UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)

Curso 2020 - 2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS II

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.
En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.
Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.
Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.
Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.
Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.
El tiempo disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? **[2 puntos]**

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? **[0.5 puntos]**.

1.2.- Sea A una matriz inversible de orden 2.

(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) **[0.75 puntos]**

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[1.75 puntos]**

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos *(x, y)* que cumplen

$$0\le y,\ 0\le x\le 2,$$
$$x+y\le 3,\ \text{y}$$
$$x+3y\le 6$$

[1.25 puntos]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x,y)=7x+5y \quad \text{y} \quad g(x,y)=x+5y$$ **[1.25 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa gráficamente la función

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

[2.5 puntos].

2.2.- Consideremos la función *f* dada por $f(x)=x^3-3x$.

(a) Halla sus extremos relativos **[1.25 puntos].**

(b) ¿Cuánto vale *f ´(1)*? ¿Cuál es la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto *(1, f(1))*? **[0.75 puntos]**

(c) ¿En qué otro punto *(t, f(t))* corta dicha recta a la gráfica de *f*? **[0.5 puntos]**

2.3.- Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x)=(x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos **[0.75 puntos].**
Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta *y = 10* **[1.75 puntos].**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? **[1 punto]**

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? **[1 punto]**

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era “como Dios manda” si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? **[0.5 puntos]**

3.2.- Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? **[0.5 puntos]**

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545. ¿cuántos meses habrían formado la muestra? **[0.5 puntos]**

3.3.- Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[1.25 puntos].**

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.00744	0.00752	0.00760	0.00767	0.00774	0.00781	0.00788	0.00705	0.00801	0.00807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

SOLUCIONES

Bloque 1. Álgebra y Programación lineal.

1.1.- En el último sorteo de la lotería primitiva Juan acertó 4 números. Su padre le preguntó qué números había acertado. Juan le planteó el siguiente acertijo para que adivinase tres de ellos: la suma de los tres números es 73; si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos; el doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades.

(a) ¿Cuáles eran esos tres números? **[2 puntos]**

(b) ¿Cuál es el cuarto número, si es la mitad de la suma de los dos mayores de los tres anteriores? **[0.5 puntos]**.

a) De los 3 números llamamos "x" al mayor, "y" al intermedio, "z" al menor.

"*La suma de los tres números es 73*" → $x+y+z=73$
"*Si al mayor de los tres números le quitas 3 unidades, obtienes la suma de los otros dos*" → $x-3=y+z$
"*El doble del menor de los tres números más el mayor de ellos es el triple del otro número más 8 unidades*" → $2z+x=3y+8$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=73 \\ x-3=y+z \\ 2z+x=3y+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=73 \\ x=y+z+3 \\ 2z+x=3y+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z+3+y+z=73 \\ 2z+y+z+3=3y+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+2z=70 \\ 3z-2y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=35 \\ 3z-2y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=35-z \\ 3z-2y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 3z-2(35-z)=5 \Rightarrow 3z-70+2z=5 \Rightarrow 5z=75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{75}{5}=15} \Rightarrow \boxed{y=35-15=20} \Rightarrow \boxed{x=20+15+3=38}$$

Los números son 38, 20 y 15.

b) Si llamamos "t" al cuarto número tenemos que $t=\frac{38+20}{2}=29$.

El cuarto número es el 29

1.2.- Sea A una matriz inversible de orden 2.
(i) Halla las matrices X e Y que cumplen que

$$\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=0 \end{cases}$$

(donde I es la matriz identidad $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y 0 es la matriz nula) **[0.75 puntos]**

(ii) En particular, calcula las soluciones X e Y para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **[1.75 puntos]**

(i)

$$\begin{cases} AX+Y=I \\ AX-Y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y=I-AX \\ AX=Y \end{cases} \Rightarrow I-AX=AX \Rightarrow 2AX=I \Rightarrow AX=\frac{1}{2}I \Rightarrow X=\frac{1}{2}A^{-1}I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{2}A^{-1}} \Rightarrow Y=AX=A\frac{1}{2}A^{-1}=\frac{1}{2}AA^{-1}=\frac{1}{2}I \Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{2}I}$$

(ii) Para $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0. \text{ Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=A$$

$$\boxed{X=\frac{1}{2}A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{Y=\frac{1}{2}I=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

1.3.- Dibuja la región del plano formada por los puntos *(x, y)* que cumplen

$$0 \le y,\ \ 0 \le x \le 2,$$
$$x + y \le 3,\ \text{ y}$$
$$x + 3y \le 6$$

[1.25 puntos]

Averigua el valor máximo que alcanzan en dicha región las siguientes funciones, y en qué puntos lo alcanza cada una:

$$f(x, y) = 7x + 5y \quad \text{y} \quad g(x, y) = x + 5y$$

[1.25 puntos]

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región.

$y = 0$ — *Eje OX*

$x = 0$ — *Eje OY*

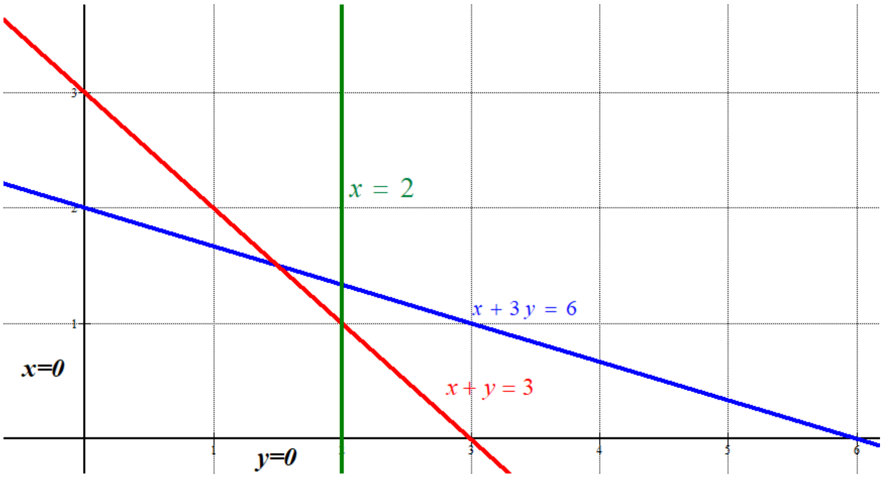
$x = 2$ — Recta *vertical*

$x + y = 3$

x	$y = 3 - x$
0	3
3	0

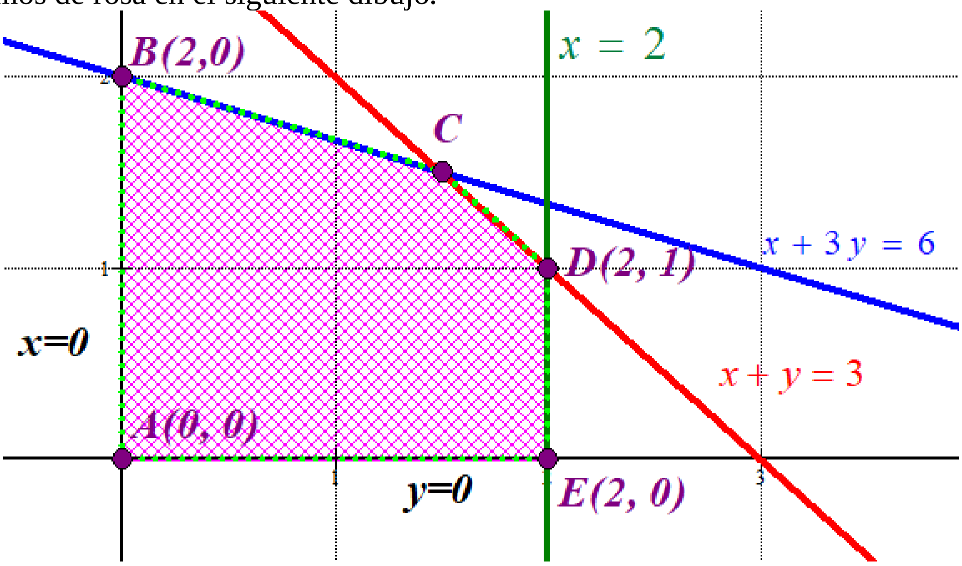
$x + 3y = 6$

x	$y = \frac{6 - x}{3}$
0	2
3	1



Como las inecuaciones son $0 \le y,\ 0 \le x \le 2,\ x + y \le 3,$ y $x + 3y \le 6$ la región del plano que cumple las inecuaciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja, y a la izquierda de la recta vertical verde.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas del vértice C. Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+3y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3-y \\ x+3y=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3-y+3y=6 \Rightarrow 2y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}=1.5 \Rightarrow x=1.5 \Rightarrow \boxed{C(1.5,1.5)}$$

Para averiguar el máximo valor de cada función las valoramos en cada vértice de la región.

Valoro $f(x,y)=7x+5y$ en los vértices

A(0,0) → $f(0,0)=0$

B(0,2) → $f(0,2)=10$

C(1.5, 1.5) → $f(1.5,1.5)=18$

D(2,1) → $f(2,1)=19$

E(2, 0) → $f(2,0)=14$

El valor máximo de $f(x,y)=7x+5y$ en la región es 19 y se alcanza en el punto D(2,1).

Valoro $g(x,y)=x+5y$ en los vértices

A(0,0) → $g(0,0)=0$

B(0,2) → $g(0,2)=10$

C(1.5, 1.5) → $g(1.5,1.5)=9$

D(2,1) → $g(2,1)=7$

E(2, 0) → $g(2,0)=2$

El valor máximo de $g(x,y)=x+5y$ en la región es 10 y se alcanza en el punto B(0,2).

Bloque 2. Análisis.

2.1.- Representa gráficamente la función

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$$

de forma que se aprecien claramente su dominio, sus asíntotas verticales y horizontales, sus cortes con los ejes, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos.

[2.5 puntos].

Dominio.

El dominio son todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1\}$

Asíntotas

Asíntota vertical. $x=a$

¿x = –1?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\frac{(-1)^2-2(-1)}{(-1)^2+2(-1)+1}=\frac{3}{0}=\infty$$

x = –1 es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1+\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=1$$

y = 1 es asíntota horizontal

Puntos de corte con los ejes.

x = 0 → $f(0)=\frac{0^2-0}{0^2+0+1}=\frac{0}{1}=0$. El punto de corte con el eje OY es P(0, 0).

y = 0 → $0=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ o\\ x=2\end{cases}$. Los puntos de corte con el eje OX son P(0, 0) y Q(2, 0).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos relativos

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2+2x+1)-(2x+2)(x^2-2x)}{(x^2+2x+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{4x^2}+2x-\cancel{2x^2}-\cancel{4x}-2-\cancel{2x^3}+4x^2-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=\frac{4x^2+2x-2}{\left(x^2+2x+1\right)^2}$$

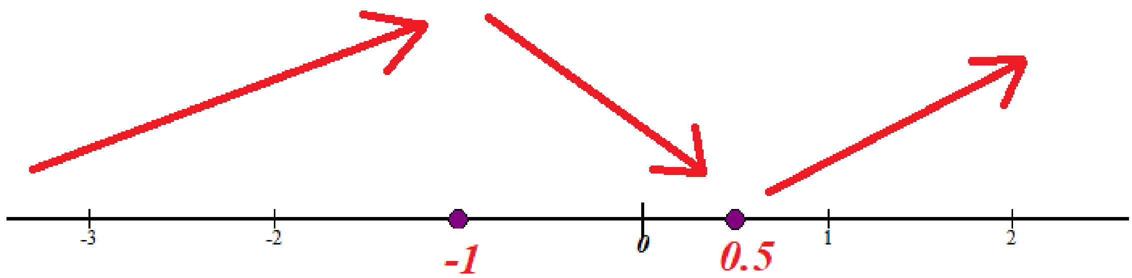
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{4x^2+2x-2}{\left(x^2+2x+1\right)^2}=0\Rightarrow 4x^2+2x-2=0\Rightarrow 2x^2+x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(2)(-1)}}{2(2)}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{4}=\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{-1-3}{4}=-1\notin Dominio\ f(x)\end{cases}$$

Hay un punto crítico: $x = 0.5$. Y un valor excluido del dominio: $x = -1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(-2)=\dfrac{4(-2)^2-4-2}{\left((-2)^2-4+1\right)^2}=\dfrac{8}{+}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,0.5)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(0)=\dfrac{0+0-2}{\left(0^2+0+1\right)^2}=-2<0$. La función decrece en $(-1,0.5)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $\Rightarrow f'(2)=\dfrac{4\cdot 2^2+4-2}{\left(2^2+4+1\right)^2}=\dfrac{18}{+}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

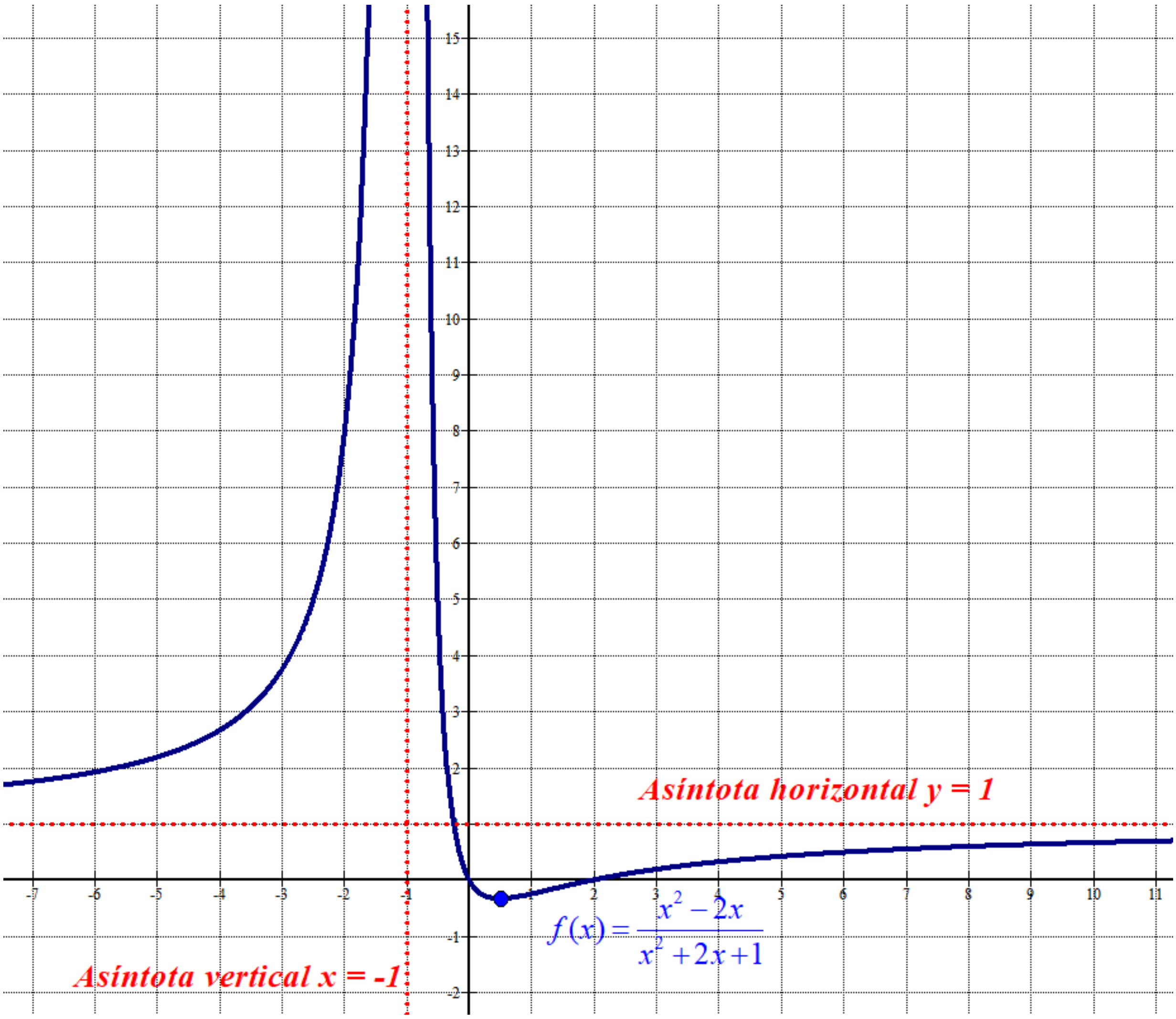
La función sigue el esquema del dibujo.



Como en $x = -1$ es discontinua solo presenta un mínimo relativo en $x = 0.5$.

Como la función vale $f(0.5)=\dfrac{0.5^2-1}{0.5^2+1+1}=-\dfrac{1}{3}$ el punto mínimo relativo tiene coordenadas $M\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3}\right)$

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,0.5)$.


Asíntota horizontal y = 1
Asíntota vertical x = -1
$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+2x+1}$

2.2.- Consideremos la función *f* dada por $f(x) = x^3 - 3x$.

(a) Halla sus extremos relativos **[1.25 puntos].**

(b) ¿Cuánto vale *f ´(1)*? ¿Cuál es la recta tangente a la curva *y = f(x)* en el punto *(1, f(1))*? **[0.75 puntos]**

(c) ¿En qué otro punto *(t, f(t))* corta dicha recta a la gráfica de *f*? **[0.5 puntos]**

a) Derivamos e igualamos a cero en busca de sus extremos relativos.

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en cada uno de los puntos críticos obtenidos.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = -6 < 0 \to x = -1 \text{ es máximo relativo} \\ f''(1) = 6 > 0 \to x = 1 \text{ es mínimo relativo} \end{cases}$$

Como $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$ y $f(1) = 1^3 - 3 = -2$
el máximo relativo tiene coordenadas M(–1, 2) y el mínimo relativo P(1, –2).

b) *f ´(1) = 0* pues en *x = 1* hay un extremo relativo.
Hallamos la recta tangente en *x = 1.*

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -2 \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - (-2) = 0(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -2}$$

La recta tangente en *x = –1* es una recta horizontal con ecuación *y = –2.*

c) Resolvemos el sistema formado por la función y la tangente.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x \\ y = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 = x^3 - 3x \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Función y recta tangente se cortan en el punto de tangencia *x = 1* y además en otro punto más, en *x = –2.*
Como $f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) = -2$ el otro punto de corte tiene coordenadas Q(–2, –2).

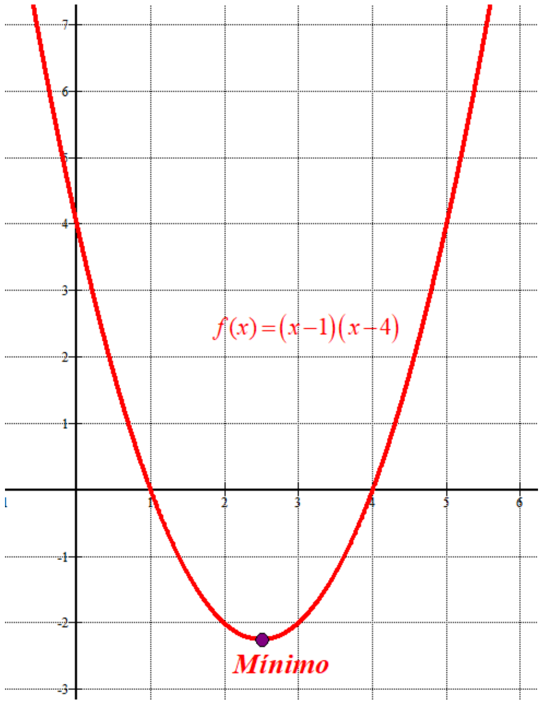
2.3.- Haz un dibujo de la gráfica de la función $f(x)=(x-1)(x-4)$, señalando si existen sus máximos y mínimos **[0.75 puntos].**
Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica y la recta *y = 10* **[1.75 puntos].**

Esta función es una parábola, por lo que tendrá un máximo o un mínimo.

$$f(x)=(x-1)(x-4)=x^2-5x+4 \Rightarrow f'(x)=2x-5$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5$$
$$f''(x)=2 \Rightarrow f''(2.5)=2>0 \text{ En } x=2.5 \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y=x^2-5x+4$
0	4
1	0
2.5	−2.25
4	0
5	4



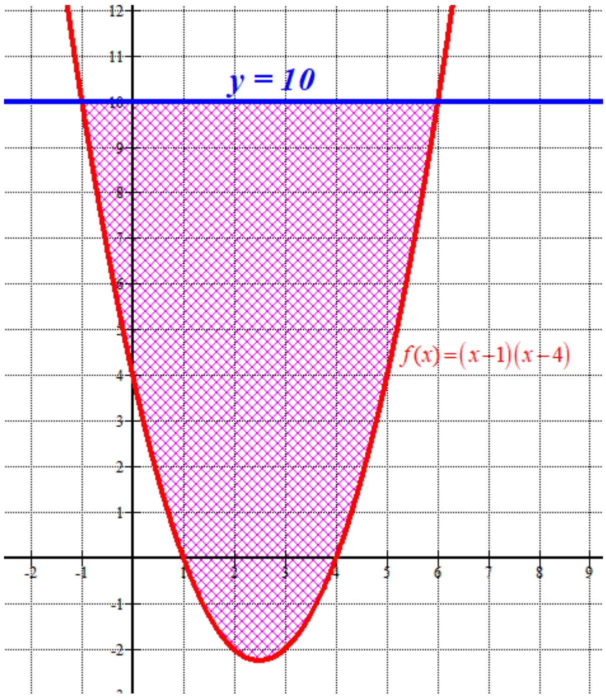
Dibujamos la región de la cual queremos hallar el área.
Vemos donde se cortan.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-5x+4 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-5x+4=10 \Rightarrow x^2-5x-6=0 \Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-6)}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{5\pm 7}{2}=\begin{cases} \frac{5+7}{2}=6 \\ \frac{5-7}{2}=-1 \end{cases}$$

Calculamos su área que es la integral definida entre $x=-1$ y *x = 6* de 10 – *f(x)*.

$$\int_{-1}^{6} 10-\left(x^2-5x+4\right)dx = \int_{-1}^{6} -x^2+5x+6dx = \left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{6} =$$

$$=\left[-\frac{6^3}{3}+5\frac{6^2}{2}+36\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+5\frac{(-1)^2}{2}-6\right]=-72+90+36-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6=\boxed{\frac{343}{6}=57.16\,u^2}$$



Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

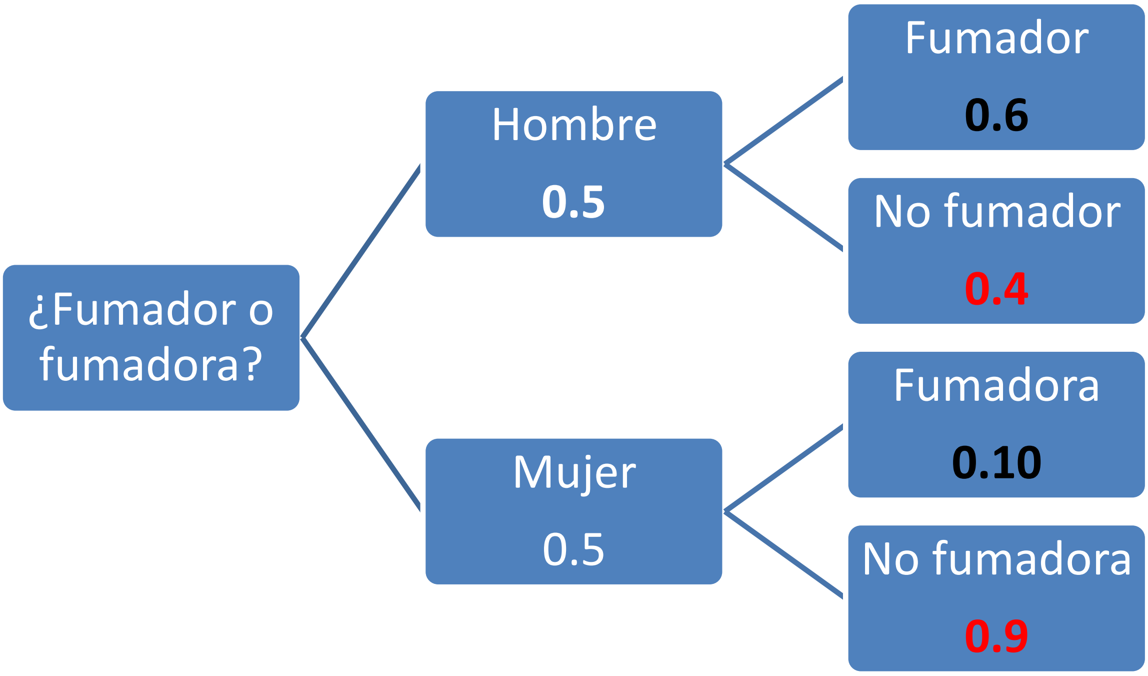
3.1.- Hace un siglo, en cierto país el porcentaje de hombres y mujeres entre la población adulta era en ambos casos del 50 %. El porcentaje de fumadores entre los hombres era del 60 %, mientras que únicamente fumaba la décima parte de las mujeres.

(i) ¿Cuál era el porcentaje de personas fumadoras entre la población adulta de ese país? **[1 punto]**

(ii) Entre las personas fumadoras, ¿cuál era el porcentaje de mujeres? **[1 punto]**

(iii) El abuelo Joaquín decía que una persona era "como Dios manda" si o bien era hombre y fumaba o bien era mujer y no fumaba. ¿Qué porcentaje de personas adultas era como Dios manda, según el abuelo Joaquín? **[0.5 puntos]**

(i) Hacemos un diagrama de árbol.



$$P(Fumar) = P(Hombre)P(Fumar / Hombre) + P(Mujer)P(Fumar / Mujer) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.1 = \boxed{0.35 = 35\,\%}$$

(ii)

$$P(Mujer / Fumador(a)) = \frac{P(Mujer\ y\ fumadora)}{P(Fumador(a))} =$$

$$= \frac{P(Mujer)P(Fumadora / Mujer)}{P(Fumador(a))} = \frac{0.5 \cdot 0.1}{0.35} = \frac{1}{7} \simeq \boxed{14\,\%}$$

(iii)

$$P(Hombre\ y\ fumador\ o\ Mujer\ y\ no\ fumadora) =$$

$$= P(Hombre\ y\ fumador) + P(Mujer\ y\ no\ fumadora) =$$

$$= P(Hombre)P(Fumador / Hombre) + P(Mujer)P(No\ fumadora / Mujer) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 0.9 = 0.75 = \boxed{75\,\%}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si consideramos que hay 100 personas, de ellas 50 son hombres y 50 mujeres.

De los hombres el 60 % fuman, es decir 0.60 · 50 = 30 son fumadores.

De las mujeres el 10 % fuman, es decir, 0.10 · 50 = 5 son fumadoras.

Hay un total de 30 + 5 = 35 personas que fuman.

(i) $P(ser\ fumador) = \frac{30+5}{100} = 0.35 = \boxed{35\,\%}$

(ii) Es el cociente entre mujeres fumadoras (5) y personas fumadoras (30 + 5).

Las mujeres son el $\frac{5}{35} = \frac{1}{7} \simeq \boxed{14\%}$ de las personas que fuman.

(iii) Hombres que fumen son 30 y mujeres que no fuman son 50 – 5 = 45. Por lo que hay 30 + 45 = 75 personas "como Dios manda" de un total de 100 individuos.

El porcentaje de personas "como Dios manda" son $\frac{75}{100} = 0.75 = \boxed{75\,\%}$

3.2.- Los ingresos mensuales por ventas de un establecimiento siguen una distribución normal, con una desviación típica de 900 €. Con los datos de los últimos 9 meses han calculado, como intervalo de confianza para la media mensual de ingresos, el intervalo comprendido entre 4663 y 5839 €.

(a) ¿Cuál fue el promedio de los ingresos en esos nueve meses? **[0.5 puntos]**

(b) ¿Con qué nivel de confianza se ha obtenido el intervalo? **[1.5 puntos]**

(c) Si con el mismo nivel de confianza el intervalo hubiera sido el comprendido entre 4957 y 5545. ¿cuántos meses habrían formado la muestra? **[0.5 puntos]**

X = Ingresos mensuales por ventas de un establecimiento en euros.
X = N(**μ**, 900)

(a)

Si $n = 9$
El intervalo de confianza es (4663, 5839)
La media muestral está en el centro del intervalo.

$$\bar{x} = \frac{4663+5839}{2} = 5251 \text{ €}$$

El promedio de ventas en los 9 meses es de 5251 €

(b)

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

$$Error = \frac{5839-4663}{2} = 588 \text{ €}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{900}{\sqrt{9}} \Rightarrow 588 = z_{\alpha/2} \cdot 300 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{588}{300} = 1.96$$

$$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = P\left(Z \le 1.96\right) = 0.975 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.0
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	[illegible]	0.527
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	[illegible]	0.567
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	[illegible]	0.606
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	[illegible]	0.644
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	[illegible]	0.680
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	[illegible]	0.715
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	[illegible]	0.748
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	[illegible]	0.779
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	[illegible]	0.807
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	[illegible]	0.833
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	[illegible]	0.857
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	[illegible]	0.879
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	[illegible]	0.897
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	[illegible]	0.914
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	[illegible]	0.929
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	[illegible]	0.941
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	[illegible]	0.952
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	[illegible]	0.961
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	[illegible]	0.969
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	[illegible]	0.97500	0.975
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.980

1 – α/2 = 0.975 → α/2 = 0.025 → α = 0.05 → 1– α = 0.95

El nivel de confianza es del 95 %.

(c) Si el intervalo de confianza es (4957, 5545) el error es $\frac{5545-4957}{2}=294$

Utilizamos la fórmula del error para obtener "n" el tamaño de la muestra.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 294 = 1.96\cdot\frac{900}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=\frac{1.96\cdot 900}{294} \Rightarrow n=\left(\frac{1.96\cdot 900}{294}\right)^2 = 36$$

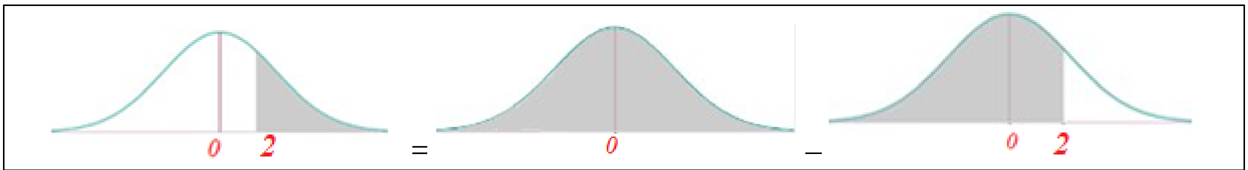
El tamaño de la muestra es 36 meses.

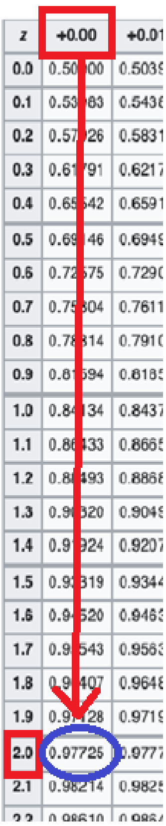
3.3.- Un estudio de la OCDE de 2009 estableció que la estatura media de los adultos varones en España era de 174 cm, con una desviación típica de 8 cm. Asumiremos que la distribución era normal. ¿Cuál era la probabilidad de que un hombre adulto español midiera más de 190 cm? **[1.75 puntos]** Responde utilizando la tabla de la distribución la normal estándar que se incluye al final.

Entre los hombres holandeses, que eran los más altos según aquel estudio, la probabilidad de medir más de 190 cm (suponiendo también una desviación típica de 8 cm y una distribución normal) era 0.15866. ¿Cuál era la estatura media de los hombres holandeses? **[1.25 puntos].**

X = Estatura de un adulto español en cm.
X = N(174, 8)

$$P\left(X \geq 190\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(Z \geq \frac{190-174}{8}\right) = P\left(Z \geq 2\right) = \ldots$$





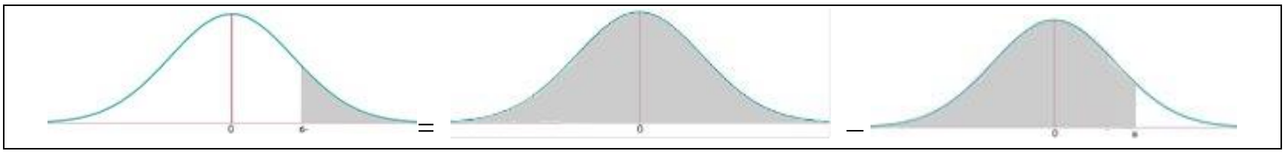
z	+0.00	+0.01
0.0	0.50[illegible]00	0.503
0.1	0.53[illegible]83	0.543
0.2	0.57[illegible]26	0.5831
0.3	0.61[illegible]91	0.6217
0.4	0.65[illegible]42	0.6591
0.5	0.69[illegible]46	0.694
0.6	0.72[illegible]75	0.729
0.7	0.75[illegible]04	0.7611
0.8	0.78[illegible]14	0.791
0.9	0.81[illegible]94	0.818
1.0	0.84[illegible]34	0.8437
1.1	0.86[illegible]33	0.866
1.2	0.88[illegible]93	0.886
1.3	0.90[illegible]20	0.904
1.4	0.91[illegible]24	0.9207
1.5	0.93[illegible]19	0.934
1.6	0.94[illegible]20	0.946
1.7	0.95[illegible]43	0.956
1.8	0.96[illegible]07	0.964
1.9	0.97[illegible]28	0.971
2.0	0.97725	0.977
2.1	0.98214	0.982

$$\ldots = 1 - P\left(Z \leq 2\right) = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

En Holanda si X = Estatura de un adulto holandés en cm.
X = N(μ, 8)

Nos dicen que $P\left(X \geq 190\right) = 0.15866$. Intentamos averiguar la media de estatura en Holanda.

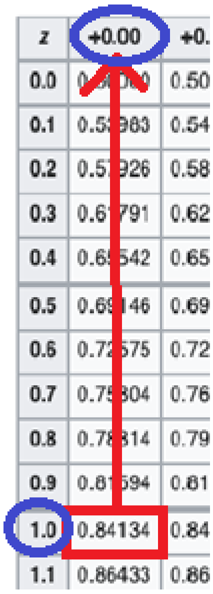
$$P(X \geq 190) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866 \Rightarrow \ldots$$



$$\ldots \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right) = 0.15866 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{190-\mu}{8}\right) = 1 - 0.15866 = 0.84134 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{190-\mu}{8} = 1 \Rightarrow 190 - \mu = 8 \Rightarrow \boxed{\mu = 190 - 8 = 182\ cm}$$

La media poblacional en Holanda es de 182 cm.



z	+0.00	+0.
0.0	0.[illegible]	0.50
0.1	0.5[illegible]983	0.54
0.2	0.5[illegible]926	0.58
0.3	0.6[illegible]791	0.62
0.4	0.6[illegible]542	0.65
0.5	0.69[illegible]46	0.69
0.6	0.72[illegible]75	0.72
0.7	0.75[illegible]04	0.76
0.8	0.78[illegible]14	0.79
0.9	0.81[illegible]94	0.81
1.0	0.84134	0.84
1.1	0.86433	0.86