GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2021	CONVOCATORIA: JULIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. *(3 puntos)*

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA+C=XB$. *(4 puntos)*

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. *(3 puntos)*

Problema 3. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x) = 4x^2 + 800x$. Gastos: $G(x) = 6x^2 + 460x + 672$.

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? *(4 puntos)*

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? *(3 puntos)*

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. *(3 puntos)*

Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. *(4 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. *(3 puntos)*

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? *(3 puntos)*

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. *(2,5 puntos)*

b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. *(2,5 puntos)*

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. *(2,5 puntos)*

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

(2,5 puntos)

Soluciones:

Problema 1. Una empresa está especializada en la preparación de mezclas de café. Utilizando café colombiano, brasileño y keniata, la empresa quiere comercializar paquetes de 1 kg con un coste de 8,50 € el paquete. El precio de un kilo de cada clase de café es, respectivamente, de 10 €, 6 € y 8 €. Sabiendo que la cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño, calcula el porcentaje de cada tipo de café que ha de utilizarse en la mezcla.

(Planteamiento correcto 5 puntos - Solución correcta 5 puntos)

Llamamos "x" a los kilos de café colombiano de la mezcla, "y" a los kilos de café brasileño y "z" a los kilos de café keniata.

Supongamos que hacemos 100 kg de café con la mezcla pedida → $x+y+z=100$

El precio de la mezcla es 8,5 €/kg, el café colombiano a 10 €/kg, a 6 €/kg el brasileño y a 8 €/kg el keniata → $10x+6y+8z=8.5\cdot 100$

La cantidad de café colombiano de la mezcla ha de ser el triple de la de café brasileño → $x=3y$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 10x+6y+8z=8.5\cdot 100 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ 10x+6y+8z=850 \\ x=3y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+y+z=100 \\ 30y+6y+8z=850 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y+z=100 \\ 36y+8z=850 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=100-4y \\ 36y+8z=850 \end{array}\right\} \Rightarrow 36y+8\left(100-4y\right)=850 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36y+800-32y=850 \Rightarrow 4y=50 \Rightarrow \boxed{y=\frac{50}{4}=12.5} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=100-4\cdot 12.5=50} \\ \boxed{x=3\cdot 12.5=37.5} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 37.5$, $y = 12.5$, $z = 50$.

Los porcentajes de cada café en la mezcla es 37.5 % de café colombiano, 12.5 % de café brasileño y 50 % de café keniata.

De 8 partes se echan 4 de café keniata, 3 de café brasileño y 1 de café colombiano.

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}\qquad y\qquad C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. *(3 puntos)*

b) Calcula la matriz X de dimensión 2×3, que satisface la ecuación $XA+C=XB$. *(4 puntos)*

c) ¿Es posible hacer el producto BC? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto CB? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. *(3 puntos)*

a)

$$A-B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$|A-B|=\begin{vmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=6\neq 0.\text{ Existe la inversa.}$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{Adj\left((A-B)^T\right)}{|A-B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\3&0&0\\2&2&0\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&0\\2&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\2&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(A-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&-1/3&-2/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}$$

b) Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XA+C=XB\Rightarrow XA-XB=-C\Rightarrow X(A-B)=-C\Rightarrow X=-C(A-B)^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices y hacemos las operaciones para obtener X.

$$X=-C(A-B)^{-1}$$

$$X=-\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&-1/3&-2/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&-1&5-2\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}+1&2-\frac{2}{3}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&-1&3\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}}$$

c)

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 2}\times 3 \longrightarrow ¡¡¡NOOO!!!! \quad ¡¡3 \neq 2!!$$

No es posible hacer BC, pues el número de columnas de B (3) no coincide con el de filas de C (2)

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3 \longrightarrow 2\times 3 \qquad ¡¡¡SIIII!!!! \quad ¡¡3 = 3!!$$

Si es posible hacer CB, pues el número de columnas de C (3) es igual al número de filas de B (3).

$$CB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 10+3 \\ 1 & 1+6 & 4+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 13 \\ 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 3 \longrightarrow 2\times 3$$

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-36}{x^2-2x-8}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*

d) Los máximos y mínimos locales. *(2 puntos)*

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados de los apartados anteriores. *(2 puntos)*

a) Es una función cociente de dos polinomios su dominio lo forman todos los números reales salvo los que anulen el denominador.

$$x^2-2x-8=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-8)}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{2-6}{2}=-2\\[2mm] \dfrac{2+6}{2}=4\end{cases}$$

Dominio $f(x)=\mathbb{R}-\{-2,4\}$

<u>Puntos de corte con los ejes coordenados</u>.

Si $x = 0$ → $f(0)=\dfrac{0^2-36}{0^2-0-8}=\dfrac{36}{8}=4.5$. El punto de corte es (0, 4.5).

Si y = 0 → $0=\dfrac{x^2-36}{x^2-2x-8}\Rightarrow x^2-36=0\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=\sqrt{36}=\pm 6$. Los puntos de corte son $(-6,0)$ y $(6,0)$

b)

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x = -2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{(-2)^2-36}{(-2)^2-2(-2)-8}=\frac{-32}{0}=\infty$$

La recta $x = -2$ es asíntota vertical

¿$x = 4$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\frac{4^2-36}{4^2-2(4)-8}=\frac{-20}{0}=\infty$$

La recta $x = 4$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-36}{x^2-2x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{36}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{2x}{x^2}-\dfrac{8}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{36}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}=\frac{1-\dfrac{36}{\infty}}{1-\dfrac{2}{\infty}-\dfrac{8}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La asíntota horizontal es *y = 1*.

c) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-2x-8\right)-(2x-2)\left(x^2-36\right)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2-16x-\cancel{2x^3}+72x+2x^2-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x^2+56x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2x^2+56x-72}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=0\Rightarrow -2x^2+56x-72=0\Rightarrow x^2-28x+36=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{28\pm\sqrt{(-28)^2-144}}{2}=\frac{28\pm 8\sqrt{10}}{2}=14\pm 4\sqrt{10}=\begin{cases}14-4\sqrt{10}\simeq\boxed{1.35}\\14+4\sqrt{10}\simeq\boxed{26.65}\end{cases}$$

Veamos como evoluciona el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos. Añadimos los puntos de discontinuidad (*x = –2* y *x = 4*)

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale

  $f'(-3)=\frac{-2(-3)^2+56(-3)-72}{\left((-3)^2-2(-3)-8\right)^2}=\frac{-258}{49}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$

- En $\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{-72}{(-8)^2}<0$.

  La función decrece en $\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)$

- En $\left(14-4\sqrt{10},\,4\right)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=\frac{-18+168-72}{(9-6-8)^2}=\frac{78}{25}>0$.

  La función crece en $\left(14-4\sqrt{10},\,4\right)$

- En $\left(4,\,14+4\sqrt{10}\right)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale

  $f'(10)=\frac{-200+560-72}{(100-20-8)^2}=\frac{288}{72^2}>0$. La función crece en $\left(4,14+4\sqrt{10}\right)$

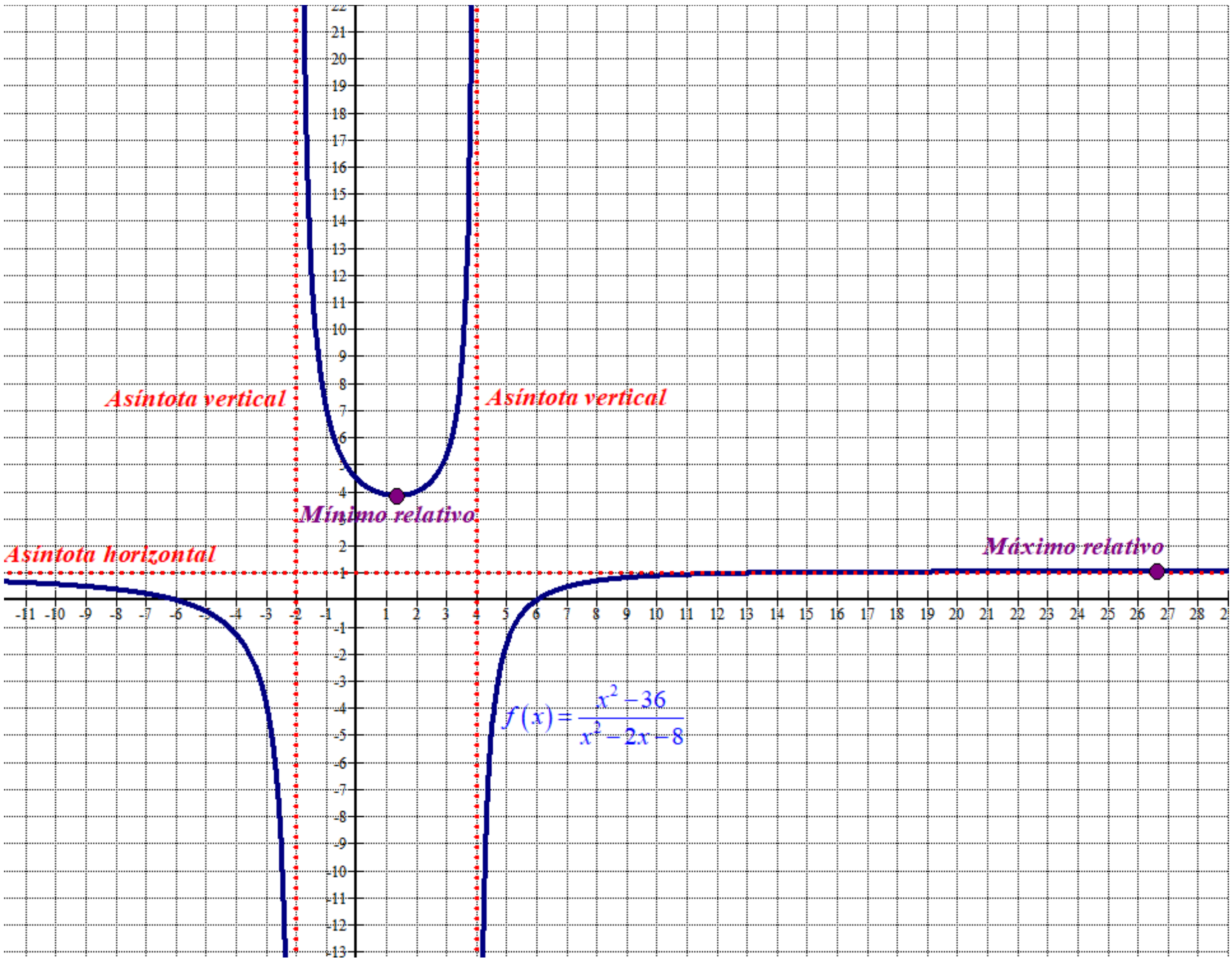
- En $\left(14+4\sqrt{10},\,+\infty\right)$ tomamos *x = 100* y la derivada vale

  $f'(100)=\frac{-20000+5600-72}{(10000-200-8)^2}=\frac{-14472}{(10000-200-8)^2}<0$. La función decrece en $\left(14+4\sqrt{10},\,+\infty\right)$

La función decrece en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,14-4\sqrt{10}\right)\cup\left(14+4\sqrt{10},+\infty\right)$ y crece en $\left(14-4\sqrt{10},4\right)\cup\left(4,14+4\sqrt{10}\right)$.

d) Por el análisis anterior la función presenta un mínimo relativo en $x=14-4\sqrt{10}$, pues en este punto cambia de decrecer a crecer. Y un máximo relativo en $x=14+4\sqrt{10}$ pues en este punto la función cambia de crecer a decrecer.
Como $f\left(14-4\sqrt{10}\right)\simeq 3.84$ y $f\left(14+4\sqrt{10}\right)\simeq 1.039$ las coordenadas del mínimo relativo son (1.35, 3.84) y las del máximo relativo son (26.65, 1.039).

e)



Problema 4. Una empresa ha estimado que los ingresos y gastos mensuales (en euros) que genera la fabricación de x unidades de un producto vienen dados por las siguientes funciones:

Ingresos: $I(x)=4x^2+800x$. Gastos: $G(x)=6x^2+460x+672$.

a) La empresa considera rentable el producto si el beneficio que obtiene con él es mayor o igual que 0. ¿Cuál es el número mínimo de unidades que debe fabricar la empresa para que el producto sea rentable? *(4 puntos)*

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es el beneficio obtenido en este caso? *(3 puntos)*

c) El próximo mes se introducirá una nueva normativa que obligará a la empresa a fabricar al menos 100 unidades de este producto. ¿Cuál es el máximo beneficio que podrá obtener la empresa tras la implantación de esta normativa? Justifica tu respuesta. *(3 puntos)*

a) El beneficio *B(x)* es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(x)=I(x)-G(x)=4x^2+800x-\left(6x^2+460x+672\right)$$

$$B(x)=4x^2+800x-6x^2-460x-672$$

$$\boxed{B(x)=-2x^2+340x-672}$$

Comprobamos cuando es mayor o igual que 0.

$$B(x)=0\Rightarrow -2x^2+340x-672=0\Rightarrow x^2-170x+336=0\Rightarrow x=\frac{170\pm\sqrt{(-170)^2-4(336)}}{2}$$

$$x=\frac{170\pm166}{2}=\begin{cases}\dfrac{170-166}{2}=2\\ \dfrac{170+166}{2}=168\end{cases}$$

Para *x < 2*, por ejemplo *x = 1* → $B(1)=-2+340-672=-334<0$ los beneficios son negativos.

Para *2 < x < 168*, por ejemplo *x = 10* → $B(10)=-200+3400-672=2528>0$ los beneficios son positivos.

El mínimo de unidades a fabricar para que el beneficio sea positivo es de 2 unidades.

b) Derivamos la función beneficio e igualamos a cero.

$$B(x)=-2x^2+340x-672\Rightarrow B'(x)=-4x+340$$

$$B'(x)=0\Rightarrow -4x+340=0\Rightarrow x=\frac{340}{4}=85$$

Sustituimos en la segunda derivada *x = 85*.

$$B'(x)=-4x+340\Rightarrow B''(x)=-4\Rightarrow B''(85)=-4<0$$

La función *B(x)* presenta un máximo en *x = 85*.

Como $B(85) = -2 \cdot 85^2 + 340 \cdot 85 - 672 = 13778$ tenemos que el beneficio máximo se consigue con 85 unidades y dicho beneficio máximo es de 13778 €.

c) Sabemos que a partir de *x = 85* la función es decreciente. Si la cantidad mínima a producir es de 100 unidades con estas unidades se obtendrá el máximo beneficio.

$$B(100) = -20000 + 34000 - 672 = 13328$$

El beneficio máximo pasa a ser de 13328 € con la fabricación de 100 unidades.

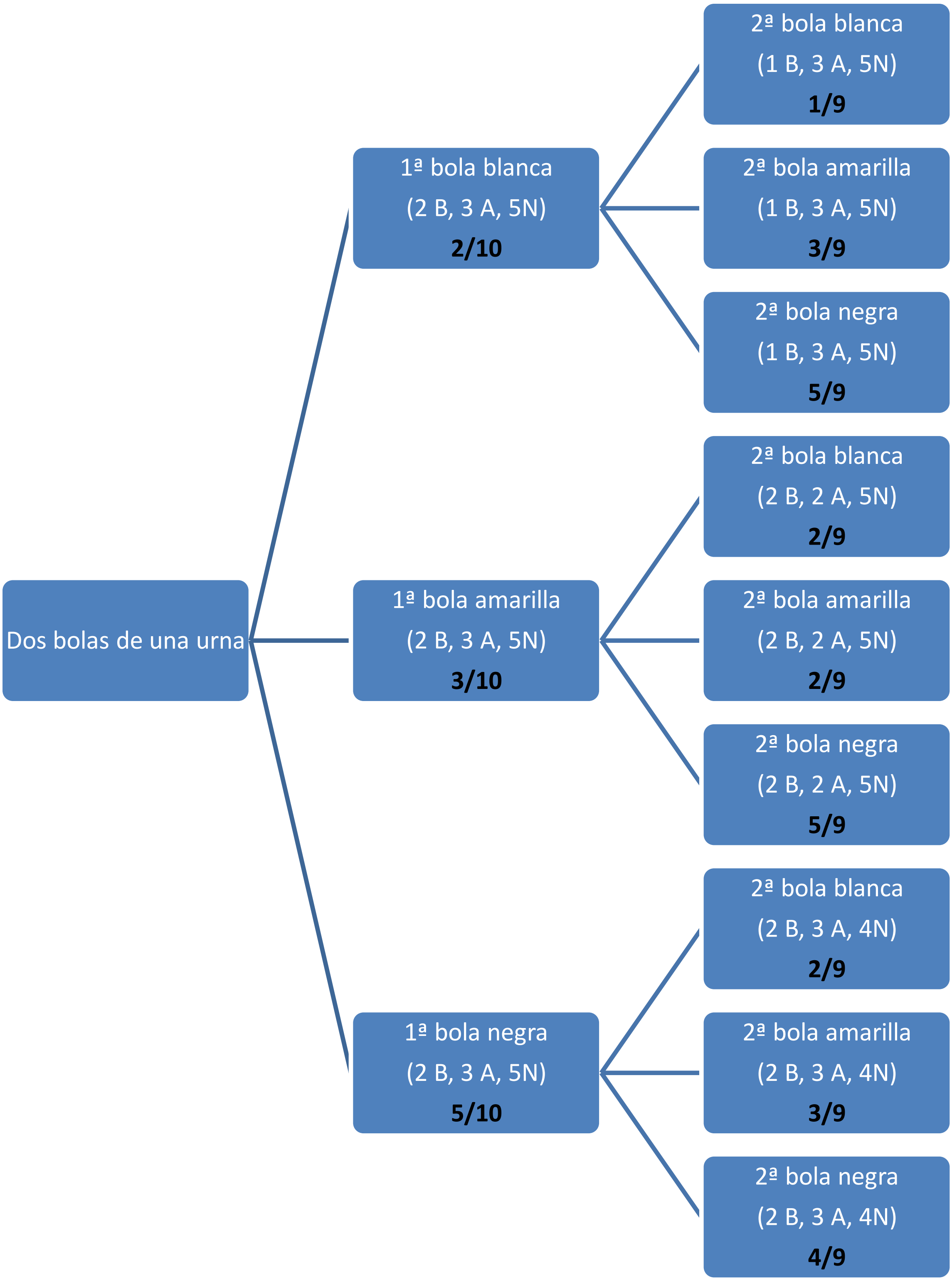
Problema 5. En un sorteo, un jugador extrae dos bolas sin reemplazamiento de una urna que contiene 2 bolas blancas, 3 bolas amarillas y 5 bolas negras. El jugador consigue el primer premio si las dos bolas extraídas son blancas, consigue el segundo premio si las dos bolas extraídas son amarillas y consigue el tercer premio si una de las dos bolas extraídas es blanca y la otra no lo es. No hay más premios en el sorteo.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el primer o el segundo premio. *(4 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de que el jugador consiga el tercer premio. *(3 puntos)*

c) Si un jugador nos dice que ha obtenido premio en el sorteo, ¿cuál es la probabilidad de que haya obtenido el tercer premio? *(3 puntos)*

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos B1 y B2 a sacar bola blanca en primera o segunda extracción respectivamente. De forma análoga llamamos A1 y A2 a sacar amarilla y N1 y N2 a sacar negra en primera o segunda extracción.

a) Para conseguir el primer o segundo premio debe sacar dos blancas o dos amarillas.

$$P\left(\left(B1\cap B2\right)\cup\left(A1\cap A2\right)\right)=P\left(B1\cap B2\right)+P\left(A1\cap A2\right)=$$

$$=P\left(B1\right)P\left(B2/B1\right)+P\left(A1\right)P\left(A2/A1\right)=$$

$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\boxed{\frac{4}{45}\simeq 0.089}$$

b) Consigue el tercer premio si una bola es blanca y la otra no.
Esto se consigue de 4 formas distintas: B1∩A2, B1∩N2, A1∩B2 y N1∩B2.
La probabilidad del suceso es la suma de la probabilidad de cada uno de los enumerados.

$$P\left(\text{Una sola bola blanca}\right)=P\left(B1\cap A2\right)+P\left(B1\cap N2\right)+P\left(A1\cap B2\right)+P\left(N1\cap B2\right)=$$

$$=P\left(B1\right)P\left(A2/B1\right)+P\left(B1\right)P\left(N2/B1\right)+P\left(A1\right)P\left(B2/A1\right)+P\left(N1\right)P\left(B2/N1\right)=$$

$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}=\boxed{\frac{16}{45}\simeq 0.356}$$

c) La probabilidad de obtener el primer, segundo o tercer premio es la suma de las probabilidades de los dos apartados anteriores.

$$P\left(\text{Obtener premio}\right)=\frac{4}{45}+\frac{16}{45}=\frac{20}{45}$$

La probabilidad pedida es una probabilidad condicionada. Aplicamos teorema de Bayes.

$$P\left(\text{Obtener premio 3º/ Ha obtenido premio}\right)=\frac{P\left(\text{Obtener premio 3º y obtener premio}\right)}{P\left(\text{Obtener premio}\right)}=$$

$$=\frac{P\left(\text{Obtener premio 3º}\right)}{P\left(\text{Obtener premio}\right)}=\frac{\frac{16}{45}}{\frac{20}{45}}=\frac{16}{20}=\boxed{\frac{4}{5}=0.8}$$

Problema 6. Una determinada enfermedad afecta actualmente al 5% de la población. El único test disponible para detectar la enfermedad tiene una probabilidad del 99% de clasificar correctamente a los enfermos (probabilidad de que el test dé positivo si la persona tiene la enfermedad), mientras que la probabilidad de que el test dé negativo si la persona no está enferma es del 95%. Se pide:

a) La probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test. *(2,5 puntos)*

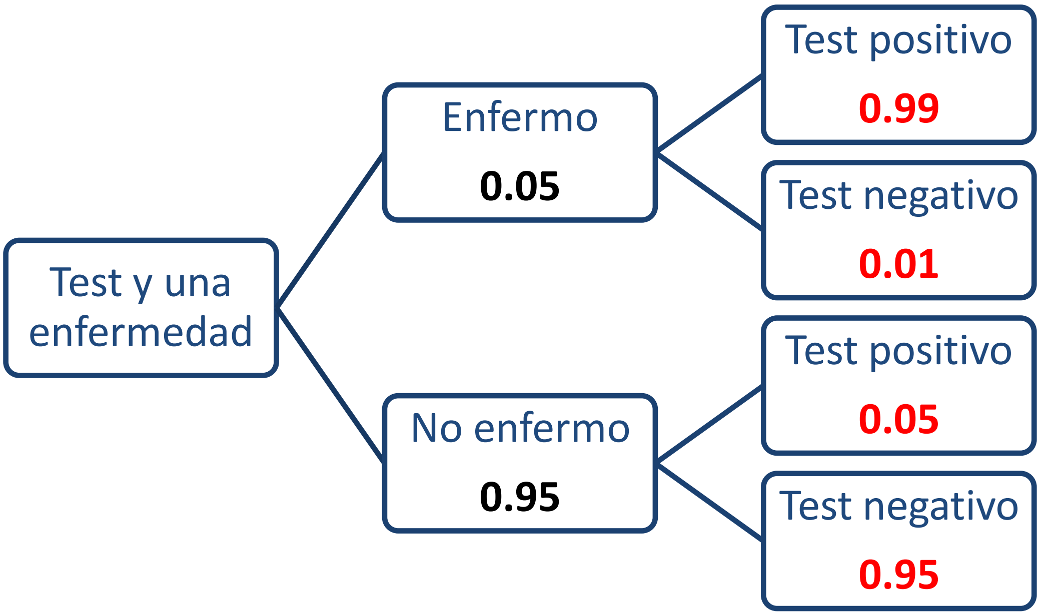
b) La probabilidad de que una persona esté sana si ha dado negativo en el test. *(2,5 puntos)*

c) La probabilidad de que el test dé el resultado correcto. *(2,5 puntos)*

d) Existen indicios para creer que la enfermedad afecta únicamente a un 1% de la población. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona esté enferma si ha dado positivo en el test en este caso?

(2,5 puntos)

Realizamos un diagrama de árbol



Llamamos A = Estar enfermo, $\overline{A}$ = No enfermo.
B = Test positivo, $\overline{B}$ = Test negativo

a) Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B/A)}{P(A)P(B/A)+P(\overline{A})P(B/\overline{A})}=$$

$$=\frac{0.05\cdot 0.99}{0.05\cdot 0.99+0.95\cdot 0.05}=\boxed{\frac{99}{194}\simeq 0.51}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})}{P(A)P(\overline{B}/A)+P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A})}=$$

$$=\frac{0.95\cdot 0.95}{0.05\cdot 0.01+0.95\cdot 0.95}=\boxed{\frac{1805}{1806}\simeq 0.9994}$$

c) Dar el resultado correcto es que dé positivo cuando estás enfermo y dar negativo cuando no estas enfermo.

$$P\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(A\right)P\left(B/A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}/\overline{A}\right)=$$

$$=0.05\cdot 0.99+0.95\cdot 0.95=\boxed{\frac{119}{125}=0.952}$$

d) Si cambiamos la probabilidad de estar enfermo a 0.01 entonces la probabilidad de no estarlo es de 0.99. Cambiamos estos datos en lo realizado en el apartado a).

$$P\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{P\left(A\right)P\left(B/A\right)}{P\left(A\right)P\left(B/A\right)+P\left(\overline{A}\right)P\left(B/\overline{A}\right)}=$$

$$=\frac{0.01\cdot 0.99}{0.01\cdot 0.99+0.99\cdot 0.05}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.167}$$