COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021	**Código: 40**

MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.
b) Despeje la matriz X tal que X·A+B= C y calcúlela para m=1.

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y)=x-y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6 \le t \le 12 \end{cases}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.
b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \quad si \quad 0 \le t \le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.
a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?
Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1. Álgebra. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.
b) Despeje la matriz X tal que X·A+B= C y calcúlela para m=1.

a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2m$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m=0 \Rightarrow m=0$$

Para que exista la inversa de A el valor de m debe ser distinto de 0.

b) Para m = 1 existe la inversa de A y puedo despejar de la ecuación matricial la matriz X.

$$X\cdot A+B= C \Rightarrow X\cdot A= C-B \Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y determinamos X.

$$X=(C-B)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2+1 & -4-4-1 \\ 0 & 1 & -4-2 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3 \longrightarrow 2\times 3$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

a) Representamos las rectas que delimitan la región.

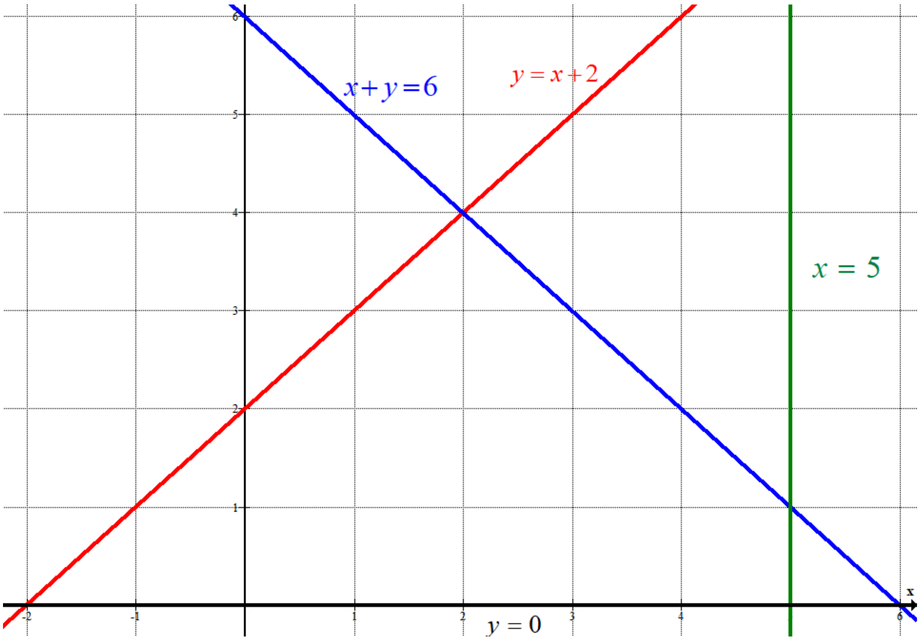
$y = x+2$ $\qquad x+y=6$ $\qquad x=5$ $\qquad y=0$

x	$y = x+2$
0	2
2	4
4	6

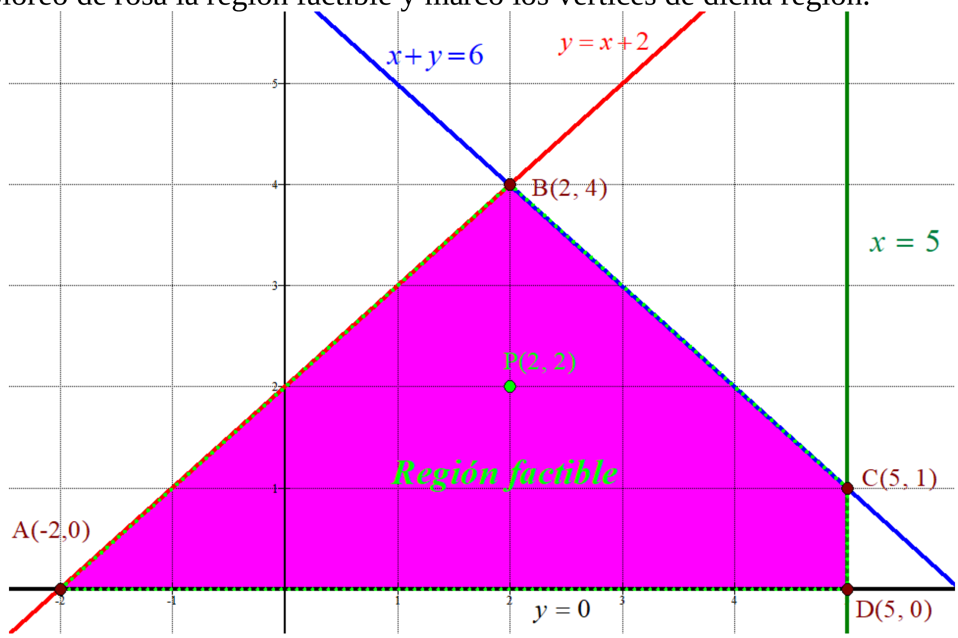
x	$y = 6-x$
0	6
2	4
6	0

Re*cta vertical* (para $x=5$)

Eje OX (para $y=0$)



Como las restricciones son $y \le x+2$ $\quad x+y \le 6$ $\quad x \le 5$ $\quad y \ge 0$ entonces la región está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta negra y a la izquierda de la recta verde. Coloreo de rosa la región factible y marco los vértices de dicha región.



Compruebo que el punto P(2,2) cumple las restricciones.
$2 \le 2+2$ $\quad 2+2 \le 6$ $\quad 2 \le 5$ $\quad 2 \ge 0$ ¡Se cumplen todas! La región factible es correcta.
Los vértices son A(–2, 0), B(2, 4), C(5, 1) y D(5, 0).

b) Valoramos la función $f(x,y) = x - y$ en cada uno de los vértices y averiguamos el valor mínimo y máximo de la función.

A(–2,0) → $f(-2,0) = -2 - 0 = -2$
B(2, 4) → $f(2,4) = 2 - 4 = -2$
C(5, 1) → $f(5,1) = 5 - 1 = 4$
D(5, 0) → $f(5,0) = 5 - 0 = 5$

El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto D(5, 0) y el mínimo es –2 y se alcanza en toda el segmento AB, en los puntos A(–2,0), (–1, 1), (0,2),…, B(2,4).

c) El valor máximo es 5 y el mínimo es –2.

EJERCICIO 3. Análisis. La cantidad de CO_2 (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0\le t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6\le t\le 12 \end{cases}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

a) Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera.

b) ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de CO_2 emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

c) Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

a) Estudiamos la continuidad de la función en t = 6.

$$\left.\begin{array}{l} C(6)=\dfrac{1}{4}6^2-24+18=3 \\ \lim\limits_{t\to 6^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 6^-} 5-\dfrac{t}{3}=5-2=3 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} C(t)=\lim\limits_{t\to 6^+} \dfrac{1}{4}t^2-4t+18=3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(6)=\lim_{t\to 6^-} C(t)=\lim_{t\to 6^+} C(t)=3.$$

La función es continua en t = 6.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0\le t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6\le t\le 12 \end{cases} \Rightarrow C'(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3} & , \quad 0<t<6 \\ \dfrac{2}{4}t-4 & , \quad 6<t<12 \end{cases}$$

En el tramo de 0 a 6 meses la derivada es negativa y la función decrece.

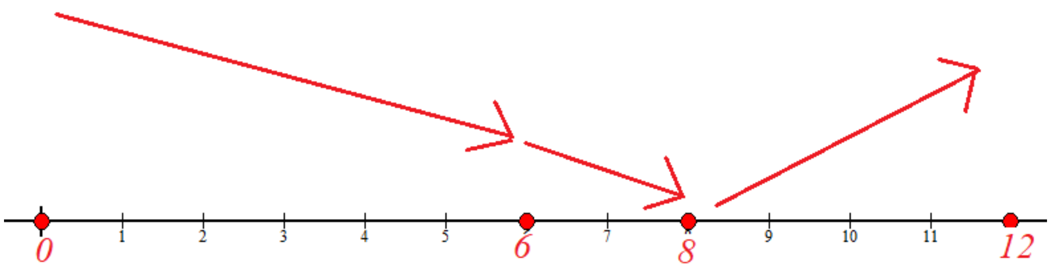
En el tramo de 6 a 12 igualamos a cero la derivada y vemos cuando cambia la función.

$$C'(t)=0\Rightarrow \frac{2}{4}t-4=0\Rightarrow \frac{t}{2}=4\Rightarrow t=8$$

En el mes 8 se produce un cambio de signo.

Del 6 al 8 tomamos t = 7 y la derivada es $C'(7)=\dfrac{2}{4}7-4=-0.5<0$. La función decrece del mes 6 al 8.

Del 8 al 12 tomamos t = 10 y la derivada es $C'(10)=\dfrac{2}{4}10-4=1>0$. La función crece del mes 8 al 12.



Como la función es continua el cambio de definición no afecta al decrecimiento en t = 6.

Resumiendo: La cantidad de CO_2 emitida a la atmósfera decrece durante los 8 primeros meses y crece del mes 8 al 12.

b) La cantidad mínima se produce en el mes 8 y es de $C(8)=\frac{1}{4}8^2-32+18=2$.

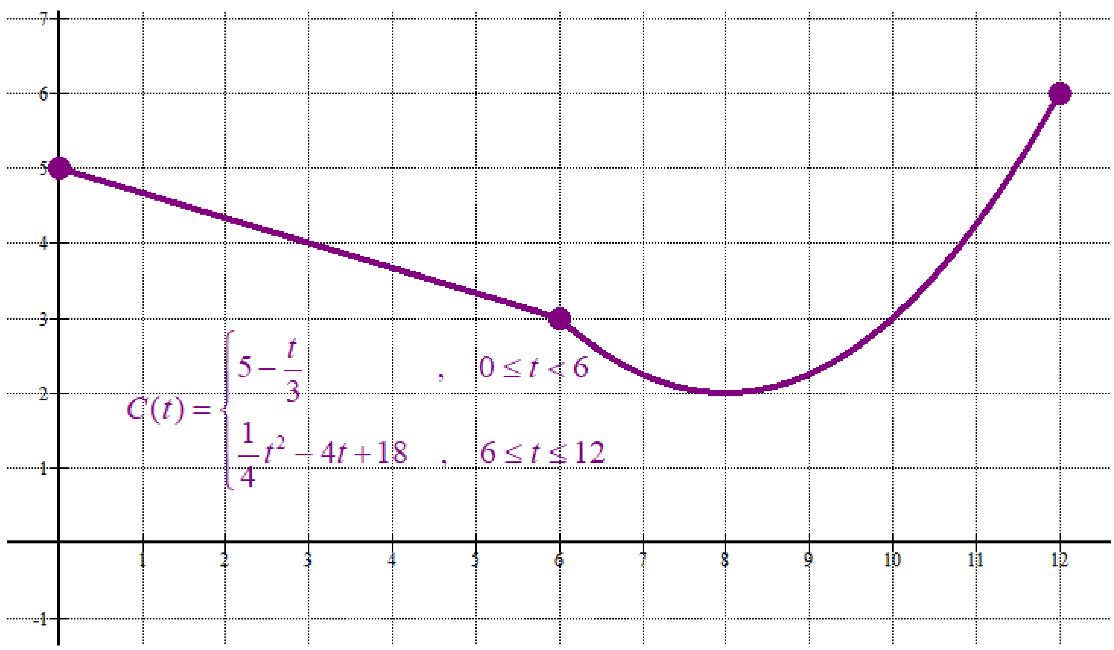
La cantidad máxima se produce en el mes 0 o en el mes 12. Calculamos ambos valores y decidimos.

$$\left.\begin{array}{l} C(0)=5-\frac{0}{3}=5 \\ C(12)=\frac{1}{4}12^2-48+18=6 \end{array}\right\}$$ La cantidad máxima se produce en el mes 12 y su valor es de 6.

c) Para representar la gráfica hacemos una tabla de valores.

t	$C(t)=5-\frac{t}{3}$
0	5
3	4
6	2 No se incluye

t	$C(t)=\frac{1}{4}t^2-4t+18$
6	3
8	2
10	$25-40+18=3$
12	6



EJERCICIO 4. Análisis. Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \quad si \quad 0\le t\le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$.

a) $B(10)=10^3-18\cdot 10^2+810-3=1000-1800+810-3=7$

Los beneficios en el año 10 es de 7000 €

b) Igualamos la derivada a cero.

$$B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \Rightarrow B´(t)=3t^2-36t+81$$

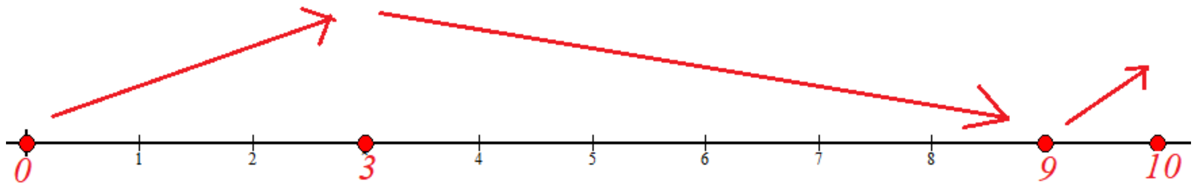
$$B´(t)=0 \Rightarrow 3t^2-36t+81=0 \Rightarrow t^2-12t+27=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 27}}{2}=\frac{12\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{12+6}{2}=9\\ \frac{12-6}{2}=3\end{cases}$$

Vemos como evoluciona la función antes, entre y después de t = 3 y t = 9

- En (0, 3) tomamos t = 2 y la derivada es $B´(2)=12-72+81=21>0$. La función crece en (0, 3).
- En (3, 9) tomamos t = 5 y la derivada es $B´(5)=75-180+81=-24<0$. La función decrece en (3, 9).
- En (9, 10) tomamos t = 10 y la derivada es $B´(10)=300-360+81=21>0$. La función crece en (9, 10).

Los beneficios crecen durante los tres primeros años y del año 9 al 10. Decrecen del año 3 al 9.



c) Valoramos los beneficios en t = 0, t = 3, t = 9 y t = 10.

$$B(0)=-3$$
$$B(3)=3^3-18\cdot 3^2+81\cdot 3-3=105$$
$$B(9)=9^3-18\cdot 9^2+81\cdot 9-3=-3$$
$$B(10)=10^3-18\cdot 10^2+81\cdot 10-3=7$$

El beneficio máximo se alcanza en el año 3 y es de 105000 €.
El beneficio mínimo se alcanza en el año 0 y 9 y es de –3000 €.

d)

$$\int_1^2 B(t)dt = \int_1^2 t^3 - 18t^2 + 81t - 3dt = \left[\frac{t^4}{4} - 18\frac{t^3}{3} + 81\frac{t^2}{2} - 3t\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - 18\frac{2^3}{3} + 81\frac{2^2}{2} - 6\right] - \left[\frac{1^4}{4} - 18\frac{1^3}{3} + 81\frac{1^2}{2} - 3\right] = 4 - 48 + 162 - 6 - \frac{1}{4} + 6 - \frac{81}{2} + 3 = \frac{321}{4}$$

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Llamemos H = “Ser hombre”, así $\overline{H}$ =”Ser mujer”
D = “Ser lector/a de prensa deportiva” y $\overline{D}$ =”No ser lector de prensa deportiva”

Los datos del ejercicio son $P(H)=0.45$; $P(H\cap D)=0.27$; $P(\overline{H}\cap\overline{D})=0.385$.
Construimos una tabla de contingencia para obtener fácilmente el resto de probabilidades.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\overline{D}$)	
Ser hombre (H)	**27**		**45**
Ser mujer ($\overline{H}$)		**38.5**	
			100

Completamos los datos que nos faltan de la tabla.

	Ser lector de prensa deportiva (D)	No ser lector de prensa deportiva ($\overline{D}$)	
Ser hombre (H)	**27**	**18**	**45**
Ser mujer ($\overline{H}$)	**16.5**	**38.5**	**55**
	43.5	**56.5**	**100**

a) De 55 mujeres 16.5 leen la prensa. El porcentaje es $\frac{16.5}{55}=\frac{3}{10}=0.3=30\%$

b) Mujeres son 55 % y hombres que leen la prensa deportiva son 27 %. Los sumamos y hacen un 82%.

c) De 43,5 personas que leen la prensa deportiva son hombres 27. El porcentaje es $\frac{27}{43.5}=\frac{18}{29}\simeq 0.62=62\%$

d) Comprobamos si H y $\overline{D}$ son incompatibles. Para ello debe ser su intersección vacia.
Pero los hombres que no leen prensa deportiva son 18% de la población, luego no es vacio y los sucesos no son incompatibles.

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.
a) ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?
Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

a) La proporción de personas que están dispuestos a aceptar la subida es $pr = 0.15$

Con un nivel de confianza del 95% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{n}} = \frac{0.08}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.15 \cdot 0.85}{n} = \left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.15 \cdot 0.85}{\left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2} \simeq 76.53$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 77 clientes para que el error sea inferior a 0.08 con un nivel de confianza del 95%.

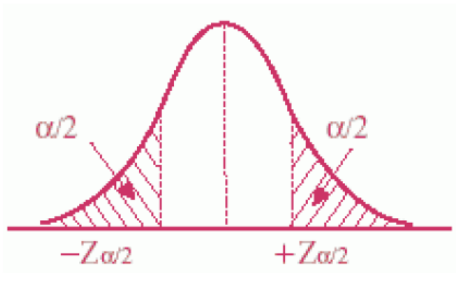
b) El tamaño de la muestra es n = 196.

La proporción de clientes que aceptan la subida es $pr = \frac{37}{196} = 0.19$

y por tanto $qr = \frac{196 - 37}{196} = \frac{159}{196}$.

Con un nivel de confianza del 92% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$



Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{\frac{37}{196} \cdot \frac{159}{196}}{196}} \simeq 0.049$$

El error máximo cometido es 0.049

El intervalo de confianza es $(0.19 - 0.049, \quad 0.19 + 0.049) = (0{,}141, \quad 0.239)$

EJERCICIO 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $A+B$ y $3C-B$.

b) Expresa en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear $A+B=3C-B$ y resuélvalo.

a)

$$A+B=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3C-B=3\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A+B=3C-B$$

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b & 2 \\ a+3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c-b & -9+b & 2 \\ 3c-3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3c-b \\ a-b=-9+b \\ a+3=3c-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a-2b\qquad=-9 \\ a\qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+2b-3c=0 \\ a\qquad=2b-9 \\ a\qquad -3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2b-9+2b-3c=0 \\ 2b-9-3c=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b-3c=9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=4b-9 \\ 2b-3c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b-4b+9=3 \Rightarrow -2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=12-9 \\ a=6-9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3c=3 \\ \boxed{a=-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{c=1}$$

La solución es $\boxed{a=-3; \quad b=3; \quad c=1}$

EJERCICIO 2. Álgebra. El Comité Organizador de un Congreso cuenta con dos tipos de habitaciones, A y B, para ofrecer como alojamiento a sus participantes. Para realizar la contratación, han decidido que el número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A, y que el número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160. Además, se sabe que en total serán necesarias como máximo 200 habitaciones.
a) Plantee el sistema de inecuaciones asociado a este problema.
b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) Si los costes son de 80 € por cada habitación de tipo A y de 50 € por cada habitación de tipo B, ¿cuál es el coste máximo de alojamiento que afrontaría el Comité Organizador? ¿Cuántas habitaciones de cada tipo habría que contratar para que se diese esa situación?

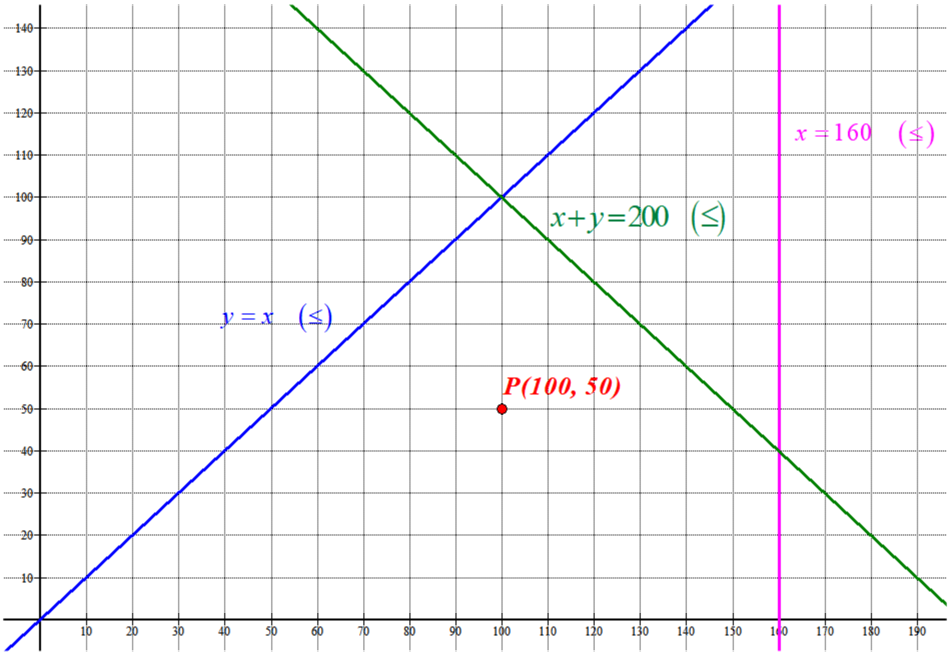
a) Llamamos “x” al número de habitaciones de tipo A e “y” al número de habitaciones tipo B. Las restricciones del problema las expresamos como inecuaciones.

“E*l número de habitaciones de tipo B no debe ser mayor que el número de habitaciones de tipo A*” → $y \leq x$
“E*l número de habitaciones de tipo A no debe ser mayor que 160*” → $x \leq 160$
“E*n total serán necesarias como máximo 200 habitaciones*” → $x + y \leq 200$
Todos los valores son positivos → $x \geq 0;\ y \geq 0$

El conjunto de restricciones forman un sistema de inecuaciones que representaremos como una región del plano, región factible (donde se encuentra la solución del problema).

$$\left.\begin{array}{l} y \leq x \\ x \leq 160 \\ x + y \leq 200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.



$y = x$

x	$y = x$
0	0
100	100

$x = 160$

Recta vertical

$x + y = 200$

x	$y = 200 - x$
0	200
200	0

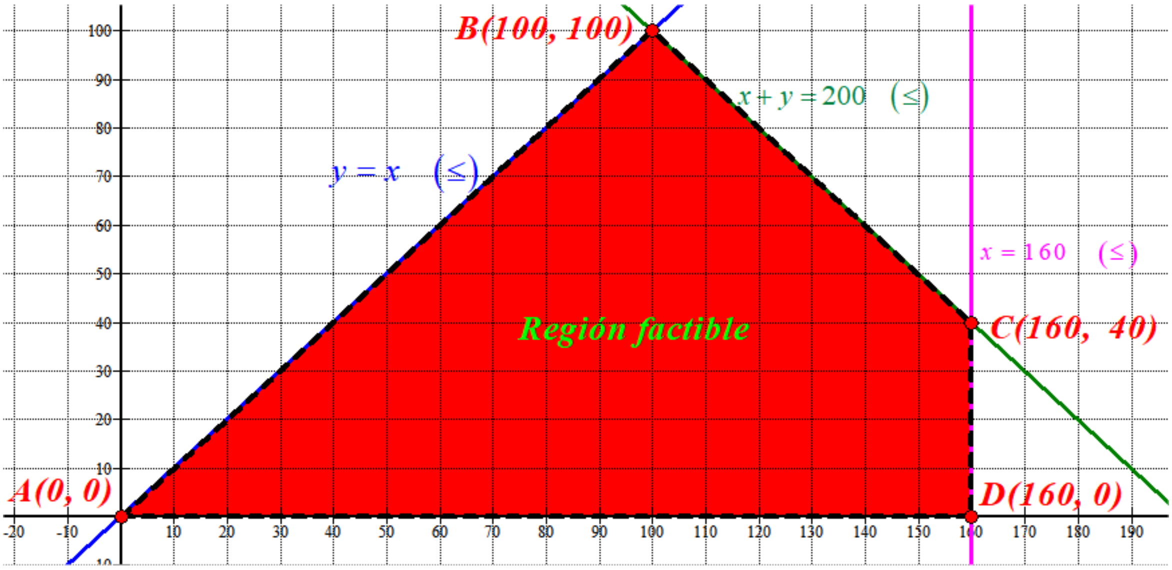
$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

Comprobamos que el punto P(100, 50) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \leq 100 \\ 100 \leq 160 \\ 100 + 50 \leq 200 \\ 100 \geq 0;\ 50 \geq 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas las restricciones}$$

La región factible es la región que contiene al punto P y delimitada por los ejes y las rectas dibujadas. La coloreamos de rojo en la figura. Las coordenadas de los vértices se aprecian en el dibujo y no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones para determinar dichas coordenadas.



c) El coste del alojamiento es la función $C(x,y)=80x+50y$.
Buscamos en qué situación se da un coste máximo y el valor del mismo.
Valoramos el coste en cada vértice y localizamos dicha situación de coste máximo.

A(0, 0) → $C(0,0)=0$
B(100,100) → $C(100,100)=8000+5000=13000$
C(160, 40) → $C(160,40)=14800$
D(160, 0) → $C(160,0)=12800$

El coste máximo es de 14800 € contratando 160 habitaciones de tipo A y 40 de tipo B.

EJERCICIO 3. Análisis. Los gastos financieros de una organización, en cientos de miles de euros, siguen la función: $G(t)=\begin{cases} 4-\left(\dfrac{t}{3}\right), & 0\le t\le 3 \\ (5t-3)/(t+1), & t>3 \end{cases}$ siendo t el tiempo en años transcurridos.

a) ¿En qué momento los gastos son iguales a 400.000 euros? Razona la respuesta.
b) ¿Cuándo crece *G(t)*? ¿Cuándo decrece *G(t)*? ¿Cuándo los gastos alcanzan su valor mínimo y cuánto valen?
c) ¿Qué ocurre con los gastos cuando el número de años crece indefinidamente?

a) Planteamos la igualdad $G(t)=4$ → $\begin{cases} 4-\left(\dfrac{t}{3}\right)=4 \Rightarrow 12-\mathrm{t}=12 \Rightarrow \mathrm{t}=12-12=0, & 0\le t\le 3 \\ (5t-3)/(t+1)=4 \Rightarrow 5\mathrm{t}-3=4\mathrm{t}+4 \Rightarrow t=7, & t>3 \end{cases}$

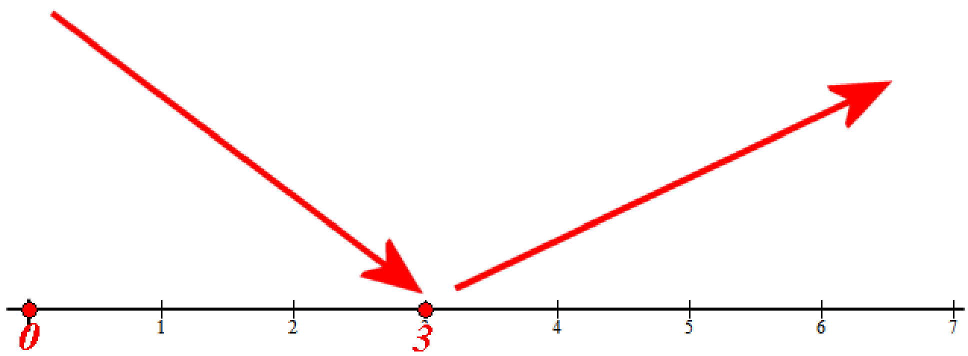
Ocurre en dos momentos. En *t* = *0*, al comienzo y en *t* = *7*, pasados 7 años.

b) Entre el comienzo (t = 0) y los 3 años (*t* = *3*) la función es una recta ($4-\left(\dfrac{t}{3}\right)$) que es decreciente (G´(t) = -1/3 < 0). Los gastos financieros decrecen en $[0,3]$.

A partir de *t* = *3* la función es $G(t)=\dfrac{5t-3}{t+1}$. Estudiamos cómo evoluciona utilizando la derivada.

$$G'(t)=\frac{5(t+1)-(5t-3)}{(t+1)^2}=\frac{5t+5-5t+3}{(t+1)^2}=\frac{8}{(t+1)^2}$$

Esta derivada siempre es positiva, pues numerador y denominador siempre son positivos.
Los gastos financieros del año tercero en adelante crecen.



El valor más bajo en este periodo será el límite de G(t) cuando se acerca a *t* = *3* →
$\lim_{t\to 3^+} G(t)=(15-3)/(3+1)=3$ que coincide con el valor de G(3) = 4 – 3/3 = 3.
Por lo tanto la función alcanza un gasto mínimo en *t* = *3* y es de 300.000 €
La función decrece en $[0,3)$ y crece en $(3,+\infty)$

c) Calculamos el límite de *G(t)* cuando *t* → + ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} G(t)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5t-3}{t+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5t}{t}=5$$

Los gastos tienden a estabilizarse en 500. 000 €.

EJERCICIO 4. Análisis. Una pequeña empresa comercializa paraguas a 60 euros la unidad. El coste de producción diario de " x " paraguas viene dado por la función $C(x) = x^2 - 10x$, estando limitada su capacidad de producción a un máximo de 70 paraguas al día ($0 \leq x \leq 70$)
a) Obtenga las expresiones de las funciones que determinan los ingresos y los beneficios diarios obtenidos por la empresa en función del número de paraguas producidos " x".
b) Determine el número de paraguas que debe producir diariamente para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto ascienden los ingresos, los costes y los beneficios diarios en este caso? Razone la respuesta.

a) Los ingresos que se obtienen por la venta de "x" paraguas es $I(x) = 60x$.
El beneficio es la diferencia entre los ingresos y los gastos (costes de producción).

$$B(x) = I(x) - C(x) = 60x - \left(x^2 - 10x\right) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70$$

b) Utilizamos la derivada de la función Beneficio.

$$B(x) = -x^2 + 70x; \quad 0 \leq x \leq 70 \Rightarrow B'(x) = -2x + 70$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 70 = 0 \Rightarrow x = 35$$
$$B''(x) = -2 < 0$$

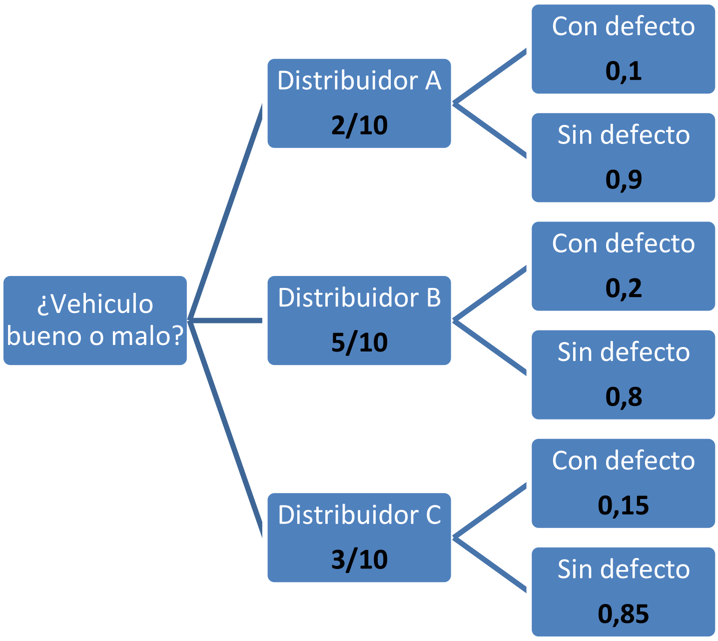
En $x = 35$ se produce un máximo relativo de la función beneficio.

El máximo beneficio se obtiene con una producción de 35 paraguas diarios.
Dicho beneficio máximo es de $B(35) = -35^2 + 70 \cdot 35 = 1225$ €
El coste es de $C(35) = 35^2 - 350 = 875$ € y los ingresos son de 60 · 35 = 2100 €.

Con la producción de 35 paraguas diarios se consigue unos ingresos de 2100 €, con unos costes de 875 € dejando unos beneficios de 1225 €.

EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad. Una empresa de transporte decide renovar su flota de vehículos. Para ello encarga 240 vehículos al distribuidor A, 600 al distribuidor B y 360 al distribuidor C. Se sabe que el 10% de los vehículos suministrados por el distribuidor A tienen algún defecto, siendo estas proporciones del 20% y 15% para los distribuidores B y C respectivamente.
Para aceptar o rechazar el pedido la empresa revisa un vehículo elegido al azar del total de vehículos, rechazando todo el pedido si el vehículo tiene algún defecto.
a) Determine el porcentaje de pedidos rechazados.
b) Si el vehículo revisado resulta ser **NO** defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga del distribuidor A.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer la probabilidad de todos los sucesos implicados en el problema.
Se encargan 240 + 600 + 360 = 1200 vehículos. El porcentaje de vehículos del distribuidor A es 240/1200 = 2/10, del B es de 600/1200 = 5/10 y del C es de 360/1200 = 3/10.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\text{Rechazar pedido}) = P(\text{Vehiculo con defecto}) =$$
$$= P(\text{Distribuidor A})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor A}) +$$
$$+P(\text{Distribuidor B})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor B}) +$$
$$+P(\text{Distribuidor C})P(\text{Vehiculo con defecto / Distribuidor C}) =$$
$$= \frac{2}{10}\cdot 0,1 + \frac{5}{10}\cdot 0,2 + \frac{3}{10}\cdot 0,15 = \frac{0,2+1+0,45}{10} = \frac{1,65}{10} = \boxed{0,165}$$

Se rechazan el 16,5 % de los pedidos

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Sea del distribuidor A / Es no defectuoso}) = \frac{P(\text{Sea del distribuidor A} \cap \text{Es no defectuoso})}{P(\text{Es no defectuoso})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{10}\cdot 0,9}{1-0,165} = \frac{0,18}{0,835} = \boxed{\frac{36}{167} = 0,216}$$

EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad. Una editorial desea conocer el impacto que tendrá la publicación de una nueva obra de un reconocido novelista. Tras entrevistar a 100 personas aficionadas a la lectura, 80 de ellas reconocen que adquirirán esa nueva obra.
a) ¿Con qué nivel de confianza se puede afirmar que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra está entre el 69,7% y el 90,3%?
b) Si se sabe que 8 de cada 10 personas aficionadas a la lectura adquirirán la obra y elegimos una muestra de n =144 de esas personas, calcule la probabilidad de que la proporción de aficionados a la lectura que adquirirán la obra sea superior al 75%.

a) La proporción de personas que comprarían la nueva obra es $pr = \frac{80}{100} = 0,8$

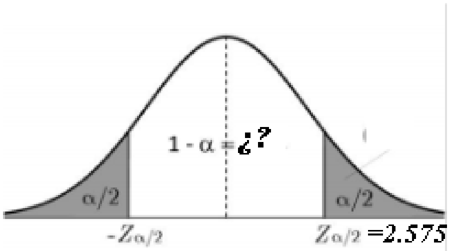
El intervalo de confianza es $(0,697,\ 0,903)$ por lo que su amplitud es 0,903 – 0,697 = 0,206. El error es la mitad de la amplitud → Error = 0,103

Utilizamos la fórmula del error para determinar el valor crítico $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{100}} \Rightarrow 0.103 = z_{\alpha/2} \cdot 0.04 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.103}{0.04} = 2.575$$

Obtengamos el nivel de confianza a partir del valor crítico $z_{\alpha/2} = 2.575$.

$z_{\alpha/2} = 2.575$ → 1 – ∝/2 = 0,995 → ∝/2 = 0,005 → ∝ = 0,01 → 1–∝ = 0,99



El nivel de confianza es del 99%.

b)

Tenemos que $n = 144$ y la proporción es $p = \frac{8}{10} = 0,8$ → $q = 1 - 0.8 = 0.2$

La distribución de la proporción de las muestras de tamaño 144 sigue una normal de parámetros X = $N\left(0.8, \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{144}}\right) = N\left(0.8, \frac{1}{30}\right)$

$$P(X \geq 0.75) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{0.75 - 0.8}{1/30}\right) = P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) = \boxed{0.9332}$$