UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2020-2021**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A tiene inversa.
b) Para $a = 2$, calcule, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de a es $f(x)$ derivable?
b) Para $a = 1$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A)=0.5$, $P(\overline{B})=0.8$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9$.

a) Estudie si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcule $P(\overline{A}/\overline{B})$.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica σ = 8 gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media poblacional de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Suponga que μ = 59 gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real *a*:

$$\left.\begin{array}{r} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 3*.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de *f(x)*.
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se sabe que la derivada de una función real *f(x)* de variable real es:

$$f\,'(x)=3x^2+8x$$

a) Determine la expresión de *f(x)* sabiendo que $f(1)=11$.
b) Determine los máximos y mínimos locales de *f(x)*, si los hubiera.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:
a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

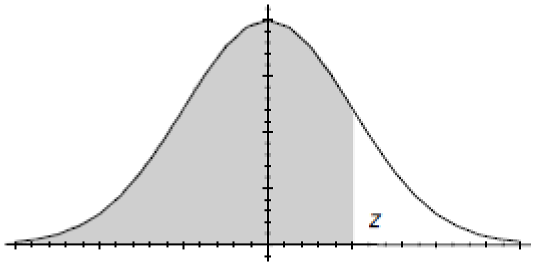
B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica σ = 3 minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos . Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de *z*.



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores del parámetro real *a* para los cuales la matriz *A* tiene inversa.
b) Para *a* = *2*, calcule, si existe, la matriz *X* que satisface $AX=B$.

a) Calculamos el determinante de A y vemos cuando es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -a & -1 \end{vmatrix}=-2a+a-1=-a-1$$

$$|A|=0\Rightarrow -a-1=0\Rightarrow a=-1$$

La matriz A tiene inversa cuando su determinante es no nulo y eso ocurre cuando a ≠ –1.

b) Para *a* = *2* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y tiene inversa, la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-4+2-1=-3\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-3}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Sustituimos y obtenemos la matriz X.

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -4/3 & -5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4/3+1/3-2/3 \\ -2/3+2/3-1/3 \\ 4/3-4/3+5/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 1\longrightarrow 3\times 1$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -5/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros y debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020.

a) Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.

a) Llamamos "x" a la cantidad de metros del modelo A2020 e "y" a la de metros del modelo B2020.

Las restricciones son:

"*Se necesitan al menos 6000 metros de cable*" → $x+y\geq 6000$

"*Del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros*" → $y\leq 5000$

"*Debido al coste de producción no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos*" → $x+y\leq 8000$

"*Se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual a la de metros del modelo A2020*" → $y\geq x$

Las cantidades son positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos todas las inecuaciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 6000 \\ y\leq 5000 \\ x+y\leq 8000 \\ y\geq x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Para dibujar la región factible empezamos dibujando las rectas que la delimitan.

$x+y=6000$

x	$y=6000-x$
0	6000
1000	5000

$y=5000$

x	$y=5000$
1000	5000
3000	5000

$x+y=8000$

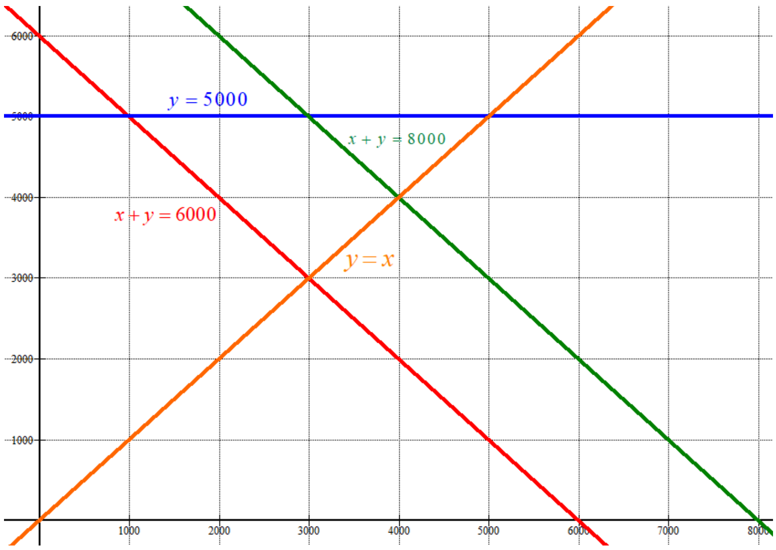
x	$y=8000-x$
0	8000
3000	5000

$y=x$

x	$y=x$
0	0
5000	5000

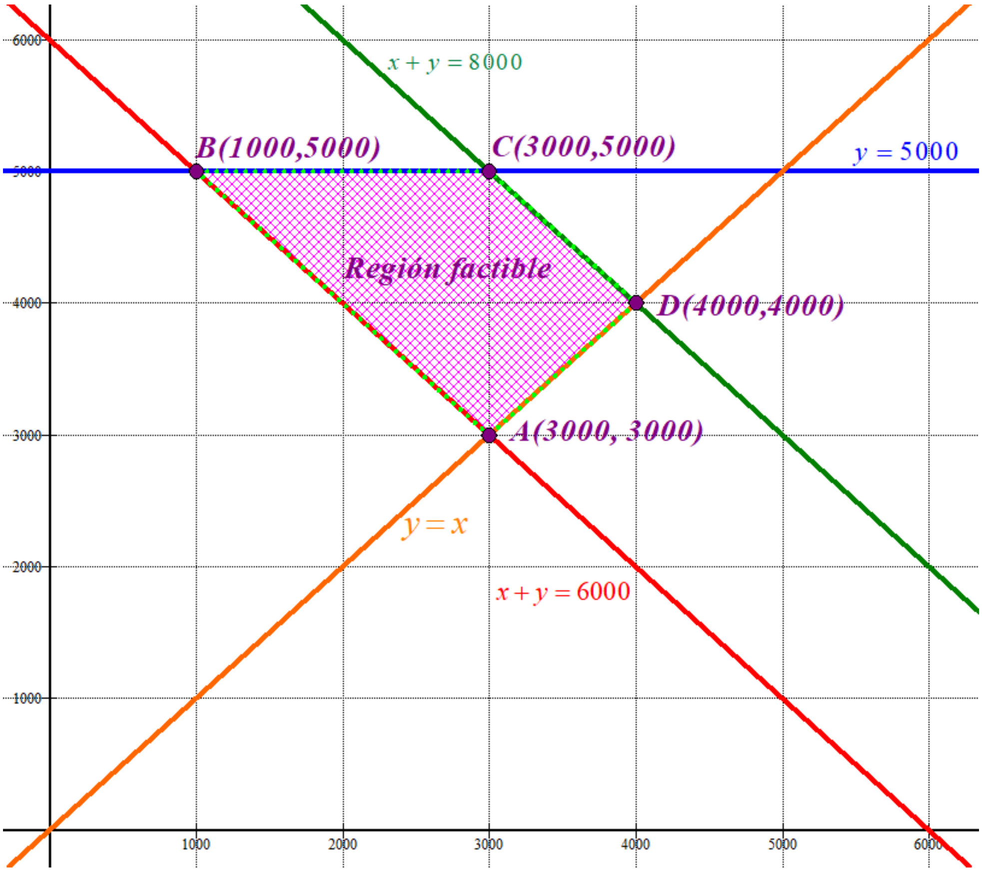
$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer *cuadrante*



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 6000 \\ y\leq 5000 \\ x+y\leq 8000 \\ y\geq x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta roja y naranja y por debajo de las rectas azul y verde.

Coloreamos de rosa la región factible y establecemos las coordenadas de los vértices de dicha región.



b) Se desea minimizar el coste de producción que viene dado como $C(x,y)=2x+0.5y$. Valoramos el coste en cada vértice de la región factible.

A(3000,3000) → $C(3000,3000)=6000+1500=7500$

B(1000, 5000) → $C(1000,5000)=2000+2500=4500$

C(3000, 5000) → $C(3000,5000)=6000+2500=8500$

D(4000, 4000) → $C(4000,4000)=8000+2000=10000$

El coste mínimo satisfaciendo las restricciones se produce en el vértice B(1000, 5000), es decir, con 1000 metros de cable A2020 y 5000 metros de cable B2020. El coste mínimo es de 4500 €.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 3 \\ \dfrac{3a}{x} & si \quad x>3 \end{cases}$$

a) Determine el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de *a* es *f(x)* derivable?
b) Para *a = 1*, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x = 1*.

a) La función es un trozo de parábola en $(-\infty,3)$ que es continua y una fracción que no es continua en *x = 0*, pero no pertenece a su intervalo de definición $(3,+\infty)$.
Para que la función sea continua en todo su dominio solo necesita ser continua en *x =3*, el cambio de definición. Para ello debe cumplirse que $f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^2-3-1=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-x-1=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3a}{x}=\dfrac{3a}{3}=a \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=5}$$

Para *a = 5* la función es continua en *x = 3*.

Veamos si para *a = 5* también es derivable.
Calculamos las derivadas laterales y vemos si coinciden en *x = 3*.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & si \quad x<3 \\ -\dfrac{15}{x^2} & si \quad x>3 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(3^-)=6-1=5 \\ f'(3^+)=-\dfrac{15}{3^2}=-\dfrac{5}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3^-)\neq f'(3^+)$$

La función no es derivable en *x = 3*.

b) Para *a = 1* la función queda $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & si \quad x\le 3 \\ \dfrac{3}{x} & si \quad x>3 \end{cases}$ y en el entorno de *x = 1* la función es la parábola $f(x)=x^2-x-1$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2-x-1 \Rightarrow f(1)=1^2-1-1=-1 \\ f'(x)=2x-1 \Rightarrow f'(1)=2-1=1 \\ \text{Tangente} \rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-1)=1(x-1) \Rightarrow \boxed{y=x-2}$$

La recta tangente a la función *f(x)* en *x = 1* es $y=x-2$.

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que $P(A)=0.5$, $P(\overline{B})=0.8$ y $P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9$.

a) Estudie si los sucesos *A* y *B* son independientes.

b) Calcule $P(\overline{A}/\overline{B})$.

a) Debemos calcular el valor de *P(B)* y de $P(A\cap B)$.

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-0.8=0.2$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\overline{A}\cup\overline{B})=0.9 \\ \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B} \end{array}\right\} \Rightarrow P(\overline{A\cap B})=0.9 \Rightarrow P(A\cap B)=1-0.9=0.1$$

Para ser independientes los sucesos A y B debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.1 \\ \left.\begin{array}{l} P(A)=0.5 \\ P(B)=0.2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A)P(B)=0.5\cdot 0.2=0.1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.1$$

A y B si son independientes

b)

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cup\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0.5+0.8-0.9}{0.8}=\frac{0.4}{0.8}=\boxed{0.5}$$

También se puede resolver pensando que si A y B son independientes también lo son sus complementarios y así $P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0.5\cdot 0.8=0.4$ y sustituirlo en la fórmula de Bayes.

También se puede hacer pensando que si A y B son independientes también lo son sus complementarios y entonces

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})\,\cancel{P(\overline{B})}}{\cancel{P(\overline{B})}}=P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.5=\boxed{0.5}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica σ = 8 gramos.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media poblacional de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza al 95 % para μ.
b) Suponga que μ = 59 gramos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

a) X = El peso de un huevo (en gramos).
X = N(μ, 8)
Tamaño de muestra = n = 20 y μ = 60

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	[illegible]	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]	0,9
[illegible]	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]	0,9
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0{,}9750}$	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}} = 3.506$$

El intervalo de confianza es:

$$(\mu - Error,\ \mu + Error) = (60 - 3.506,\quad 60 + 3.506) = (56.494,\quad 63.506)$$

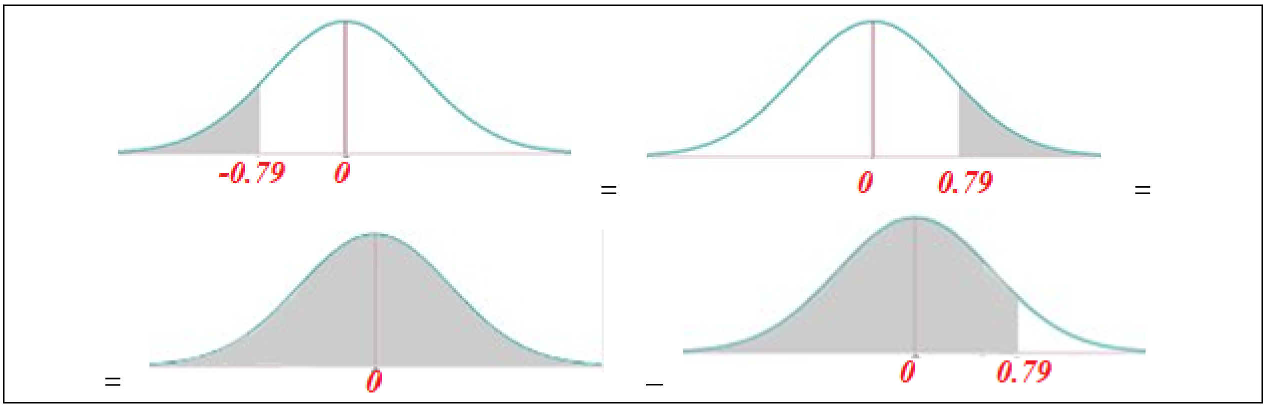
b) X = El peso de un huevo (en gramos).
X = N(59, 8)

$\overline{X_{10}}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\dfrac{8}{\sqrt{10}} = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$.

$$\overline{X_{10}} = N\left(59, \frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$$

$$P\left(57 \leq \overline{X_{10}} \leq 61\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{57-59}{\frac{4\sqrt{10}}{5}} \leq Z \leq \frac{61-59}{\frac{4\sqrt{10}}{5}}\right) = P(-0.79 \leq Z \leq 0.79) =$$

$$= P(Z \leq 0.79) - P(Z \leq -0.79) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z \leq 0.79) - P(Z \geq 0.79) = P(Z \leq 0.79) - \left[1 - P(Z \leq 0.79)\right] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla de N(0, 1)}\} = 0.7852 - [1 - 0.7852] = \boxed{0.5704}$$

z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]	[illegible]
0,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} x+2ay+z=0 \\ -x-ay=1 \\ -y-z=-a \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2a & 1 & 0 \\ -1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -a \end{array}\right)$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=a+0+1-0-2a-0=-a+1$$

$$|A|=0\Rightarrow -a+1=0\Rightarrow a=1$$

Nos planteamos 2 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A/B queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$, obtenemos su matriz triangular equivalente para estudiar el rango de A y de A/B con más facilidad.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila 2ª + Fila 1ª}} \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila 2ª}} \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila 3ª + Fila 2ª}} \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila 3ª}} \end{array}\right\}\Rightarrow (A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si observamos la matriz obtenida vemos que el rango de A es 2 y también el de A/B. Pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para *a = 3* el sistema es compatible determinado (CASO 1).
Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+6y+z=0 \\ -x-3y=1 \\ -y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=-6y-z \\ -x-3y=1 \\ -y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -(-6y-z)-3y=1 \\ -y-z=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6y+z-3y=1 \\ y+z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+z=1 \\ z=3-y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y+3-y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow \boxed{z=3-(-1)=4} \Rightarrow \boxed{x=6-4=2}$$

La solución es: *x = 2*; *y = –1*; *z = 4.*

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) Calcule el dominio y las asíntotas de *f(x).*
b) Determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿*x = 1*?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\frac{1^3-2}{(1-1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty$$

x = 1 es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Obtenemos el valor de "m".

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\boxed{1}$$

Obtenemos el valor de "n".

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-\cancel{2x^2}-\cancel{x^3}+\cancel{2x^2}-x}{x^2-2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x$.

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento estudiamos el cambio de signo de la derivada, empezando por localizar en que momento se anula (puntos críticos).

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(3x^2-4x)(x^2-2x+1)-(x^3-2x^2)(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{3x^4-6x^3+3x^2-4x^3+8x^2-4x-\left(2x^4-2x^3-4x^3+4x^2\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{3x^4-10x^3+11x^2-4x-\left(2x^4-6x^3+4x^2\right)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x^4-4x^3+7x^2-4x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{x^4-4x^3+7x^2-4x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=0\Rightarrow x^4-4x^3+7x^2-4x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^3-4x^2+7x-4\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ o\\ x^3-4x^2+7x-4=0\end{cases}$$

Buscamos las raíces usando el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 7 & -4\\ 1 & & 1 & -3 & 4\\ \hline & 1 & -3 & 4 & \lfloor 0\end{array}\Rightarrow x^3-4x^2+7x-4=(x-1)\left(x^2-3x+4\right)$$

$\boxed{x=1}$ es raíz

$$x^2-3x+4=0\Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}=\text{No existe.}$$

Solo hay dos valores que anulan la derivada: $x = 0$, $x = 1$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f\,'(-1)=\dfrac{(-1)^4-4(-1)^3+7(-1)^2+4}{\left((-1)^2+2+1\right)^2}=1>0$. La función crece en el intervalo $(-\infty,0)$

  .
- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

  $f\,'(0.5)=\dfrac{(0.5)^4-4(0.5)^3+7(0.5)^2-4(0.5)}{\left((0.5)^2-2(0.5)+1\right)^2}=-11<0$. La función decrece en el intervalo $(0,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

  $f\,'(2)=\dfrac{2^4-4(2)^3+7(2)^2-4(2)}{\left(2^2-4+1\right)^2}=4>0$. La función crece en el intervalo $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(0,1)$.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se sabe que la derivada de una función real *f(x)* de variable real es:

$$f\,'(x)=3x^2+8x$$

a) Determine la expresión de *f(x)* sabiendo que $f(1)=11$.

b) Determine los máximos y mínimos locales de *f(x)*, si los hubiera.

a) Integro la función derivada $f\,'(x)=3x^2+8x$ para obtener la función *f(x)*.

$$f\,'(x)=3x^2+8x \Rightarrow f(x)=\int f\,'(x)dx=\int 3x^2+8xdx=x^3+4x^2+K$$

Como además sabemos que $f(1)=11$ podremos determinar el valor de K.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+4x^2+K \\ f(1)=11 \end{array}\right\} \Rightarrow 1^3+4\cdot 1^2+K=11 \Rightarrow K=11-5=6$$

La función tiene la expresión $f(x)=x^3+4x^2+6$

b) Igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+8x=0 \Rightarrow x(3x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 3x+8=0 \Rightarrow x=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Vemos el signo de la derivada segunda en $x = 0$ y en $x=-\dfrac{8}{3}$.

$$f\,'(x)=3x^2+8x \Rightarrow f\,''(x)=6x+8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\,''(0)=0+8=8>0. \text{ Hay un mínimo local en } x=0 \\ f\,''\left(-\dfrac{8}{3}\right)=6\left(-\dfrac{8}{3}\right)+8=-\dfrac{24}{3}<0. \text{ Hay un máximo local en } x=-\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

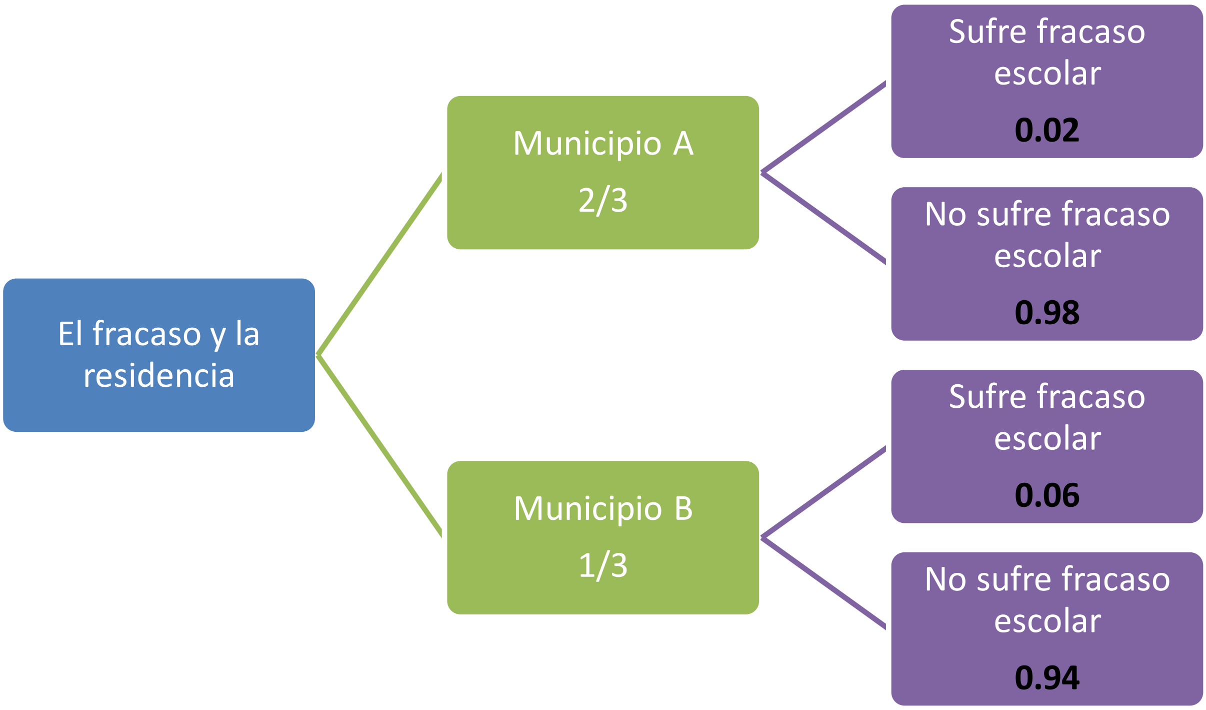
Como $f(0)=0+0+6=6$ el mínimo local tiene coordenadas (0, 6).

Como $f\left(-\dfrac{8}{3}\right)=\left(-\dfrac{8}{3}\right)^3+4\left(-\dfrac{8}{3}\right)^2+6=\dfrac{418}{27}$ el máximo local tiene coordenadas $\left(-\dfrac{8}{3},\dfrac{418}{27}\right)$

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar si se habita en el municipio A es de 0,02, mientras que esa probabilidad si se habita en el municipio B es de 0,06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio elegido al azar:

a) No sufra fracaso escolar.
b) Sea del municipio A si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

Hacemos un diagrama de árbol.
Como los matriculados del municipio A son el doble de los matriculados del municipio B, de cada 3 alumnos matriculados 2 son de A y 1 de B. Por lo que la probabilidad de elegir un matriculado de A es 2/3 y de B es 1/3.



Damos nombre a los sucesos que vamos a manejar:
A = Ser alumno matriculado que habita en el municipio A.
B = Ser alumno matriculado que habita en el municipio B.
F = Sufrir fracaso escolar. $\overline{F}$ = No sufrir fracaso escolar.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(\overline{F}) = P(A)P(\overline{F}/A) + P(B)P(\overline{F}/B) = \frac{2}{3}\cdot 0.98 + \frac{1}{3}\cdot 0.94 = \boxed{\frac{29}{30} \simeq 0.967}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/F) = \frac{P(A\cap F)}{P(F)} = \frac{P(A)P(F/A)}{1-P(\overline{F})} = \frac{\frac{2}{3}\cdot 0.02}{1-\frac{29}{30}} = \boxed{\frac{2}{5} = 0.4}$$

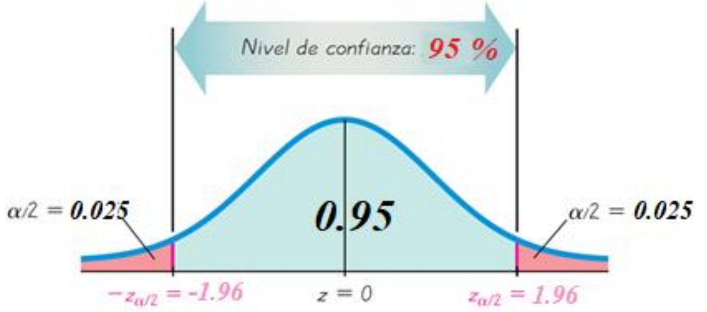
B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ minutos y desviación típica σ = 3 minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto con un nivel de confianza del 95 %.
b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño n = 16 pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\overline{X}$, sea menor que 30,5 minutos.

a) X = El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico (en minutos).
X = N(μ, 3)
¿Tamaño mínimo de muestra = n?

Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	$\boxed{0{,}9750}$	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \Rightarrow 1.96 \cdot 3 = \sqrt{n} \Rightarrow n = (1.96 \cdot 3)^2 = 34.5744$$

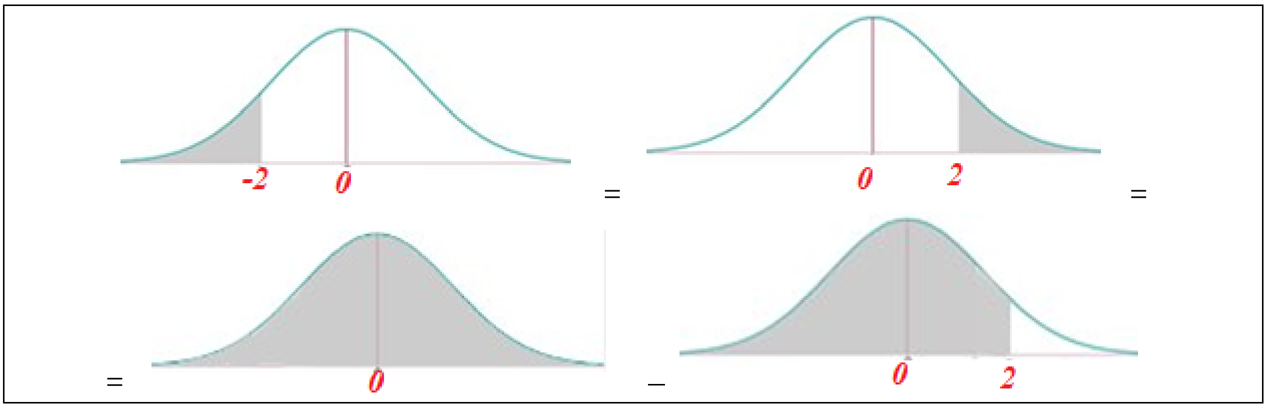
El tamaño mínimo de la muestra es de 35 pruebas.

b) X = El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico (en minutos).
X = N(32, 3)

$\overline{X_{16}}$ sigue una distribución normal de la misma media y desviación típica $\frac{3}{\sqrt{16}} = 0.75$.

$\overline{X_{16}} = N(32, 0.75)$

$$P\left(\overline{X_{16}} < 30.5\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{30.5-32}{0.75}\right) = P(Z < -2) = ...$$



$$... = P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Miramos en la tabla de N(0, 1)}\} = 1 - 0.9772 = \boxed{0.0228}$$

z	,00	,01
0,0	0,5[illegible]00	0,50
0,1	0,5[illegible]98	0,54
0,2	0,5[illegible]93	0,58
0,3	0,6[illegible]79	0,62
0,4	0,6[illegible]54	0,65
0,5	0,6[illegible]15	0,69
0,6	0,7[illegible]57	0,72
0,7	0,7[illegible]80	0,76
0,8	0,7[illegible]81	0,79
0,9	0,8[illegible]59	0,81
1,0	0,8[illegible]13	0,84
1,1	0,8[illegible]43	0,86
1,2	0,8[illegible]49	0,88
1,3	0,9[illegible]32	0,90
1,4	0,9[illegible]92	0,92
1,5	0,9[illegible]32	0,93
1,6	0,9[illegible]52	0,94
1,7	0,9[illegible]54	0,95
1,8	0,9[illegible]41	0,96
1,9	0,9[illegible]13	0,97
2,0	0,9772	0,97
2,1	0,9[illegible]21	0,98
2,2	0,9861	0,98

.