Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2021
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x,y)=12x-2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x \geq y$

$x+y \geq 0$

$x \leq 3$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

2. En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+3+t & si \quad x \leq 1 \\ (x-3)^2+t & si \quad x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

2. La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un punto de inflexión en (–1, 6) y en el punto de abscisa $x=-2$ la pendiente de la recta tangente es –4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un municipio el 5% de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40% pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10% de ellos pertenece al sector turístico.

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

4. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1.3 horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podrá aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál será el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x<0 \\ -2 & si\ x=0 \\ x^2-2 & si\ x>0 \end{cases}$

a) Halla el valor de *t* para que *f* sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)
b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

4. Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:

$$N(x)=\frac{1}{100}\left(-4x^4+128x^2+54\right),\ \text{con}\ x=días\ y\ (1\le x\le 5)\ .$$

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.
a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)
b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica σ = 10 gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %?

Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30% del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

6. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ comprueba que $(M \cdot N)^{-1} = N^{-1} \cdot M^{-1}$. (1 punto).

b) Resuelve la ecuación $M \cdot X = N$ (0.5 puntos)

SOLUCIONES

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal maximiza la función $f(x,y)=12x-2y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x \geq y$

$x+y \geq 0$

$x \leq 3$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 puntos)

c) Indica el máximo del problema dado y su valor. (0.25 puntos)

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$y=x$

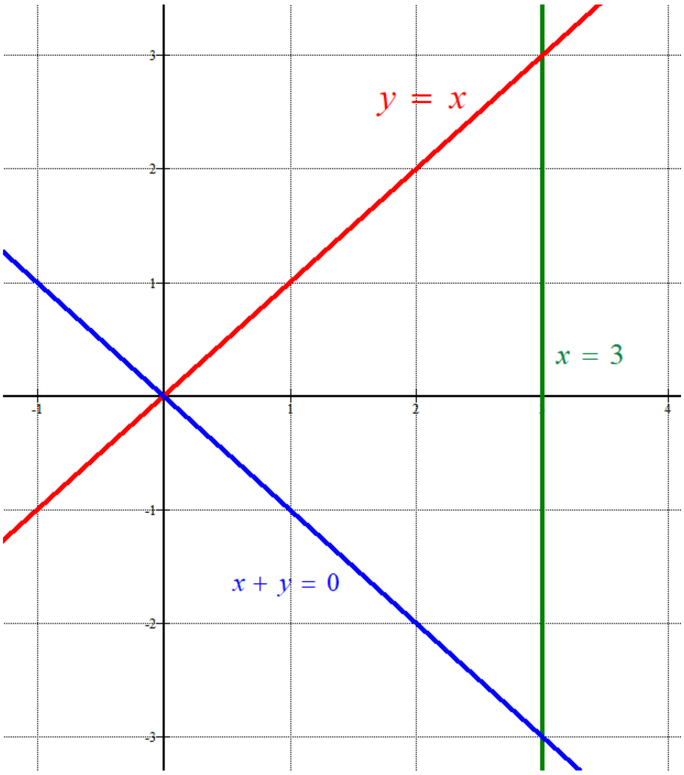
x	$y=x$
0	0
2	2

$x+y=0$

x	$y=-x$
0	0
1	-1

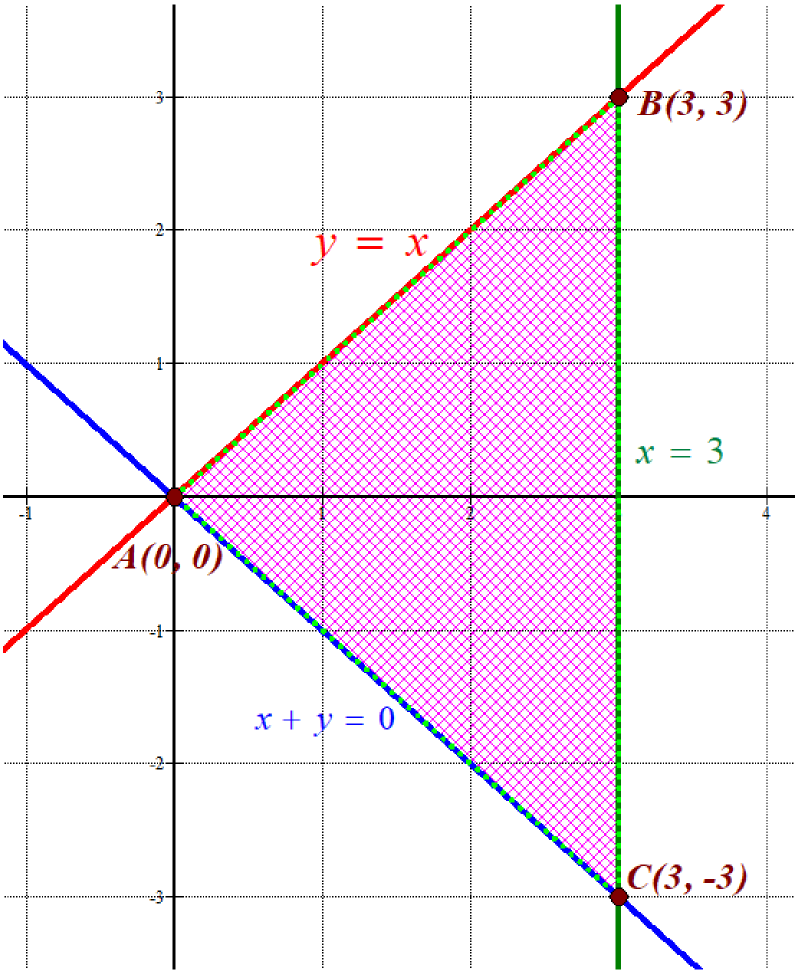
$x=3$

Recta vertical



Como las restricciones son $\begin{cases} x \geq y \\ x+y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$ la región factible es la región situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul y a la izquierda de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible.



b**)** Las coordenadas de los vértices son: A(0, 0), B(3, 3) y C(3, –3).
Se pueden hallar sus coordenadas resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las rectas correspondientes, pero no es necesario.

c) Valoramos la función $f(x,y)=12x-2y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0,0) → $f(0,0)=0$

B(3, 3) → $f(3,3)=12\cdot 3-2\cdot 3=30$

C(3, -3) → $f(3,-3)=12\cdot 3-2(-3)=42$

El valor máximo de $f(x,y)=12x-2y$ es 42 y se obtiene en el vértice C(3, –3).

2. En un examen final de historia al que se presentan 120 alumnos se deja elegir entre 3 opciones (A, B o C). El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C. Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos alumnos eligen cada opción. (1 punto)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos "x" al número de personas que elige la opción A, "y" al número de personas que elige la opción B y "z" al número de personas que elige la opción C.

"*Se presentan 120 alumnos*" → $x+y+z=120$

"*El número de personas que elige la opción A es el triple de número que resulta al sumar las opciones B y C*" → $x=3(y+z)$

"*Hay el doble de personas que realizan la opción C que las que escogen B*" → $z=2y$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=120 \\ x=3(y+z) \\ z=2y \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=120 \\ x=3(y+z) \\ z=2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2y=120 \\ x=3(y+2y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=120 \\ x=9y \end{array}\right\} \Rightarrow 9y+3y=120 \Rightarrow 12y=120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{120}{12}=10} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=90} \\ \boxed{z=20} \end{array}\right.$$

90 personas eligen la opción A, 10 eligen la B y 20 la opción C.

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x+3+t & si \;\; x\leq 1 \\ (x-3)^2+t & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de *t* la función *f(x)* es continua en *x = 1*? (0.5 puntos)

b) Para *t = 0*, calcula los extremos relativos de la función *f(x)* en el intervalo $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

c) Para *t = 0*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)* en $(1,+\infty)$. (0.5 puntos)

a) La función es continua en *x = 1* cuando cumple que $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1+3+t=4+t \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x+3+t=4+t \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} (x-3)^2+t=4+t \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=4+t$$

La función es continua para cualquier valor de *t*.

b) Para *t = 0* la función queda $f(x)=\begin{cases} x+3 & si \;\; x\leq 1 \\ (x-3)^2 & si \;\; x>1 \end{cases}$.

En $(1,+\infty)$ la función es una parábola $f(x)=(x-3)^2$

Averiguamos su vértice para obtener el extremo relativo de la función.

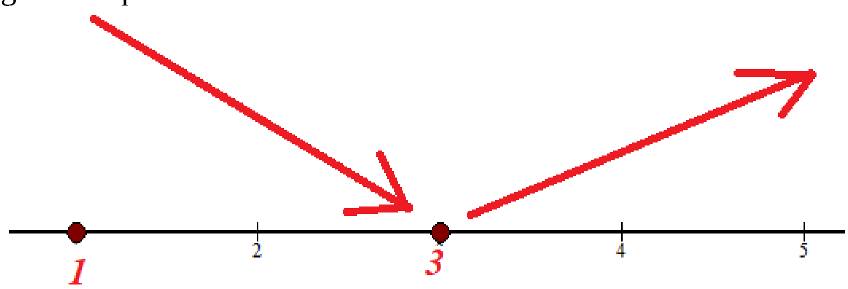
$$f(x)=(x-3)^2 \Rightarrow f'(x)=2(x-3)$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2(x-3)=0 \Rightarrow x=3$$

Analizamos el signo de la derivada antes y después de *x = 3*.

En $(1,3)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=2(2-3)=-2<0$. La función decrece en $(1,3)$.

En $(3,+\infty)$ tomamos *x = 4* y la derivada vale $f'(4)=2(4-3)=2>0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema.



La función presenta un mínimo relativo en *x = 3*.

Como $f(3)=(3-3)^2=0$ las coordenadas del punto mínimo relativo son (3, 0).

c) En el apartado anterior se ha estudiado como crece o decrece la función en $(1,+\infty)$.

La función decrece en el intervalo $(1,3)$ y crece en $(3,+\infty)$.

2. La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ tiene un punto de inflexión en (–1, 6) y en el punto de abscisa $x=-2$ la pendiente de la recta tangente es –4. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros *a*, *b* y *c*. (1.5 puntos)

El punto de inflexión tiene coordenadas (–1, 6).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx \\ f(-1)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 6=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)=-a+b-c \Rightarrow \boxed{-a+b-c=6}$$

Tiene un punto de inflexión en *x = –1*, lo que significa que la derivada segunda se anula en dicho valor.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f''(x)=6ax+2b$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6ax+2b \\ f''(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6a(-1)+2b \Rightarrow 0=-6a+2b \Rightarrow 0=-3a+b \Rightarrow \boxed{b=3a}$$

En el punto de abscisa $x=-2$ la pendiente de la recta tangente es –4. Esto significa que la derivada primera en $x=-2$ vale –4.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(-2)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow -4=3a(-2)^2+2b(-2)+c \Rightarrow \boxed{-4=12a-4b+c}$$

Reunimos las tres condiciones en un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} -4=12a-4b+c \\ -a+b-c=6 \\ b=3a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4=12a-4(3a)+c \\ -a+3a-c=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{-4=c} \\ 2a-c=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a-(-4)=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a=2 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=3(1)=3}$$

Los valores buscados son *a = 1*; *b = 3*, *c = –4*.

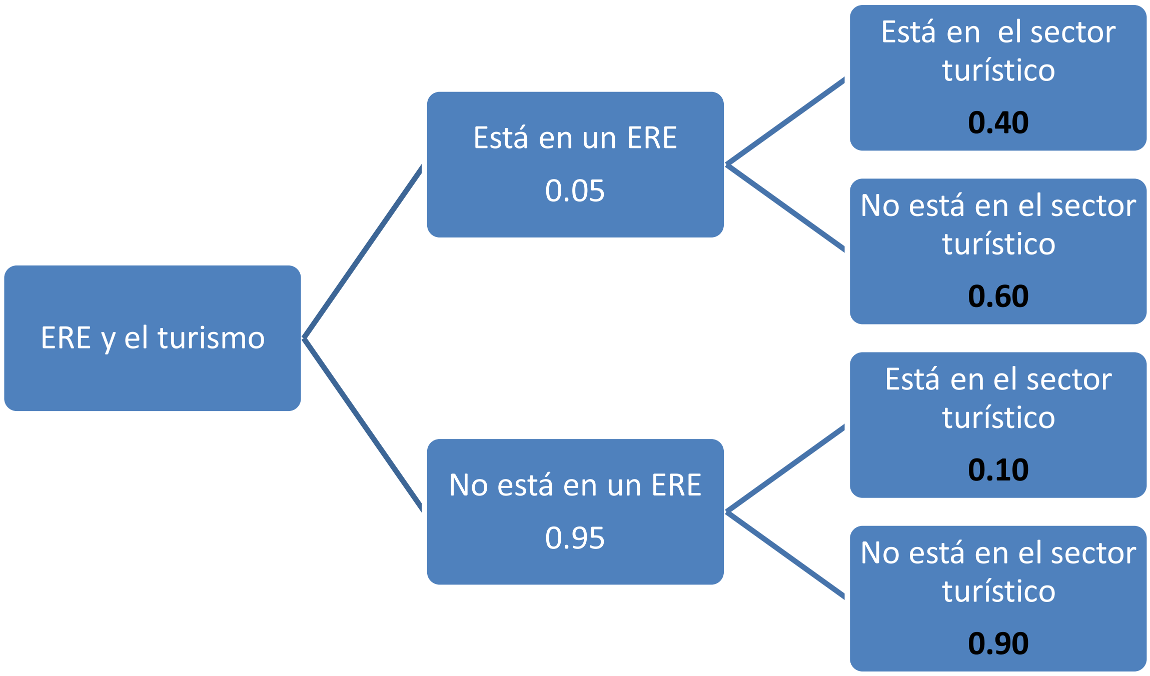
Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un municipio el 5% de las personas está en un ERE. De las personas que están en un ERE, el 40% pertenece al sector turístico. Del resto de las personas del municipio, se sabe que el 10% de ellos pertenece al sector turístico.

a) Calcula la probabilidad de que elegida una persona al azar del municipio trabaje en el sector turístico. (0.75 puntos)

b) Sabiendo que una persona pertenece al sector turístico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en un ERE? (0.75 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos A = estar en un ERE. $\overline{A}$ = No estar en un ERE.

Llamamos T = Estar en el sector turístico. $\overline{T}$ = No estar en el sector turístico.

a)

$$P(T)=P(A)P(T/A)+P(\overline{A})P(T/\overline{A})=0.05\cdot 0.4+0.95\cdot 0.1=\boxed{0.115}$$

b)

$$P(A/T)=\frac{P(A\cap T)}{P(T)}=\frac{P(A)P(T/A)}{P(T)}=\frac{0.05\cdot 0.4}{0.115}=\boxed{\frac{4}{23}\simeq 0.1739}$$

4. El tiempo de uso de móvil por día de los alumnos de un instituto sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 20 minutos. Se eligió una muestra aleatoria de 36 alumnos y se observó que la media de tiempo usando el móvil para esa muestra era de 2 horas.

a) Halla un intervalo de confianza para la media de tiempo de uso de móvil por día con un nivel de confianza del 95 %. (0.75 puntos)

b) ¿Se puede admitir que la media poblacional sea μ = 1.3 horas con un nivel de confianza del 95%? Explica razonadamente cómo se podrá aumentar o disminuir la amplitud del intervalo. Razona tus respuestas. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál será el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 94.64 %? (0.75 puntos)

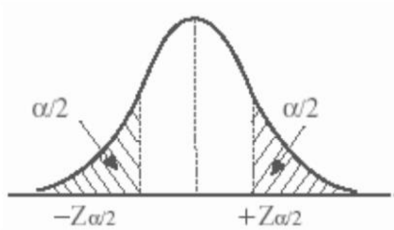
X = Tiempo de uso del móvil por un alumno de un instituto en horas.
Desviación típica = σ = 20 minutos = 1/3 hora
X = N(μ, 1/3)

$Media\ muestral = \bar{x} = 2\ horas$. Tamaño de la muestra = n = 36

a) Con un nivel de confianza del 95%

$$1 - \propto = 0{,}95 \rightarrow \propto = 0{,}05 \rightarrow \propto/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1/3}{\sqrt{36}} \simeq 0.1089$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

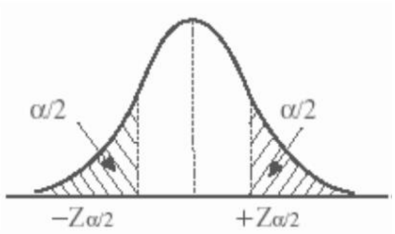
$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(2 - 0.1089,\ 2 + 0.1089\right) = \left(1.8911,\ 2.1089\right)$$

b) 1.3 horas no pertenece al intervalo de confianza $\left(1.8911,\ 2.1089\right)$ hallado en el apartado anterior. Por lo tanto no es admisible.

c) Con un nivel de confianza del 94.64 %

$$1 - \propto = 0{,}9464 \rightarrow \propto = 0{,}0536 \rightarrow \propto/2 = 0'0268 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}9732 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.93}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.93 \cdot \frac{1/3}{\sqrt{100}} \simeq \boxed{0.0643}.$$

El error máximo es de aproximadamente 0.0643 horas.

Bloque 2

3. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} -(x-t)^2 & si\ x<0 \\ -2 & si\ x=0 \\ x^2-2 & si\ x>0 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en $x = 0$. (0.5 puntos)
b) Para $t = -1$, representa gráficamente la función $f(x)$. (1 punto)

a) La función es continua en $x = 0$ cuando cumple que $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-2 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} -(x-t)^2=-(0-t)^2=-t^2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2-2=0^2-2=-2 \\ f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -2=-t^2 \Rightarrow 2=t^2 \Rightarrow \boxed{t=\pm\sqrt{2}}$$

La función es continua en $x = 0$ cuando $t=\pm\sqrt{2}$.

b) Para $t = -1$ la función queda $f(x)=\begin{cases} -(x+1)^2 & si\ x<0 \\ -2 & si\ x=0 \\ x^2-2 & si\ x>0 \end{cases}$

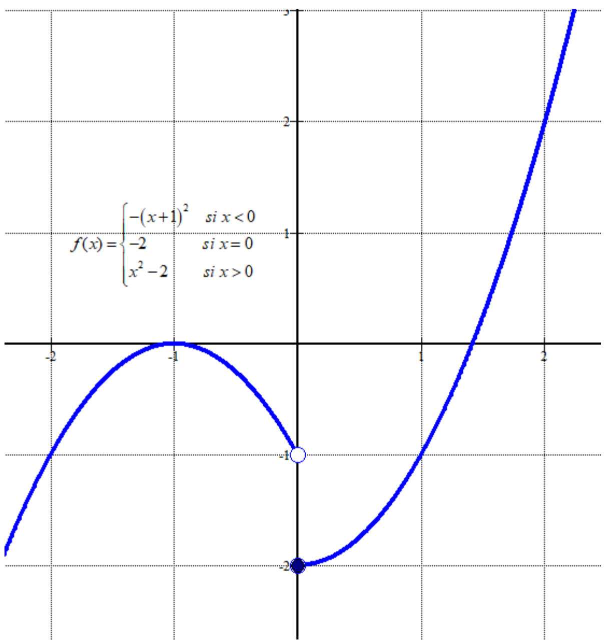
Por lo visto en el apartado anterior la función es discontinua en $x = 0$.
La gráfica serán dos trozos de dos parábolas. Hallamos los vértices y hacemos una tabla de valores.

$$si\ x<0 \Rightarrow f(x)=-(x+1)^2 \Rightarrow f\,'(x)=-2(x+1)$$
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow -2(x+1)=0 \Rightarrow x=-1\,Vértice$$

$$si\ x>0 \Rightarrow f(x)=x^2-2 \Rightarrow f\,'(x)=-2x$$
$$f\,'(x)=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0\,Vértice$$

x	$y=-(x+1)^2$
-2	-1
-1	0
0	-1 No se incluye

x	$y=x^2-2$
0	-2 No se incluye
1	-1
2	2



4. Se localiza un compuesto nocivo en un río obteniéndose que su proporción durante cinco días consecutivos de análisis de muestras sigue la función:

$$N(x)=\frac{1}{100}\left(-4x^4+128x^2+54\right),\text{ con } x = días\ y\ (1\le x\le 5)\ .$$

a) ¿Cuál es la proporción el tercer día? (0.25 puntos)

b) Determina que día se obtiene el máximo y que día se obtiene el mínimo. (1 punto)

c) ¿A qué valor ascienden ambos? (0.75 puntos)

a) Nos piden N(3).

$N(3)=\frac{1}{100}\left(-4\cdot 3^4+128\cdot 3^2+54\right)=8.82$. La proporción es de 8,82%.

b) Derivamos la función e igualamos a cero.

$$N´(x)=\frac{1}{100}\left(-16x^3+256x\right)$$

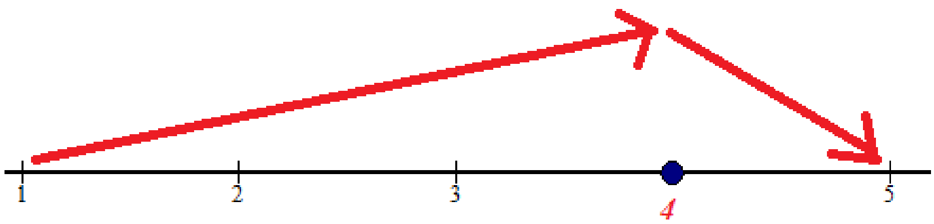
$$N´(x)=0\Rightarrow\frac{1}{100}\left(-16x^3+256x\right)=0\Rightarrow -16x^3+256x=0\Rightarrow -16x\left(x^2-16\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-16=0\Rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{16}=\pm 4}$$

Solamente consideramos el valor $x = 4$
Vemos como evoluciona la derivada en el intervalo [1,5] antes y después de $x = 4$.

- En $[1,4)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $N´(2)=\frac{1}{100}(-128+512)=3.84>0$. La función crece en $[1,4)$
- En $(4,5]$ tomamos $x = 4.5$ y la derivada vale $N´(4.5)=\frac{1}{100}(-1458+1152)=-3.06<0$. La función decrece en $(4,5]$.

La función sigue el esquema:



El valor máximo se obtiene el 4º día.
Valoramos la función el día 1 y el 5 para determinar el valor mínimo.

$$N(1)=\frac{1}{100}(-4+128+54)=1.78$$

$$N(5)=\frac{1}{100}\left(-4\cdot 5^4+128\cdot 5^2+54\right)=7.54$$

El valor mínimo se alcanza el día 1.

c) El valor mínimo es 1.78 % y el máximo es $N(4)=\frac{1}{100}\left(-4\cdot 4^4+128\cdot 4^2+54\right)=10.78\ \%$

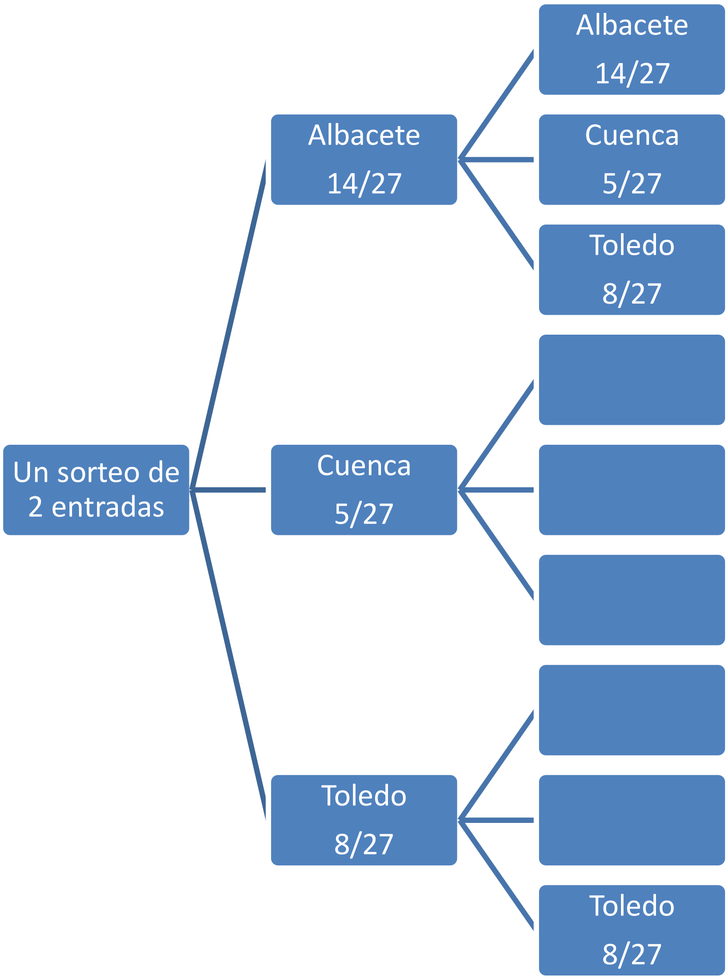
<u>Sección 3</u> (3.5 puntos) <u>Bloque 1</u>

5. En una clase de un ciclo formativo de formación profesional hay 27 alumnos, 14 son de Albacete, 5 son de Cuenca y 8 de Toledo.

a) Se sortean dos entradas entre todos los alumnos, ¿cuál es la probabilidad de que ambas entradas le toquen a alumnos que no son de Albacete? (pueden tocarle al mismo alumno las dos entradas). (0.75 puntos)

b) Si sorteamos 5 entradas, de una en una, de forma que no participa en el sorteo la persona que ya le haya tocado una entrada, ¿cuál es la probabilidad de que las 5 sean para alumnos de Toledo? (0.75 puntos)

Hacemos un diagrama de árbol. Como le pueden tocar las dos entradas a la misma persona, en el sorteo de la segunda entrada la probabilidad de que le toque a alguien de Albacete es la misma que en el sorteo de la primera entrada.



Llamamos A =Tocar la entrada a uno de Albacete. C = Tocar la entrada a uno de Cuenca.

T = Tocar la entrada a uno de Toledo.

a) Llamaremos A1, A2 a que toque la primera o segunda entrada a un alumno de Albacete.

Las probabilidades de que toque en primer o segundo sorteo tiene el mismo valor, pues todos vuelven a participar en el segundo sorteo.

$P(A) = 14/27$. $P(C) = 5/27$. $P(T) = 8/27$.

$$P\left(\overline{A1}\cap\overline{A2}\right)=\left\{Sucesos\ independientes\right\}=P\left(\overline{A1}\right)P\left(\overline{A2}\right)=\left(1-\frac{14}{27}\right)\left(1-\frac{14}{27}\right)=\boxed{\frac{169}{729}\simeq 0.2318}$$

b) Ahora las probabilidades de que toque a un alumno de Albacete va cambiando en cada sorteo sucesivo. Las probabilidades sucesivas dependen de lo que haya pasado en los sorteos previos.
Nos piden la probabilidad del suceso $T1\cap T2\cap T3\cap T4\cap T5$.
Como tenemos las probabilidades de que le toque a un alumno de Toledo en cada sorteo sucesivo.

$$P(T1)=\frac{8}{27};\ P(T2/T1)=\frac{7}{26};\ P\left(T3/(T1\cap T2)\right)=\frac{6}{25}$$

$$P\left(T4/(T1\cap T2\cap T3)\right)=\frac{5}{24};\ P\left(T4/(T1\cap T2\cap T3\cap T4)\right)=\frac{4}{23}$$

Lo aplicamos al cálculo de la probabilidad de que le toquen las cinco entradas en los cinco sorteos sucesivos.

$$P(T1\cap T2\cap T3\cap T4\cap T5)=$$

$$=P(T1)P(T2/T1)P\left(T3/(T1\cap T2)\right)P\left(T4/(T1\cap T2\cap T3)\right)P\left(T4/(T1\cap T2\cap T3\cap T4)\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\cdot\frac{7}{26}\cdot\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{4}{23}=\boxed{\frac{28}{40365}\simeq 0.000693}$$

6. Se ha tomado una muestra aleatoria del contenido en gramos de azúcar de 10 latas de refresco de cola y ha resultado ser: 70, 75, 85, 100, 60, 80, 120, 95, 65 y 90. Suponiendo que el contenido en azúcar en gramos de una lata de refresco de cola se distribuye según una ley normal de desviación típica σ = 10 gramos, se pide:

a) Halla el intervalo de confianza del 97% para el contenido medio de azúcar en una lata de refresco de cola. (1 punto)

b) Razona y explica qué se podría hacer para que el intervalo de confianza tuviera menor amplitud con el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del contenido en gramos de azúcar es de 90 gramos con una probabilidad del 98.5 %?

Razona tu respuesta. (0.5 puntos)

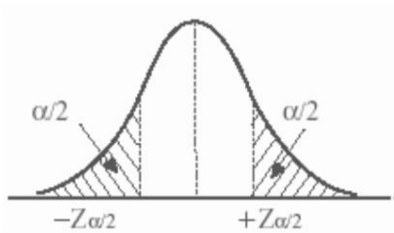
X = Contenido en azúcar de una lata de refresco en gramos.
X = N(μ, 10)

Tamaño de la muestra = n = 10

$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{70+75+85+100+60+80+120+95+65+90}{10} = 84\ gramos$$

a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} = 6.8621$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(84 - 6.8621, 84 + 6.8621\right) = \left(77.1379, 90.8621\right)$$

b) La amplitud del intervalo de confianza lo mide el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y este disminuye si aumentamos el tamaño de la muestra (n está en el denominador) o disminuimos el $z_{\alpha/2}$. Si mantenemos el nivel de confianza entonces debemos aumentar el tamaño de la muestra para conseguir un intervalo de confianza con menos amplitud.

c) Con un nivel de confianza del 97% el intervalo de confianza para la media es $\left(77.1379, 90.8621\right)$.

La media de 90 gramos pertenece a este intervalo. Si aumentamos el nivel de confianza el valor de $z_{\alpha/2}$ será mayor y el intervalo de confianza tendrá mayor amplitud.

La media de 90 gramos seguirá perteneciendo al intervalo de confianza.

Bloque 2

5. Se realiza una encuesta a los habitantes de un pueblo (con respuestas SI, NO o NO SABE/NO CONTESTA) sobre la necesidad de construir otra piscina cubierta. Se pregunta a las 600 personas mayores de edad que viven en el pueblo y los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA. Por estudios paralelos de fiabilidad se sabe que el 30% del total de los que contestan SI o NO, mienten, y el total de estos últimos son 135 personas:

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar qué cantidad de personas eligen cada respuesta. (1.5 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 puntos)

a) Llamamos "x" al número de personas que responden "SI", "y" al número de los que responden "NO" y "Z" a los que responden "NO SABE/NO CONTESTA".

Son 600 respuestas → $x+y+z=600$

"*Los que dicen NO son la mitad de los que NO SABE/NO CONTESTA*" → $y=\frac{z}{2}$

"El 30 % de los que dicen SI o NO son 135" → $\frac{30}{100}(x+y)=135$

Reunimos estas ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ y=\frac{z}{2} \\ \frac{30}{100}(x+y)=135 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 2y=z \\ 0.3x+0.3y=135 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 2y=z \\ x+y=450 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=600 \\ 2y=z \\ x+y=450 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2y=600 \\ x+y=450 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=600 \\ x+y=450 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=600 \\ x=450-y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 450-y+3y=600 \Rightarrow 2y=150 \Rightarrow \boxed{y=75} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=450-75=375} \\ \boxed{z=2\cdot 75=150} \end{array}\right.$$

Responden "SI" 375 personas, "NO" responden 75 y "NO SABE/NO CONTESTA" lo responden 150.

6. a) Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ comprueba que $\left(M\cdot N\right)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$. (1 punto).
b) Resuelve la ecuación $M\cdot X=N$ (0.5 puntos)

a) Calculamos las inversas.

$$M=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2+3=1\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^{T}\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$N=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |N|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$

$$N^{-1}=\frac{Adj\left(N^{T}\right)}{|N|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$M\cdot N=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-3 & 4+3\\ 1+1 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$|M\cdot N|=\begin{vmatrix}-5 & 7\\ 2 & -3\end{vmatrix}=15-14=1\neq 0$$

$$\left(M\cdot N\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(M\cdot N\right)^{T}\right)}{|M\cdot N|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 7 & -3\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

Comprobamos la igualdad:

$$\left.\begin{array}{l}N^{-1}\cdot M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-2 & -3-4\\ -1-1 & -3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ -2 & -5\end{pmatrix}\\ \left(M\cdot N\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ -2 & -5\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(M\cdot N\right)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$$

b) Como M tiene inversa despejamos de la ecuación.

$$M\cdot X=N\Rightarrow X=M^{-1}\cdot N=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3 & -2-3\\ -1-2 & 2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$$

La solución es $X=\begin{pmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$