	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuales son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM=N$

(2 puntos)

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de *r* y *s*. **(1 punto)**
b) Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*. **(1 punto)**

E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1 = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por A = (1,2,3) y es perpendicular a la recta *r*. **(0,5 puntos)**
b) Calcular el plano π_2 que pasa por B = (–1,1,–1) y contiene a la recta *r*. **(1,5 puntos)**

E5.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^5-5x-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de *m > 0* para el cual se verifica que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(mx)}{x^2}=2$ **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & si\ \ x\neq 0\\ 0, & si\ \ x=0\end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x\ln\left(x^2\right)dx$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

Se considera la función $f(x)=x-\cos(x)$.

a) Demostrar que la ecuación *f(x) = 0* tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$.

(1 punto)

b) Probar que la ecuación *f(x) = 0* solo puede tener una solución en el intervalo $[0,\pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:

• El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
• El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
• El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.

Considerando los sucesos: B = “ser blanca”, R = "ser roja", V= "ser verde" y M = "ser de madera"

a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0’3 puntos)**

b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera.

(0’7 puntos)

c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.

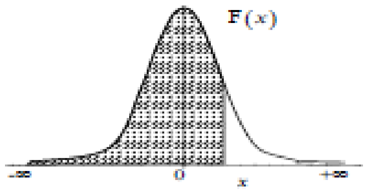
a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105?

(1 punto)

b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9014
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9318
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

a) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-\lambda y=1 \\ 2x+\lambda z=1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=-\lambda^2+2\lambda-\lambda=-\lambda^2+\lambda$$

$$|A|=0 \Rightarrow -\lambda^2+\lambda=0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ o \\ \lambda=1 \end{cases}$$

Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 0 \ y \ \lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Así como el de la matriz ampliada e igual al número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x=1 \\ 2x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x=1 \\ x=1/2 \end{cases} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $\lambda = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y=x-1 \\ z=1-2x \end{cases} \Rightarrow x+x-1+1-2x=0 \Rightarrow 0=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=1-2t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) Resuelto en el apartado anterior. Sus soluciones son $\begin{cases} x=t \\ y=t-1 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}$

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, hallar la matriz P que verifica que $M^{-1}PM=N$

(2 puntos)

Hallamos la inversa de la matriz M.

$$|M|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos de la expresión matricial la matriz P.

$$M^{-1}PM=N\Rightarrow MM^{-1}PMM^{-1}=MNM^{-1}\Rightarrow P=MNM^{-1}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}}$$

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r \equiv x = y+1 = \frac{z-2}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de *r* y *s*. **(1 punto)**

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*. **(1 punto)**

a) Sacamos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv x = y+1 = \frac{z-2}{2} \Rightarrow r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,-1,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3+x \\ z=3+2x \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(0,3,3) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,2) \end{cases}$$

¿Los vectores directores tienen coordenadas proporcionales?

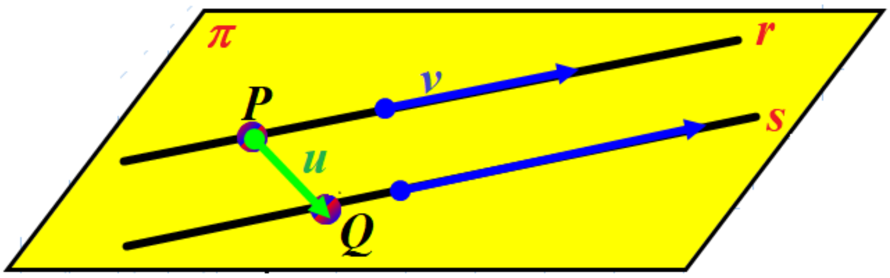
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$$

Las rectas son paralelas o coincidentes. Para decidir en que caso estamos vemos si la recta $r \equiv x = y+1 = \frac{z-2}{2}$ pasa por el punto $Q_s(0,3,3)$

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv x = y+1 = \frac{z-2}{2} \\ ¿Q_s(0,3,3) \in r? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0 = 3+1 = \frac{3-2}{2}?$$ ¡¡No es cierto!!

Las rectas *r* y *s* tienen la misma dirección, pero no pasan por los mismos puntos, luego son paralelas.

b) Para hallar la ecuación del plano π que contiene a ambas rectas tomamos como vectores directores del plano el vector director de *r* y el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$.



$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,3,3)-(0,-1,2) = (0,4,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,2) \\ P_r(0,-1,2) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + y + 1 - 4z + 8 - x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0}$$

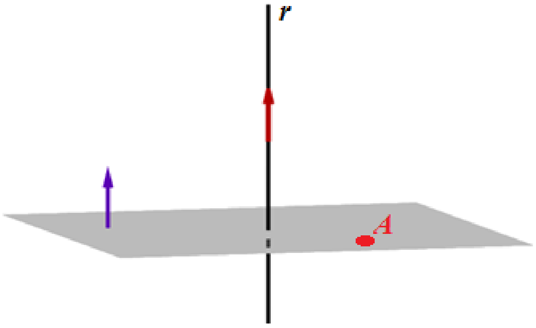
E4.- (Geometría)

Dada la recta $r \equiv x-1=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

a) Calcular el plano π_1 que pasa por A = (1,2,3) y es perpendicular a la recta *r*. **(0,5 puntos)**

b) Calcular el plano π_2 que pasa por B = (–1,1,–1) y contiene a la recta *r*. **(1,5 puntos)**

a) El plano π_1 perpendicular a la recta *r* tendrá como vector normal el director de la recta.

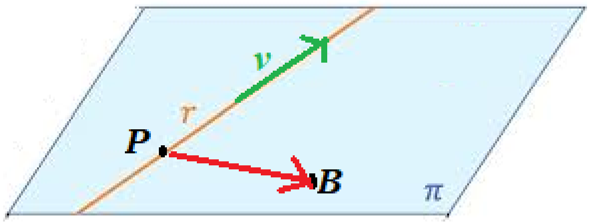


$$r \equiv x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow \vec{v_r}=(1,-1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n_1}=\vec{v_r}=(1,-1,2)\\ A(1,2,3)\in\pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-y+2z+D=0\\ A(1,2,3)\in\pi_1\end{array}\right\} \Rightarrow 1-2+6+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x-y+2z-5=0}$$

b) El plano π_2 que contiene a la recta *r* tendrá como uno de sus vectores directores el director de la recta. El otro vector director del plano puede ser el vector que une un punto cualquiera de la recta con el punto B.



$$r \equiv x-1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}P_r(1,2,1)\\ \vec{v_r}=(1,-1,2)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{P_rB}=(-1,1,-1)-(1,2,1)=(-2,-1,-2)\\ \vec{v}=\vec{v_r}=(1,-1,2)\\ B(-1,1,-1)\in\pi_2\end{array}\right\} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z+1\\ -2 & -1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-\cancel{2}-2y+\cancel{2}+2z+\cancel{2}+z+1+4y-4-2x-\cancel{2}=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv -4x+2y+3z-3=0}$$

E5.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=x^5-5x-1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión. **(2 puntos)**

Hallamos la derivada e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

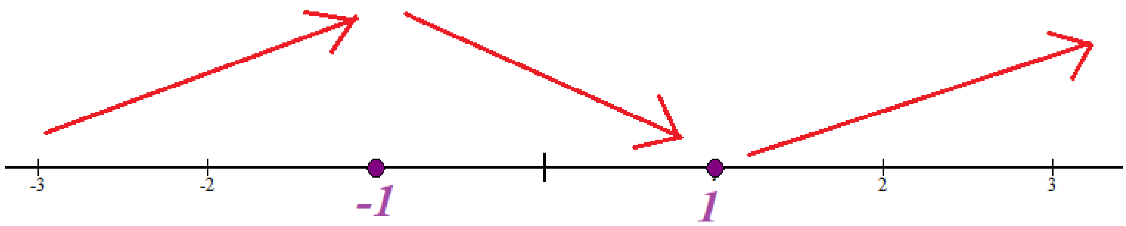
$$f(x)=x^5-5x-1 \Rightarrow f'(x)=5x^4-5$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 5x^4-5=0 \Rightarrow x^4-1=0 \Rightarrow x^4=1 \Rightarrow x=\sqrt[4]{1}=\pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-1$ y $x=1$.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=80-5=75>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=-5<0$. La función decrece en $(-1,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=80-5=75>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

La función tiene un máximo relativo en $x=-1$. Como $f(-1)=(-1)^5-5(-1)-1=3$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1, 3).
La función tiene un mínimo relativo en $x=1$. Como $f(1)=1^5-5-1=-5$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1,–5).

Para el estudio de la concavidad y convexidad utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x)=5x^4-5 \Rightarrow f''(x)=20x^3$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 20x^3=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x=0$.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada segunda vale $f''(-1)=20(-1)^3=-20<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada segunda vale $f''(1)=20>0$. La función es convexa (∪) en $(0,+\infty)$

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en $(0,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en $x=0$. Como $f(0)=-1$ las coordenadas del punto de inflexión son (0, –1).

E6.- (Análisis)

Calcular el valor de *m > 0* para el cual se verifica que $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(mx)}{x^2}=2$ **(2 puntos)**

Calculamos el valor del límite y lo igualamos a 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(mx)}{x^2}=\frac{1-\cos(0)}{0^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{0+msen(mx)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{msen(mx)}{2x}=\frac{msen(0)}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0}\frac{m^2\cos(mx)}{2}=$$

$$=\frac{m^2\cos(0)}{2}=\frac{m^2}{2}$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(mx)}{x^2}=2\Rightarrow\frac{m^2}{2}=2\Rightarrow m^2=4\Rightarrow\boxed{m=\sqrt{4}=\pm 2}$

Como *m > 0* el valor de *m* que verifica lo pedido es solo *m = 2*.

E7.- (Análisis)

a) Estudiar la continuidad de la función definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x}, & si \;\; x\neq 0\\ 0 & , \; si \;\; x=0\end{cases}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int x\ln\left(x^2\right)dx$. **(1 punto)**

a) En $x \neq 0$ la función es continua pues es cociente de funciones continuas y el denominador solo se anula para $x = 0$.
Solo falta comprobar la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos 0^-}{0^-}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{1}=0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}=\frac{1-\cos 0^+}{0^+}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{1}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

La función es continua en $x = 0$ y por tanto es continua en $\mathbb{R}$

b)

$$\int x\ln\left(x^2\right)dx=\int 2x\ln|x|dx=2\int x\ln|x|dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln|x|\to du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=xdx\to v=\int xdx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right\}=$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}\ln|x|-\int\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\frac{1}{\cancel{x}}dx\right]=2\left[\frac{x^2}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\int xdx\right]=2\left[\frac{x^2}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]=\boxed{x^2\ln|x|-\frac{x^2}{2}+K}$$

E8.- (Análisis)
Se considera la función $f(x) = x - \cos(x)$.

a) Demostrar que la ecuación *f(x) = 0* tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$.

(1 punto)

b) Probar que la ecuación *f(x) = 0* solo puede tener una solución en el intervalo $[0, \pi/2]$, de modo que la solución del apartado anterior es la única. **(1 punto)**

a) La función es continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto es continua en $[0, \pi/2]$, como además se tiene que $f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ aplicando el teorema de Bolzano se puede asegurar que existe $c \in (0, \pi/2)$ tal que *f(c) = 0*.

b) Si existiera otro valor $d \in (0, \pi/2)$ tal que *f(d) = 0* como la función es continua en $[0, \pi/2]$ y también es derivable en $(0, \pi/2)$ y además *f(c) = f(d) = 0* aplicando el teorema de Rolle debe existir un valor *e* comprendido en el intervalo *(c, d)* o *(d, c)* tal que *f ´(e) = 0*.

Pero la derivada de $f(x) = x - \cos(x)$ es $f\,'(x) = 1 + sen(x)$ y esta expresión de la derivada es siempre positiva en el intervalo $[0, \pi/2]$, pues el seno es positivo entre 0º y 90 º.

Obtenemos una contradicción y la suposición inicial no es cierta, es decir, no existe un segundo valor en el intervalo $(0, \pi/2)$ para el que se anule la función $f(x) = x - \cos(x)$.

E9- (Probabilidad y estadística)
Dentro de una caja hay bolas de varios colores que tienen todas el mismo tamaño y aspecto, siendo algunas de madera y las otras de metacrilato. Concretamente:
• El 48% son blancas y entre ellas dos tercios son de madera.
• El 24% son rojas, y de ellas las tres cuartas partes son de madera.
• El 28% son verdes, de las cuales la mitad son de madera.
Considerando los sucesos: B = “ser blanca”, R = "ser roja", V= "ser verde" y M = "ser de madera"
a) Indicar cuales son los valores de $P(M/B)$, $P(M/R)$ y $P(M/V)$. **(0’3 puntos)**
b) Calcular la probabilidad de que al sacar al azar una de las bolas de la caja, sea de madera. **(0’7 puntos)**
c) Si solo sabemos que una de las bolas de la caja, elegida al azar, es de madera, ¿cual es la probabilidad de que sea blanca? **(1 punto)**

Tenemos que P(B) = 0.48, P(R) = 0.24 y P(V) = 0.28.

a) $P(M/B) = 2/3 = 0.66$
$P(M/R) = 3/4 = 0.75$
$P(M/V) = 1/2 = 0.5$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M) = P(B)P(M/B) + P(R)P(M/R) + P(V)P(M/V) =$$

$$= 0.48 \cdot \frac{2}{3} + 0.24 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{0.64}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M) = \frac{P(B \cap M)}{P(M)} = \frac{P(B)P(M/B)}{P(M)} = \frac{0.48 \cdot \frac{2}{3}}{0.64} = \boxed{0.5}$$

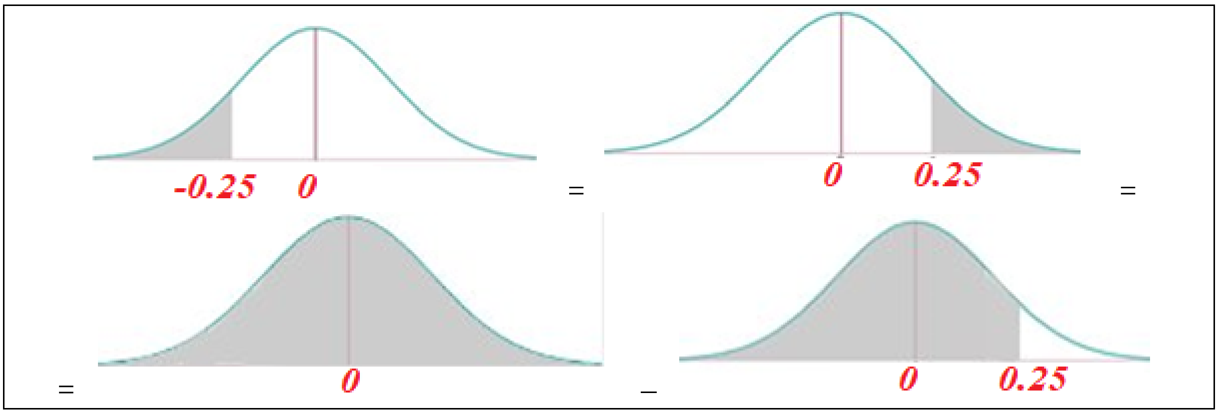
E10.- (Probabilidad y estadística)
Se sabe que el coeficiente intelectual de la población adulta española sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20.
a) ¿Qué porcentaje de españoles adultos se espera que tengan un coeficiente intelectual entre 95 y 105? **(1 punto)**
b) Si se considera que una persona es superdotada cuando su coeficiente intelectual es mayor que 160, calcular el porcentaje de españoles adultos que son superdotados. **(1 punto)**

X = El coeficiente intelectual de un español adulto.
X = N(100, 20).

a)

$$P(95 < X < 105) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{95-100}{20} < Z < \frac{105-100}{20}\right) =$$

$$= P(-0.25 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - P(Z < -0.25) = P(Z < 0.25) - P(Z > 0.25) = \ldots$$



$$= P(Z < 0.25) - (1 - P(Z < 0.25)) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0,1)}\} = 0.5987 - (1 - 0.5987) =$$

$$= 0.1974 = \boxed{19.74\,\%}$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	[illegible]
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	[illegible]
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5987	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	[illegible]

b)

$$P(X>160)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{160-100}{20}\right)=$$

$$=P(Z>3)=1-P(Z\le 3)=$$

$$=\{\text{Miramos en la tabla}\}=1-0.9987=0.0013=\boxed{0.13\,\%}$$

	0.00	0.0
0.0	0.5000	0.50
0.1	0.5398	0.54
0.2	0.5793	0.58
0.3	0.6179	0.62
0.4	0.6554	0.65
0.5	0.6915	0.69
0.6	0.7257	0.72
0.7	0.7580	0.76
0.8	0.7881	0.79
0.9	0.8159	0.81
1.0	0.8413	0.84
1.1	0.8643	0.86
1.2	0.8849	0.88
1.3	0.9032	0.90
1.4	0.9192	0.92
1.5	0.9332	0.93
1.6	0.9452	0.94
1.7	0.9554	0.95
1.8	0.9641	0.96
1.9	0.9713	0.97
2.0	0.9772	0.97
2.1	0.9821	0.98
2.2	0.9861	0.98
2.3	0.9893	0.98
2.4	0.9918	0.99
2.5	0.9938	0.99
2.6	0.9953	0.99
2.7	0.9965	0.99
2.8	0.9974	0.99
2.9	0.9981	0.99
3.0	0.9987	0.99
3.1	0.9990	0.99