G(16,0)=160000$ €

El máximo valor de la función objetivo se obtiene en el vértice B(9, 9).

Hay que plantar 9 hectáreas de aguacate y otras 9 de mangos para obtener un beneficio máximo, siendo este de 198.000 €

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+3+t & si \;\; x<1 \\ 3 & si \;\; x=1 \\ (x-3)^2+t & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 puntos)

b) Para *t = 0*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para *t = 0*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

a) La función es continua en *x = 1* cuando cumple que $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=3 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+3+t=4+t \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} (x-3)^2+t=4+t \\ f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 3=4+t \Rightarrow \boxed{t=-1}$$

La función es continua para *t = –1*.

b) Para *t = 0* la función queda $f(x)=\begin{cases} x+3 & si \;\; x<1 \\ 3 & si \;\; x=1 \\ (x-3)^2 & si \;\; x>1 \end{cases}$.

En $(1,+\infty)$ la función es una parábola $f(x)=(x-3)^2$

Averiguamos su vértice para obtener el extremo relativo de la función.

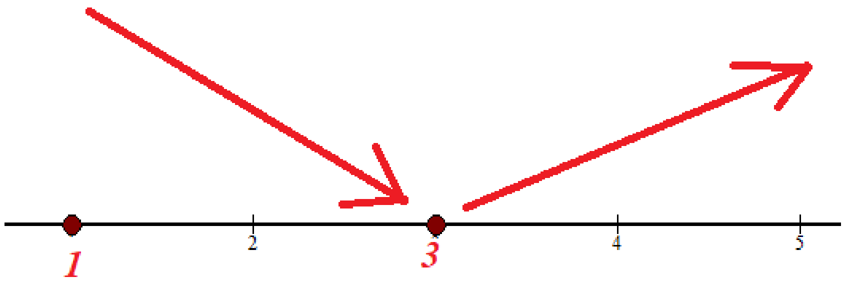
$$f(x)=(x-3)^2 \Rightarrow f'(x)=2(x-3)$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x-3)=0 \Rightarrow x=3$$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de *x = 3*.

En $(1,3)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=2(2-3)=-2<0$. La función decrece en $(1,3)$.

En $(3,+\infty)$ tomamos *x = 4* y la derivada vale $f'(4)=2(4-3)=2>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.

Como $f(3) = (3-3)^2 = 0$ las coordenadas del punto mínimo relativo son (3, 0).

c) En el apartado anterior se ha estudiado como crece o decrece la función en $(1, +\infty)$.

La función decrece en el intervalo $(1, 3)$ y crece en $(3, +\infty)$.

2. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene un máximo en (0, –3) y la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -1$ es 6. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 puntos)

El punto máximo tiene coordenadas (0, –3), por lo que $f(0) = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx + c \\ f(0) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow \boxed{c = -3}$$

Tiene un máximo en $x = 0$, lo que significa que la derivada se anula en dicho valor.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2ax + b \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2a(0) + b \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

En el punto de abscisa $x = -1$ la pendiente de la recta tangente es 6. Esto significa que la derivada primera en $x = -1$ vale 6.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 2ax + b \\ b = 0 \\ f'(-1) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 = 2a(-1) + 0 \Rightarrow 6 = -2a \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

Los valores buscados son $a = -3$; $b = 0$, $c = -3$.

<u>Sección 2</u> (3.5 puntos) <u>Bloque 1</u>

3. El consumo por persona y semana de azúcar en España sigue una distribución normal con desviación típica σ = 60 gramos. Se hizo un estudio y se observó que la media de consumo por semana de 50 personas fue de 200 gramos. Se pide:

a) Calcula el intervalo de confianza del 95% para el consumo medio por persona y semana de azúcar. (1 punto)

b) Razona cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ de consumo por persona y semana de azúcar es 220 gramos con una probabilidad del 90%? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

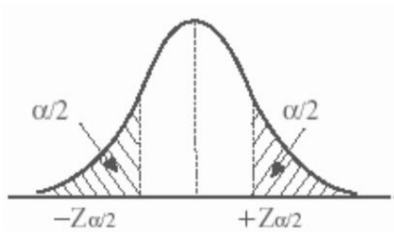
X = Consumo de azúcar de una persona en una semana en gramos.
Desviación típica = σ = 60 gramos
X = N(μ, 60)

$Media\ muestral = \overline{x} = 200\ gramos$. Tamaño de la muestra = n = 50

a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{60}{\sqrt{50}} \simeq 16.63\ gramos$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = (200 - 16.63, 200 + 16.63) = (183.37, 216.63)$$

b) Para disminuir la amplitud del intervalo de confianza hay que disminuir el error que viene dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este valor puede disminuir disminuyendo $z_{\alpha/2}$ que se consigue disminuyendo el nivel de confianza o aumentando el tamaño de la muestra (n) con lo que disminuye $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) 220 gramos no pertenece al intervalo de confianza $(183.37, 216.63)$ obtenido para un nivel de confianza del 95 % hallado en el apartado anterior. Si disminuimos el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo de confianza y 220 gramos seguirá sin pertenecer al intervalo de confianza para un 90 % de nivel de confianza. Por lo tanto NO es admisible.

4. De 100 alumnos que han terminado una titulación 6 no han encontrado trabajo el primer año.

a) Calcula la proporción de alumnos que han encontrado trabajo el primer año. (0.25 puntos)

b) Calcula la probabilidad de que si elegimos tres alumnos sin repetición, ninguno haya encontrado trabajo el primer año. (0.5 puntos)

c) Si elegimos tres alumnos al azar sin repetición y el primero no ha encontrado trabajo el primer año, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo y el tercero tampoco hayan encontrado trabajo el primer año? (0.75 puntos)

a) Proporción = $\frac{100-6}{100}=\frac{94}{100}=0.94=94\,\%$ de alumnos que han encontrado trabajo el primer año.

b) Es la probabilidad de que el primer elegido de entre los 100 no haya encontrado trabajo (hay 6), el segundo elegido de entre los 99 restantes no haya encontrado trabajo (quedan 5) y que el tercer elegido de entre los 98 restantes no haya encontrado trabajo (quedan 4).

Llamamos N_1 al suceso "el elegido en primer lugar no ha encontrado trabajo", N_2 al suceso "el elegido en segundo lugar no ha encontrado trabajo", N_3 al suceso "el elegido en tercer lugar no ha encontrado trabajo".

$$P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = P(N_1)P(N_2/N_1)P(N_3/(N_1 \cap N_2)) =$$
$$= \frac{6}{100}\cdot\frac{5}{99}\cdot\frac{4}{98} = \boxed{\frac{1}{8085}}$$

c) Nos piden $P(N_2 \cap N_3 / N_1) = \frac{P(N_2 \cap N_3 \cap N_1)}{P(N_1)} = \frac{\frac{1}{8085}}{\frac{6}{100}} = \boxed{\frac{10}{4851}}$

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x<0\\ t & si\ x=0\\ (x-2)^2 & si\ x>0\end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en *x = 0*. (0.5 puntos)

b) Para *t = 2*, representa gráficamente la función *f(x)*. (1 punto)

a) La función es continua en *x = 0* cuando cumple que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=t \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+2)^2=4 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-2)^2=4 \\ f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t=4}$$

La función es continua para *t = 4*.

b) Para *t = 2* la función queda $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\ x<0\\ 2 & si\ x=0\\ (x-2)^2 & si\ x>0\end{cases}$

Esta función es discontinua en *x = 0* por lo visto en el apartado anterior.
La gráfica de la función son dos trozos de parábola, con un punto desplazado en *x = 0*.
Hallamos los vértices de cada parábola, hacemos una tabla de valores y representamos.

$si\ x<0 \to f(x)=(x+2)^2$

$f'(x)=2(x+2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ Vértice (mínimo relativo)

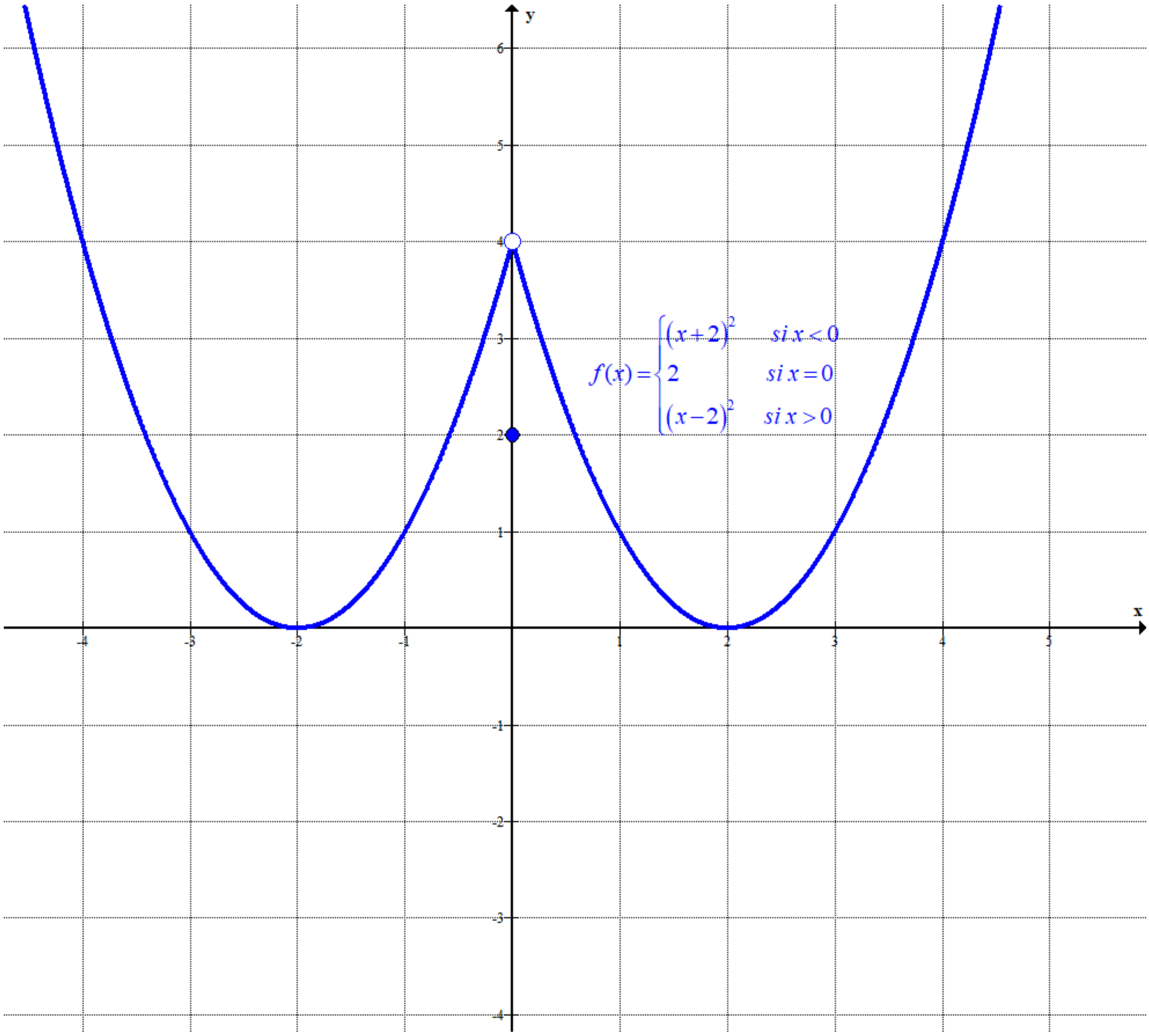
$si\ x>0 \to f(x)=(x-2)^2$

$f'(x)=2(x-2)$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x-2)=0 \Rightarrow x=2$ Vértice (mínimo relativo)

$x<0$	$y=(x+2)^2$
-3	1
-2	0 Vértice
-1	1
0	4 No se incluye

$x>0$	$y=(x-2)^2$
0	4 No se incluye
1	1
2	0 Vértice
3	1


y
x
$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si\,x<0\\ 2 & si\,x=0\\ (x-2)^2 & si\,x>0\end{cases}$

4. En un local se venden pizzas en porciones. Las ventas durante cuatro semanas consecutivas siguen la función: $P(t) = -40t^2 + 240t + 540$, con $t = semanas\ y\ (1 \le t \le 4)$.

a) ¿Cuántas porciones han vendido durante los dos primeras semanas? (0.5 puntos)
b) ¿Durante qué semana se vendieron más porciones y cuántas fueron? (0.75 puntos)
c) ¿Qué semana vendieron menos? ¿Cuántas porciones? (0.75 puntos)

a) Nos piden la suma de las ventas de la primera semana P(1) y las de la segunda P(2).

$$P(1) + P(2) = (-40 + 240 + 540) + (-160 + 480 + 540) = 740 + 860 = 1600$$

b) Lo averiguamos derivando la función e igualando a cero la derivada.

$$P(t) = -40t^2 + 240t + 540 \Rightarrow P'(t) = -80t + 240$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow -80t + 240 = 0 \Rightarrow t = \frac{240}{80} = 3$$

Sustituimos *t = 3* en la segunda derivada para ver si el punto crítico es máximo o mínimo.

$$P'(t) = -80t + 240 \Rightarrow P''(t) = -80 \Rightarrow P''(3) = -80 < 0$$

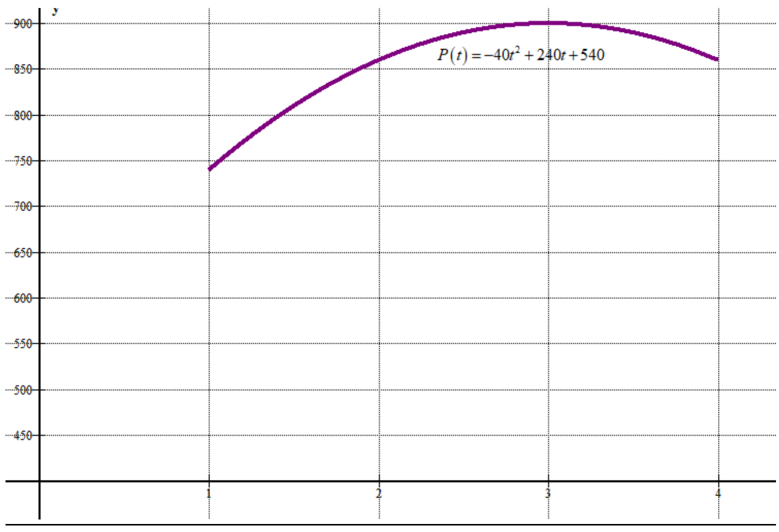
La función alcanza un máximo en *t = 3*.

Como $P(3) = -40 \cdot 3^2 + 240 \cdot 3 + 540 = 900$ podemos decir que en la tercera semana se producen unas ventas máximas de 900 porciones.

c) Valoramos la función en los extremos y como es una parábola uno de esos valores serán el mínimo de ventas.

$$\left. \begin{array}{l} P(1) = 740 \\ P(4) = -40 \cdot 4^2 + 240 \cdot 4 + 540 = 860 \end{array} \right\}$$

El valor de ventas mínimo se produce en la primera semana, siendo las ventas de 740 porciones.



Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A\cdot C+D^T$. (0.5 puntos9

b) Razona si A y B tienen matriz inversa (no es necesario calcularlas). (0.5 puntos)

c) ¿Qué dimensiones tienen las matrices resultantes de los productos $D\cdot C$ y $D^T\cdot C^T$? (no es necesario hacer las multiplicaciones). (0.5 puntos)

a)

$$A\cdot C+D^T=\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-2 \\ -1/3+1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 \\ 11/3 \end{pmatrix}$$

b) Para que tengan inversa deben determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1/2 & 3 \end{vmatrix}=9+3=12\neq 0\Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4-4=0\Rightarrow \text{No existe } B^{-1}$$

c)

$$D\cdot C=\begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{2 \quad \cdot \quad 2}\times 1\longrightarrow 1\times 1$$

El resultado del producto es una matriz cuadrada de orden 1.

$$D^T\cdot C^T=\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{1 \quad \cdot \quad 1}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

El resultado del producto es una matriz cuadrada de orden 2

6. En un concesionario de motos disponen de 100 motos dispuestas para su venta. Las motos son de tres tipos: las que consumen gasolina únicamente, las que usan gasolina y aceite y las eléctricas. Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas. La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas motos hay de cada tipo. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos "x" al número de motos de gasolina, "y" al número de motos de gasolina y aceite y "z" al número de motos eléctricas.

"*Disponen de 100 motos*" → $x+y+z=100$

"*Las más numerosas son las que usan gasolina y aceite, y la diferencia entre la cantidad de estas y las de gasolina es igual a la mitad del número de eléctricas*" → $y-x=\frac{z}{2}$

"*La diferencia entre las de gasolina y las eléctricas es igual a la tercera parte de las que utilizan gasolina y aceite*" → $x-z=\frac{y}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ y-x=\frac{z}{2} \\ x-z=\frac{y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 2y-2x=z \\ 3x-3z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ -2x+2y-z=0 \\ -3x+y+3z=0 \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos por Gauss

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ -2x+2y-z=0 \\ -3x+y+3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 2^a + 2\cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} -2x & +2y & -z & =0 \\ 2x & +2y & +2z & =200 \\ \hline & 4y & +z & =200 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^a + 3\cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} -3x & +y & +3z & =0 \\ 3x & +3y & +3z & =300 \\ \hline 0 & 4y & +6z & =300 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ 4y+6z=300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{rrrr} 4y & +6z & = & 300 \\ -4x & -z & = & -200 \\ \hline 0 & 5z & = & 100 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ 5z=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4y+z=200 \\ \boxed{z=20} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+20=100 \\ 4y+20=200 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ 4y=180 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+\ \ y=80 \\ \boxed{y=\dfrac{180}{4}=45} \end{array}\right\} \Rightarrow x+45=80 \Rightarrow \boxed{x=35}$$

En el concesionario hay 35 motos de gasolina, 45 de gasolina y aceite y 20 eléctricas.

Bloque 2

5. Según los datos de 2020, en la universidad española hay un porcentaje de 24.8% de mujeres estudiando Grados de Informática, el resto son hombres. Además, una mujer tiene una probabilidad de 0.95 de terminar informática, mientras que para los hombres es del 0.85.

a) Elegido un estudiante al azar de informática, ¿cuál es la probabilidad de que consiga terminar la titulación? (0.75 puntos)

b) Sabiendo que un estudiante elegido al azar ha terminado informática, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0.75 puntos)

Podemos pasar los porcentajes a valores absolutos y hacer una tabla de contingencia.

Manejaremos número decimales pues nuestro objetivo es hallar probabilidades. Podriamos optar por un total que nos permitiese trabajar con números enteros pero no es necesario.

Estudiando Grados de Informática hay un 100 – 24.8 = 75.2 % de hombres

El 95 % de 24.8 es 23.56 mujeres las que terminan informática.

El 85 % de 75.2 es 63.92hombres los que terminan informática.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Termina informática	**No termina informática**	
Mujeres estudiando informática	**23.56**		**24.8**
Hombres estudiando informática	**63.92**		**75.2**
			100

Completamos la tabla.

	Termina informática	**No termina informática**	
Mujeres estudiando informática	**23.56**	**12.40**	**24.8**
Hombres estudiando informática	**63.92**	**97.76**	**75.2**
	87.48	**110.16**	**100**

Con los datos que aparecen en la tabla respondemos a las preguntas planteadas.

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Acabe la titulación}) = \frac{87.48}{100} = \boxed{0.8748}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Sea mujer / Ha terminado informática}) = \frac{23.56}{87.48} = \boxed{\frac{589}{2187} \simeq 0.2693}$$

6. Se desea investigar la altura en cm de un tipo de planta, se sabe que la altura sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =15 cm. Se tomó una muestra aleatoria de 400 plantas de ese tipo y se comprobó que la altura media de dicha muestra era de 110 cm.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional de la altura de ese tipo de planta, con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede admitir que la media de altura μ de ese tipo de planta pueda ser de 109 cm con una confianza del 95 %? Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

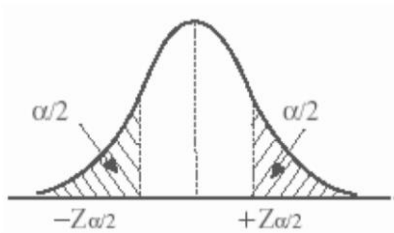
X = Altura en cm de un tipo de planta.
Desviación típica = σ = 15 cm
X = N(μ, 15)

$Media\ muestral = \bar{x} = 110\ cm$. Tamaño de la muestra = n = 400

a) Con un nivel de confianza del 95%

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	[illegible]	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9750}$	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{400}} = 1.47$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (110 - 1.47, 110 + 1.47) = (108.53, 111.47)$$

b) Si aumentamos el nivel de confianza se aumenta el valor de 1 – ∝, con lo que aumenta el valor de $z_{\alpha/2}$ y esto repercute en un aumento del error $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por lo que aumentaría la amplitud del intervalo de confianza.

Un aumento del nivel de confianza implica un aumento de la amplitud del intervalo de confianza. De la misma forma si disminuye el nivel de confianza disminuye la amplitud del intervalo de confianza.

c) 109 cm pertenece al intervalo de confianza $(108.53, 111.47)$ hallado en el apartado a).
Por lo tanto **si** es admisible.