EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

207 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES.

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de *a* y *b* para que se cumpla: $AB=BA$.

b) Para *a = 1* y *b = 0*, resuelva la ecuación $XB-A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, *t*, mediante la función $f(t)=\dfrac{10}{(t-6)^2+1}$.

Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+3x+\dfrac{b}{x}$:

a) Calcule los valores *a* y *b* de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,2) y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos)

b) Si en la función anterior *a = 2* y *b = 0*, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x = 1* (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=-x^2+4$ y $g(x)=x^2$. Calcular su área.

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=xe^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int xe^{x^2}dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_0^{1/2} xe^{x^2}dx$ (0,5 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P\left(\overline{A}\right)=0,45$, $P\left(B\right)=0,35$ y $P\left(A\cup B\right)=0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P\left(A\right)$. (0,5 puntos)

b) $P\left(A\cap B\right)$. (1 punto)

c) $P\left(B/A\right)$. (0,5 puntos)

d) $P\left(\overline{A}/\overline{B}\right)$. (0,5 puntos)

SOLUCIONES

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcular el valor de *a* y *b* para que se cumpla: $AB=BA$.

b) Para *a = 1* y *b = 0*, resuelva la ecuación $XB-A=I$, siendo $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

a)

$$AB=BA\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}12 & 2\\ 3a & 3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3b & 2a\\ 3 & 12\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}12=3b\\ 2=2a\\ 3a=3\\ 3b=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4=b\\ 1=a\\ a=1\\ b=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases}}$$

Los valores necesarios para que $AB=BA$ son *a = 1* y *b = 4*.

b) Para *a = 1* y *b = 0* las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

Necesitamos que B sea invertible, lo comprobamos.

$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$ la matriz B tiene inversa.

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación $XB-A=I$.

$$XB-A=I\Rightarrow XB=I+A\Rightarrow X=\left(I+A\right)B^{-1}$$

$$X=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-12 & 2\\ 3-6 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$$

a) Representar gráficamente la región del plano S definido por el sistema de inecuaciones anterior y determine los vértices de dicha región. (1,5 puntos)

b) Calcular los puntos de la región S dónde la función $f(x,y)=3x-2y$ alcanza sus valores máximos y mínimos. (1 punto)

a) Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones y que delimitan la región S que satisface las inecuaciones.

$3x+y=12$

x	$y=12-3x$
3	3
4	0

$y=\dfrac{x}{2}-2$

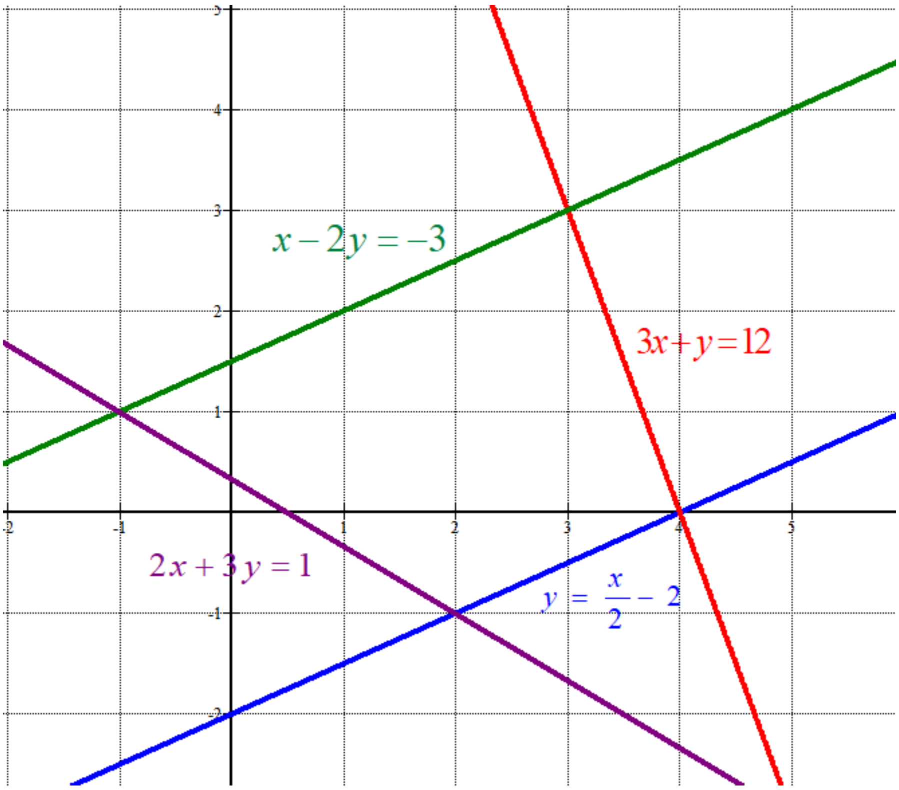
x	$y=\dfrac{x}{2}-2$
0	-2
4	0

$x-2y=-3$

x	$y=\dfrac{x+3}{2}$
-1	1
3	3

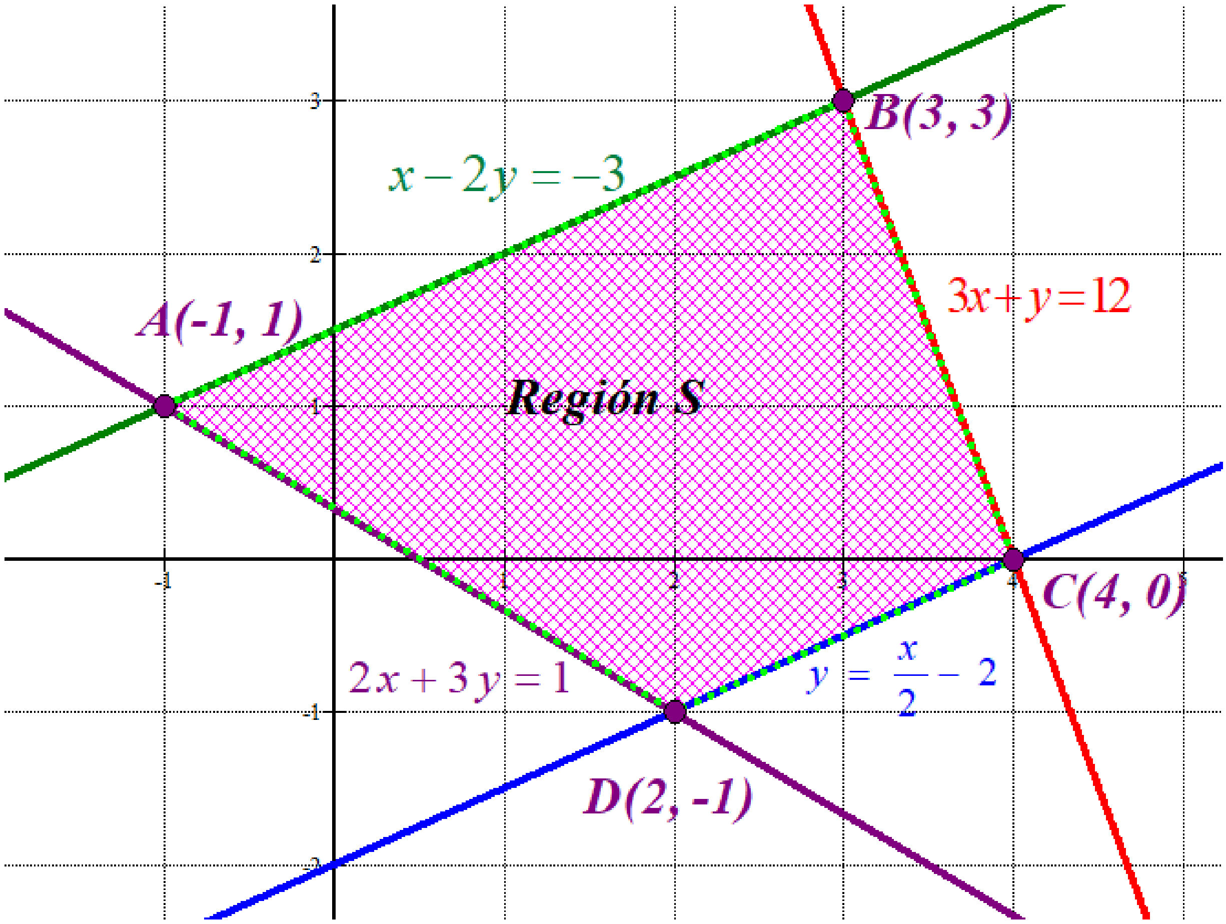
$2x+3y=1$

x	$y=\dfrac{1-2x}{3}$
-1	1
2	-1



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 12 \\ y\ge \dfrac{x}{2}-2 \\ x-2y\ge -3 \\ 2x+3y\ge 1 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada por debajo de la recta roja, por encima de la recta azul, por debajo de la verde y por encima de la violeta.

Coloreo de rosa la región S.



Los vértices de la región S tienen coordenadas A(–1, 1), B(3, 3), C(4, 0) y D(2, –1).

b) Valoramos la función $f(x, y) = 3x - 2y$ en cada uno de los vértices de la región S en busca de un valor máximo y otro mínimo.

A(–1, 1) → $f(-1,1) = -3 - 2 = -5$

B(3, 3) → $f(3,3) = 9 - 6 = 3$

C(4, 0) → $f(4,0) = 12$

D(2, –1) → $f(2,-1) = 6 + 2 = 8$

El valor máximo se alcanza en el vértice C(4, 0) y el mínimo en el vértice A(–1, 1)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) En un concierto celebrado en Murcia se ha estimado el número de miles de jóvenes que han asistido a él en función de la hora de llegada, *t*, mediante la función $f(t)=\frac{10}{(t-6)^2+1}$.
Hallar la hora en el que había el mayor número de personas en el concierto. ¿Cuál fue esa cantidad máxima? Razone la respuesta.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ pues el denominador nunca se anula.

$(t-6)^2+1>0$, para cualquier valor de t.

Derivamos la función y obtenemos sus puntos críticos.

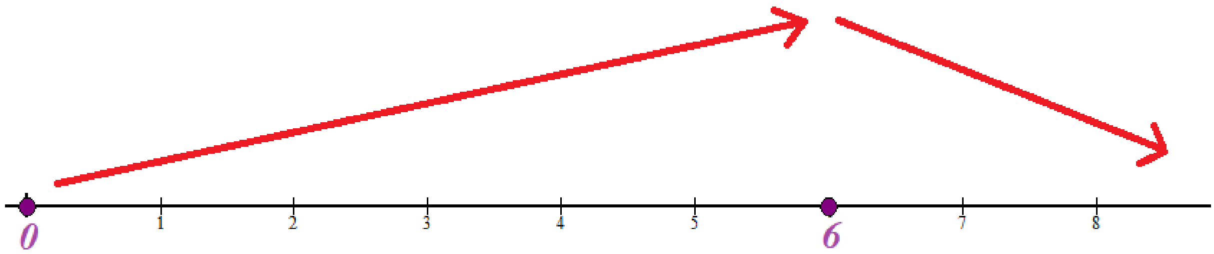
$$f(t)=\frac{10}{(t-6)^2+1}=\frac{10}{t^2-12t+36+1}=\frac{10}{t^2-12t+37}\Rightarrow f'(t)=\frac{-10(2t-12)}{(t^2-12t+37)^2}=\frac{-20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2}$$

$$f'(t)=0\Rightarrow\frac{-20(t-6)}{(t^2-12t+37)^2}=0\Rightarrow -20(t-6)=0\Rightarrow\boxed{t=6}$$

Comprobamos el cambio de signo de la derivada antes y después de *t* = *6*.

- En $(0,6)$ tomamos *t* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{-20(2-6)}{(2^2-24+37)^2}=\frac{80}{+}>0$. La función crece en $(0,6)$
- En $(6,+\infty)$ tomamos *t* = *7* y la derivada vale $f'(7)=\frac{-20(7-6)}{(7^2-84+37)^2}=\frac{-20}{+}<0$. La función decrece en $(6,+\infty)$

La función es continua en $\mathbb{R}$ y sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en *t* = *6*.
El mayor número de personas en el concierto se produce a las 6 horas.

Como $f(6)=\frac{10}{(6-6)^2+1}=10$ la máxima afluencia es de 10000 jóvenes.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x}$:

a) Calcule los valores *a* y *b* de forma que la función tenga un extremo relativo en el punto (1,2) y determine si ese extremo es un máximo o un mínimo. (1,5 puntos)

b) Si en la función anterior *a = 2* y *b = 0*, determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x = 1* (1 punto)

a) La función pasa por el punto de coordenadas (1,2) por lo que se cumple que *f(1) = 2.*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x} \\ f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=a\cdot 1^2+3+\frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{a+b+1=0}$$

La función tiene un extremo relativo en el punto (1,2) significa que $f\,'(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax^2+3x+\frac{b}{x} \Rightarrow f\,'(x)=2ax+3-\frac{b}{x^2} \\ f\,'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=2a+3-\frac{b}{1} \Rightarrow \boxed{2a-b+3=0}$$

Juntamos las dos ecuaciones y resolvemos el sistema que se forma.

$$\left.\begin{array}{l} a+b+1=0 \\ 2a-b+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-a-1 \\ 2a-b+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+a+1+3=0 \Rightarrow 3a+4=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}}$$

Los valores buscados son $a=-\frac{4}{3}$ y $b=\frac{1}{3}$

La función queda $f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1/3}{x}=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1}{3x}$

Obtenemos la derivada segunda y comprobamos si en *x = 1* hay un máximo o un mínimo.

$$f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3x+\frac{1}{3x} \Rightarrow f\,'(x)=-\frac{8}{3}x+3-\frac{1}{3x^2}=-\frac{8}{3}x+3-\frac{1}{3}x^{-2}$$

$$f\,''(x)=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}x^{-3}=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3x^3}$$

$$f\,''(1)=-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0$$

Al ser la derivada segunda negativa en *x = 1* la función presenta un máximo en *x = 1*.

b) Para *a = 2* y *b = 0* la función queda $f(x)=2x^2+3x$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f\,'(1)(x-1)$.

$$f(x) = 2x^2 + 3x \Rightarrow f(1) = 2 + 3 = 5$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x \Rightarrow f\,'(x) = 4x + 3 \Rightarrow f\,'(1) = 4 + 3 = 7$$

$$\left.\begin{array}{r} y - f(1) = f\,'(1)(x-1) \\ f(1) = 5 \\ f\,'(1) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 5 = 7(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 7x - 2}$$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = -x^2 + 4$ y $g(x) = x^2$. Calcular su área.

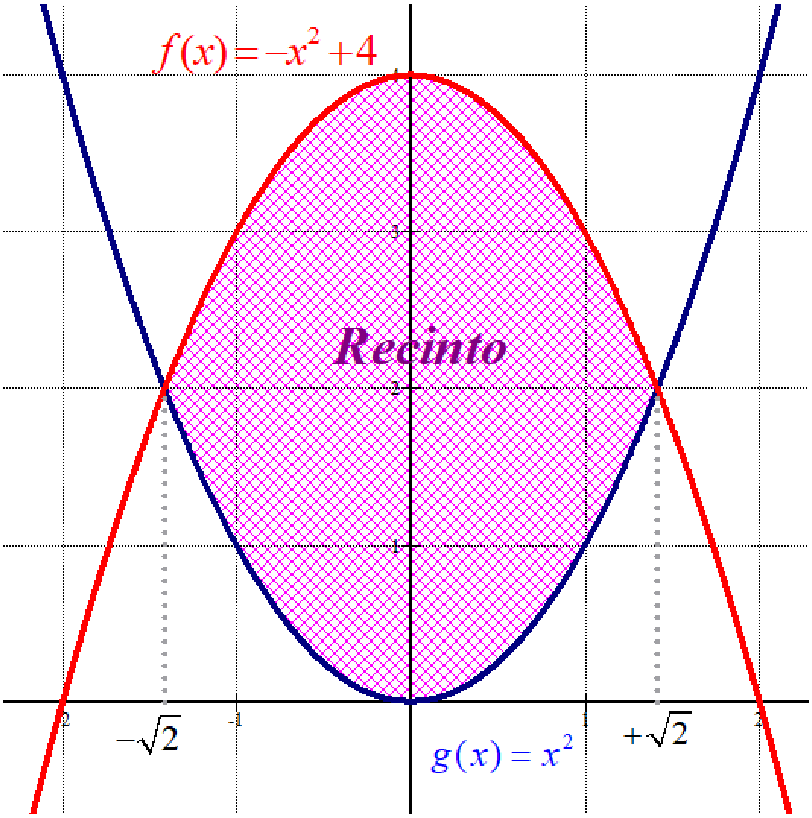
Vemos primero donde se cortan las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^2 + 4 \\ g(x) = x^2 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow 4 = 2x^2 \Rightarrow 2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

El recinto que debemos dibujar empieza en $x = -\sqrt{2}$ y acaba en $x = +\sqrt{2}$.
Hacemos una tabla de valores de cada función y las representamos.

x	$f(x) = -x^2 + 4$
-2	0
-1	3
0	4
1	3
2	0

x	$g(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



El área del recinto es aproximadamente 8 unidades cuadradas (contando cuadraditos).
Calculamos el valor del área con más precisión haciendo uso del cálculo integral.

$$Área = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(-x^2 + 4\right) - x^2 dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -2x^2 + 4dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x\right]_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3 + 4\left(\sqrt{2}\right)\right] - \left[-\frac{2}{3}\left(-\sqrt{2}\right)^3 + 4\left(-\sqrt{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \boxed{\frac{16\sqrt{2}}{3} \simeq 7.54\, u^2}$$

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x)=xe^{x^2}$:

a) Hallar la pendiente de esta función en el punto $x = 0$. (1 punto).

b) Calcular $\int xe^{x^2}dx$ (1 punto).

c) Calcular $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ (0,5 puntos)

a) El valor de la pendiente en $x = 0$ es el valor de la derivada en $x = 0$, es decir, $f\,'(0)$.

$$f(x)=xe^{x^2} \Rightarrow f\,'(x)=e^{x^2}+xe^{x^2}\left(2x\right)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$$

$$f\,'(x)=e^{x^2}\left(1+2x^2\right)\Rightarrow f\,'(0)=e^{0^2}\left(1+2\cdot 0^2\right)=1$$

El valor de la pendiente en el punto $x = 0$ es 1.

b)

$$\int xe^{x^2}dx=\left\{\begin{array}{c}\text{Cambio de variable}\\ x^2=t\Rightarrow 2xdx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right\}=\int \cancel{x}e^t\frac{dt}{2\cancel{x}}=\frac{1}{2}\int e^t dt=\frac{1}{2}e^t=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio de variable}\\ x^2=t\end{array}\right\}=\boxed{\frac{e^{x^2}}{2}+K}$$

c)

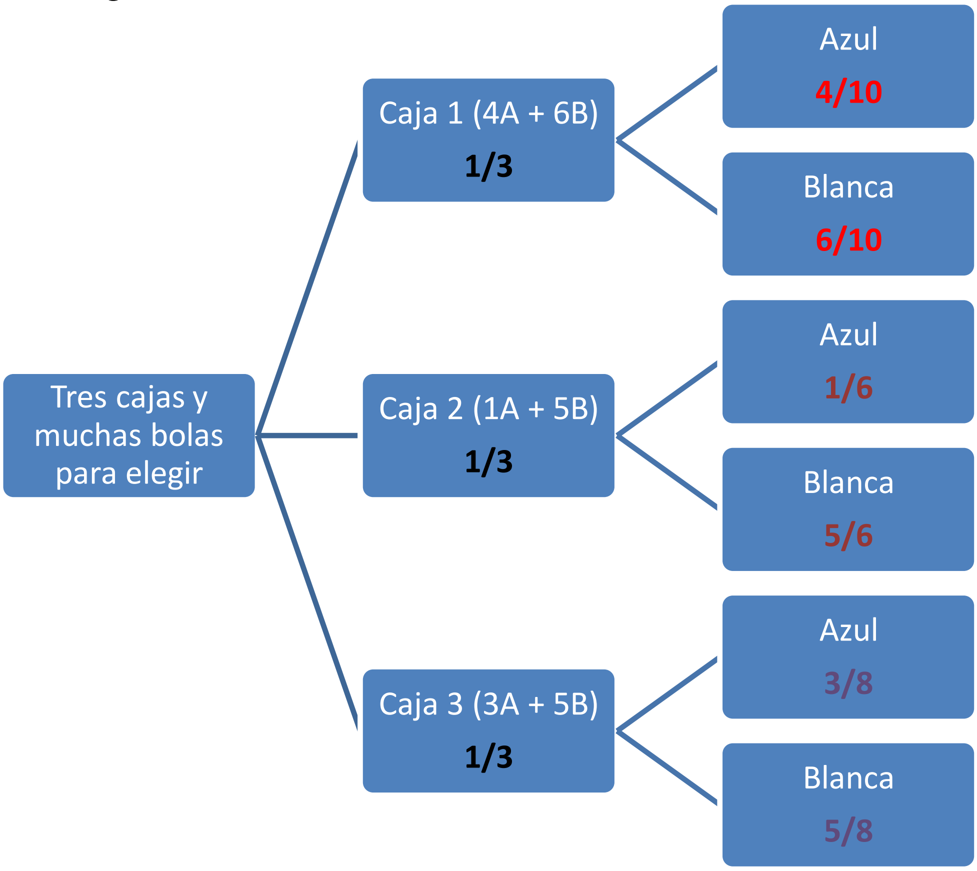
$$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\left[\frac{e^{1^2}}{2}\right]-\left[\frac{e^{0^2}}{2}\right]=\boxed{\frac{e-1}{2}}$$

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Se dispone de tres cajas con bolas de distintos colores. La primera contiene 10 bolas: 4 azules y 6 blancas. En la segunda caja hay una única bola azul y 5 blancas. En la tercera caja tenemos 3 bolas azules y 5 blancas. Cogemos una bola al azar de cualquiera de las cajas:

a) Calcule la probabilidad de que la bola cogida sea azul. (1 punto)

b) Si la bola elegida es blanca, calcule la probabilidad de que estuviera en la primera caja. (1,5 puntos)

Construimos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Sacar bola azul, B = Sacar bola blanca, C1 = Elegir la caja 1, C2 = Elegir la caja 2, C3 = Elegir la caja 3

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y las probabilidades que aparecen en el diagrama de árbol.

$$P(A) = P(C1)P(A/C1) + P(C2)P(A/C2) + P(C3)P(A/C3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \boxed{\frac{113}{360} \simeq 0.314}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C1/B) = \frac{P(C1\cap B)}{P(B)} = \frac{P(C1)P(B/C1)}{1-P(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{1-\frac{113}{360}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{247}{360}} = \boxed{\frac{72}{247} \simeq 0.29}$$

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos) Dados dos sucesos de un experimento aleatorio A y B tales que $P(\overline{A})=0,45$, $P(B)=0,35$ y $P(A\cup B)=0,7$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A)$. (0,5 puntos)

b) $P(A\cap B)$. (1 punto)

c) $P(B/A)$. (0,5 puntos)

d) $P(\overline{A}/\overline{B})$. (0,5 puntos)

a) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,45=\boxed{0.55}$

b)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0,7=0,55+0,35-P(A\cap B)$$

$$\boxed{P(A\cap B)=0,55+0,35-0,7=0,2}$$

c)

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0,2}{0,55}=\boxed{\frac{4}{11}\simeq 0,366}$$

d)

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0,7}{1-0,35}=\boxed{\frac{6}{13}\simeq 0,46}$$