COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA 2021	Código: 40

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los TRES primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
b) Calcule A^{-1} para x = 3, y = 1, z = 0.
c) Resuelva el sistema $B \cdot A = C$ para a = 1.

EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.
a) Plantee el problema para maximizar los ingresos.
b) Represente gráficamente el conjunto de soluciones.
c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

EJERCICIO 3. Análisis. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t)=\dfrac{kt}{t^2+4}$ con $t>0$
a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.
b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento.
c) ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

EJERCICIO 4. Análisis. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.
a) Determine las funciones I(x) y B(x) que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?
b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. El 40% de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10%.
a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?
c) ¿Son independientes los sucesos “no ser español” y “estar satisfecho con la visita”? Razone la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.

a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?

b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72%?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores x, y, z para los cuales la matriz A no tiene inversa.
b) Calcule A^{-1} para x = 3, y = 1, z = 0.
c) Resuelva el sistema $B \cdot A = C$ para a = 1.

a) La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{vmatrix}=y^2+\cancel{xyz}-y^2z-\cancel{xyz}=y^2-y^2z=y^2(1-z)$$

$$|A|=0 \Rightarrow y^2(1-z)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ o \\ z=1 \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de "x", el valor de "y" no puede ser 0 y el de "z" no puede ser 1.

b) Para x = 3, y = 1, z = 0 se cumplen las condiciones del apartado a) y existe la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1 \neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

c) Para a = 1 la matriz B queda $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$B \cdot A=C \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y+3 & y+3z & x+2y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+3=4 \\ y+3z=0 \\ x+2y+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=1 \\ y=-3z \\ x+2y+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2(-3z)=1 \\ x+2(-3z)+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-6z=1 \\ x-6z+3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+6z \\ x-3z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+6z-3z=2 \Rightarrow 3z=1 \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=1+6\frac{1}{3}=3} \\ \boxed{y=-3\frac{1}{3}=-1} \end{cases}$$

La solución es $x = 3$, $y = -1$, $z = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 2. Álgebra. Un distribuidor de software informático, tiene entre sus clientes a empresas y a particulares. Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes en su cartera, y el número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas. Además, tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuales, mientras que cada particular 229 euros.

a) Plantee el problema para maximizar los ingresos.

b) Represente gráficamente el conjunto de soluciones.

c) ¿Cuál de esas soluciones le proporcionaría los mayores ingresos al finalizar el año? ¿A cuánto ascenderían dichos ingresos?

a) Llamamos “x” al número de empresas como clientes e “y” al número de clientes particulares.

Planteamos las restricciones como inecuaciones.

“*Al finalizar el año debe conseguir al menos 25 empresas como clientes*” → $x \geq 25$

“*El número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo el doble que el de empresas*” → $y \geq 2x$

“*Tiene estipulado un límite global de 120 clientes anuales*” → $x + y \leq 120$

Juntamos todas las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 25 \\ y \geq 2x \\ x + y \leq 120 \end{array}\right\}$$

Deseamos maximizar los ingresos que vienen dados en función del número de clientes con la expresión $I(x,y) = 386x + 229y$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región del plano que contiene a los puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x = 25$

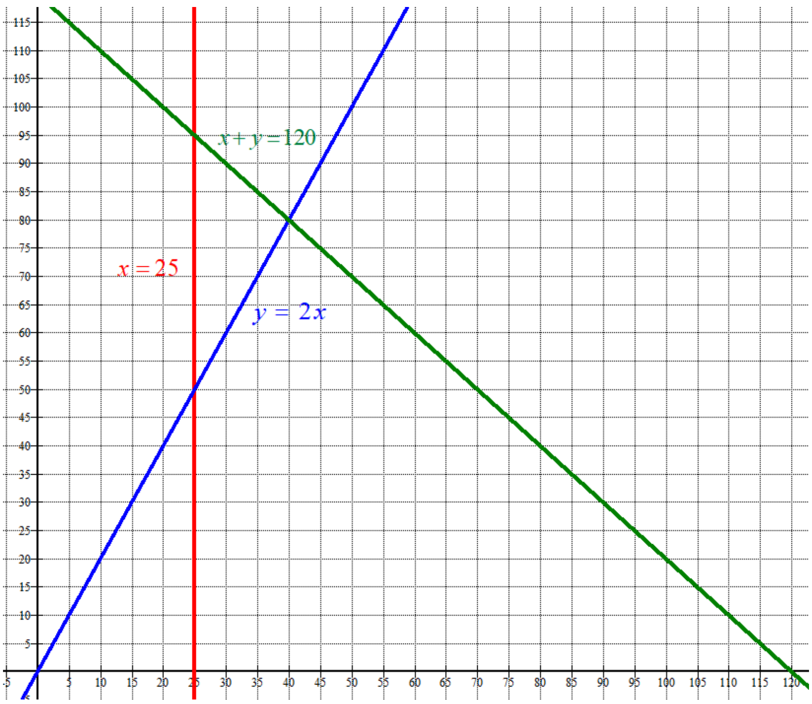
$x = 25$	y
25	0
25	10

$y = 2x$

x	$y = 2x$
25	50
40	80

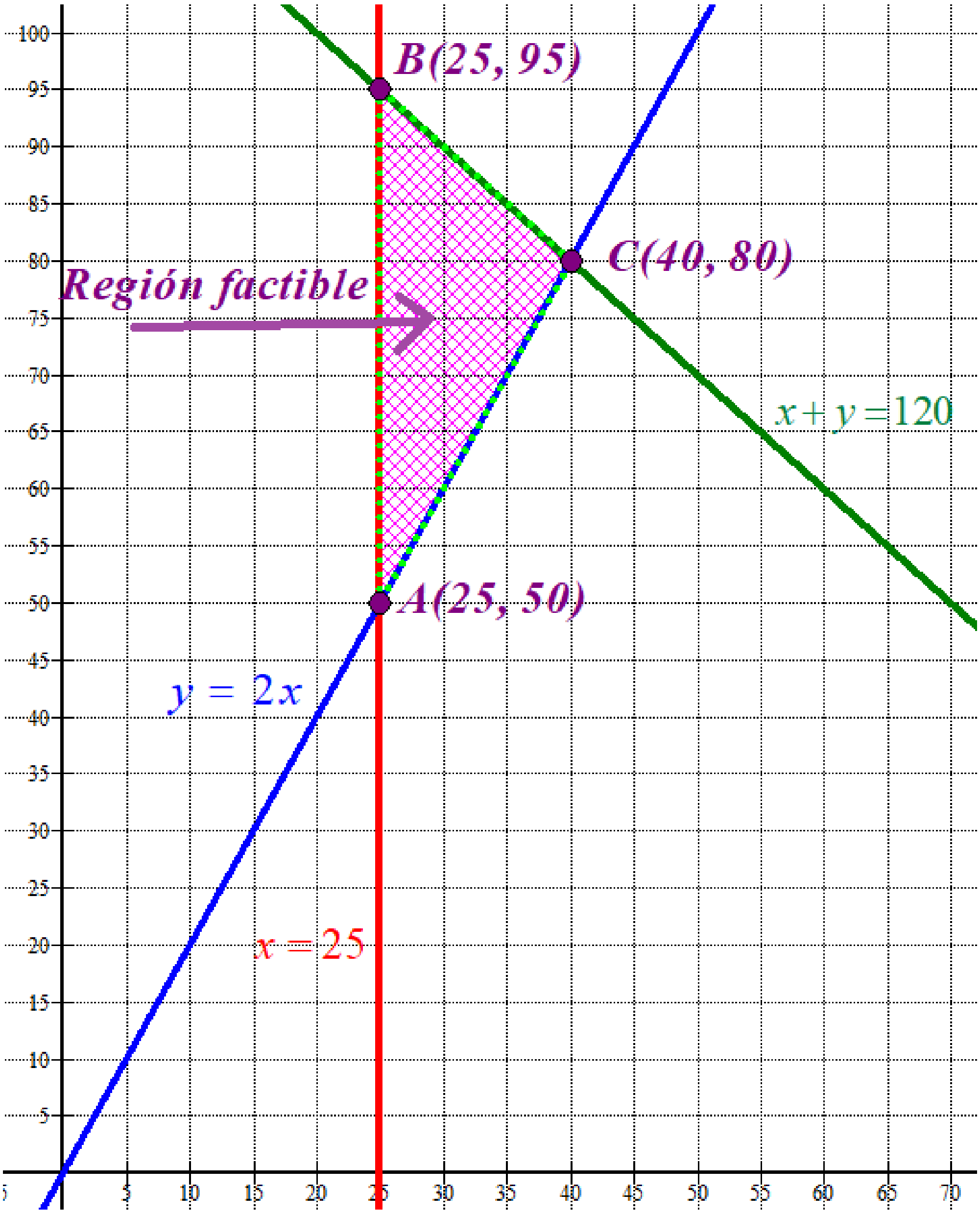
$x + y = 120$

x	$y = 120 - x$
25	95
40	80



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{lcl} x \geq 25 & \rightarrow & \text{A la derecha} \\ y \geq 2x & \rightarrow & \text{Por encima} \\ x+y \leq 120 & \rightarrow & \text{Por debajo} \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical roja, por encima de la recta azul y por debajo de la recta verde.

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo:



c) Valoramos la función ingresos $I(x,y) = 386x + 229y$ en cada vértice.

A(25, 50) → $I(25,50) = 21100$

B(25, 95) → $I(25,95) = 31405$

C(40, 80) → $I(40,80) = 33760$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 33760 € que se consiguen con 40 empresas y 80 clientes particulares.

EJERCICIO 3. Análisis. Después de t horas de funcionamiento el rendimiento de una máquina (en una escala de 0 a 100) viene dado por la función $r(t)=\frac{kt}{t^2+4}\; con\; t>0$

a) Calcule K sabiendo que el rendimiento a las 4 horas es de 76.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento del rendimiento durante las 7 primeras horas de funcionamiento.

c) ¿En qué momento se consigue el rendimiento máximo?, ¿Cuál es su valor?

a)

$$\left.\begin{array}{l} r(4)=76 \\ r(t)=\frac{kt}{t^2+4} \end{array}\right\} \Rightarrow 76=\frac{k\cdot 4}{4^2+4} \Rightarrow 76=\frac{4k}{20} \Rightarrow 76=\frac{k}{5} \Rightarrow \boxed{k=76\cdot 5=380}$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero.

$$r(t)=\frac{380t}{t^2+4} \Rightarrow r\,'(t)=\frac{380\left(t^2+4\right)-380t\left(2t\right)}{\left(t^2+4\right)^2}=\frac{380t^2+1520-720t^2}{\left(t^2+4\right)^2}$$

$$r\,'(t)=\frac{1520-380t^2}{\left(t^2+4\right)^2}$$

$$r\,'(t)=0 \Rightarrow \frac{1520-380t^2}{\left(t^2+4\right)^2}=0 \Rightarrow 1520-380t^2=0 \Rightarrow 4-t^2=0 \Rightarrow t^2=4 \Rightarrow \boxed{t=\sqrt{4}=2}$$

El valor crítico es $t = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $r\,'(1)=\frac{1520-380}{\left(1^2+4\right)^2}=\frac{1140}{25}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,7]$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $r\,'(3)=-\frac{1900}{13^2}<0$. La función decrece en $(2,7]$.

La función crece en $(0,2)$ y decrece en $(2,7]$.

c) El rendimiento máximo se obtiene en $t = 2$, al cabo de 2 horas siendo el rendimiento de $r(2)=\frac{760}{2^2+4}=95$. Un rendimiento de 95 en una escala de 0 a 100.

EJERCICIO 4. Análisis. Una empresa puede vender x unidades al mes de un determinado producto al precio de $518 - x^2$ euros por unidad. Por otra parte, el fabricante tiene gastos mensuales: unos fijos de 225 euros y otros de $275x$ euros que dependen del número x de unidades.
a) Determine las funciones I(x) y B(x) que expresan los ingresos y beneficios obtenidos por la producción y venta de x unidades, respectivamente. ¿Qué beneficio se obtiene si se producen y se venden 10 unidades?
b) Calcule el número de unidades que hay que producir para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascenderían dichos beneficios? ¿Cuál sería el precio de venta de una unidad en ese caso?

a) Los ingresos proceden de las x unidades vendidas a $518 - x^2$ euros por unidad:

$$I(x) = x(518 - x^2) = 518x - x^3$$

Los Beneficios son los ingresos menos los gastos $G(x) = 225 + 275x$:

$$B(x) = 518x - x^3 - (225 + 275x) = 518x - x^3 - 225 - 275x$$
$$B(x) = -x^3 + 243x - 225$$

Hallamos B(10).

$$B(10) = -10^3 + 2430 - 225 = 1205 \text{ €}$$

Si se venden 10 unidades el beneficio es de 1205 €.

b) Derivamos la función e igualamos a cero la derivada del beneficio.

$$B(x) = -x^3 + 243x - 225 \Rightarrow B'(x) = -3x^2 + 243$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 243 = 0 \Rightarrow x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{81} = 9$$

Para $x = 9$ hay un punto crítico, vemos si es máximo o mínimo con el signo de la segunda derivada.

$$B'(x) = -3x^2 + 243 \Rightarrow B''(x) = -6x \Rightarrow B''(9) = -54 < 0$$

En $x = 9$ hay un máximo relativo del beneficio.

Hay que producir 9 unidades para obtener un beneficio máximo.

El beneficio asciende a $B(9) = -9^3 + 2187 - 225 = 1233$ €.

El precio de venta es $518 - 9^2 = 437$ € por unidad.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. El 40% de las personas que visitan el Pórtico de la Gloria de la Catedral de Santiago son españolas. Se sabe además que 4 de cada 5 españoles están satisfechos con la visita, mientras que, entre los no españoles, no están satisfechos con la visita el 10%.
a) Calcule el porcentaje de personas satisfechas con la visita.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté satisfecha con la visita y no sea española?
c) ¿Son independientes los sucesos "no ser español" y "estar satisfecho con la visita"? Razone la respuesta.

a) Realizamos una tabla de contingencia para obtener todos los datos relativos a la situación planteada en el ejercicio. Suponemos 100 visitantes.

4 de cada 5 españoles están satisfechos que en porcentaje es $\frac{4}{5}=\frac{80}{100}=80\%$. El 80 % de 40 es $0.8\cdot 40=32$ españoles están satisfechos con la visita.

El 10 % de los no españoles no están satisfechos con la visita, como son el 60 % de las visitas, entonces 0.10 · 60 = 6 no españoles no están satisfechos con la visita

	Satisfechos con visita	No satisfechos con visita	
Españoles	**32**		**40**
No españoles		**6**	
			100

Completamos la tabla.

	Satisfechos con visita	No satisfechos con visita	
Españoles	**32**	**8**	**40**
No españoles	**54**	**6**	**60**
	86	**14**	**100**

Respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

a) Mirando en la tabla tenemos que son 86 las personas no satisfechas con la visita. Son 86 de 100, es decir el 86 %.

b) Miramos en la tabla.

$$P(\text{Satisfecha con visita y no sea española})=\boxed{\frac{54}{100}=0.54}$$

c) Calculamos la probabilidad de cada suceso y la probabilidad de la intersección.

$$\left.\begin{array}{r} P(\text{No ser español})=\dfrac{60}{100}=0.6 \\ P(\text{Estar satisfecho con la visita})=\dfrac{86}{100}=0.86 \\ P(\text{"No ser español"}\cap\text{"Estar satisfecho con la visita"})=\dfrac{54}{100}=0.54 \end{array}\right\}\Rightarrow ¿0.6\cdot 0.86=0.54?$$

No es cierta la igualdad y por tanto no son independientes.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. El peso de las naranjas para zumo recolectadas por un productor es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con una media de $\mu = 200$ gramos y una desviación típica de $\sigma = 50$ gramos.
a) Si tomamos una muestra aleatoria de $n = 25$ naranjas, ¿cuál es la probabilidad de que su peso medio está comprendido entre 175 y 215 gramos?
b) ¿De qué tamaño se ha tomado otra muestra aleatoria si la probabilidad de que el peso medio sea inferior a 210 gramos es del 97.72%?

a) Si X = Peso de una naranja para zumo en gramos. X = N(200, 50).
La distribución del peso medio de 25 naranjas sigue una normal con la misma media pero con una desviación típica más pequeña → $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$.
$\overline{X}$ = Peso medio de una muestra de 25 naranjas. $\overline{X} = N(200,10)$

$$P\left(175 \le \overline{X} \le 215\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{175-200}{10} \le Z \le \frac{215-200}{10}\right) =$$

$$= P(-2.5 \le Z \le 1.5) = P(Z \le 1.5) - P(Z \le -2.5) = P(Z \le 1.5) - P(Z \ge 2.5) =$$

$$= P(Z \le 1.5) - \left[1 - P(Z \le 2.5)\right] = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 0.9332 - [1 - 0.9938] = \boxed{0.927}$$

b) $\overline{X}$ = Peso medio de una muestra de n naranjas. $\overline{X} = N\left(200, \frac{50}{\sqrt{n}}\right)$

$$P\left(\overline{X} \le 210\right) = 0.9772 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{210-200}{\frac{50}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9772 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.9772 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Miramos en la tabla}\} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{5} = 2 \Rightarrow \sqrt{n} = 10 \Rightarrow \boxed{n = 100}$$

La muestra es de 100 naranjas.