Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.
b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+3I=A$.

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x+ay+z=2\\ x \quad +z=a\\ ax+2y+z=3\end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a=2$, si es posible.

3. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x\cdot\cos(3x)\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

4. Sean los planos $\pi_1\equiv a\cdot x+y+2\cdot z=3$ **y** $\pi_2\equiv 2\cdot x-y+a\cdot z=0$

a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.
b) **[1,5 puntos]** Para $a = 1$ calcula la distancia del punto P(2, 0, 1) al plano π_1.

5. a) Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si\ \ x<0\\ \dfrac{1}{x-1} & si\ \ 0\le x\le 2\\ x & si\ \ x>2\end{cases}$$

Estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

6. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función *f(x)* y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*:

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f\left(x\right)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+x-1$, con $a,b\in\mathbb{R}$. Determina los valores de *a* y *b* para que la gráfica de *f(x)* pase por el punto (1, 1) y tenga aquí un punto de inflexión.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x)=xsen\left(x\right)-\cos\left(x\right)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función *f(x)* tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [–1, 1].

8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20% de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60% de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90% de pacientes leves y un 10% de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

SOLUCIONES

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ e } I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.
b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX+3I=A$.

a) Comprobamos que existe la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}3&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0+0+2-0-1-3=-2\neq 0 \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&1&0\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&0\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&1\\2&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&3&-1\\1&-3&-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-3/2&1/2\\-1/2&3/2&1/2\end{pmatrix}}$$

b) Como existe la inversa de A despejamos X en la ecuación matricial $AX+3I=A$

$$AX+3I=A\Rightarrow AX=A-3I\Rightarrow X=A^{-1}\left(A-3I\right)=A^{-1}A-3A^{-1}\Rightarrow X=I-3A^{-1}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1/2\\1/2&-3/2&1/2\\-1/2&3/2&1/2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1-3/2&3/2&3/2\\-3/2&1+9/2&-3/2\\3/2&-9/2&1-3/2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1/2&3/2&3/2\\-3/2&11/2&-3/2\\3/2&-9/2&-1/2\end{pmatrix}}$$

2. a) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ x \quad\quad + z = a \\ ax + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + a^2 + 2 - 0 - a - 2 = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ o \\ a = 1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0 \text{ y } a \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (solución única).

CASO 2. $a = 0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz A/B en una matriz triangular equivalente para establecer el rango de A y de A/B.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila 2ª} - \text{Fila 1ª}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila 2ª}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Intercambio Fila 2ª} \\ \text{con Fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Transformamos la matriz A/B en una matriz triangular equivalente y establecer el rango de A y de A/B.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&0&1&1\\1&2&1&3\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }2^a-\text{Fila }1^a}\\1&0&1&1\\-1&-1&-1&-2\\\hline 0&-1&0&-1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-\text{Fila }1^a}\\1&2&1&3\\-1&-1&-1&-2\\\hline 0&1&0&1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&0&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a+\text{Fila }2^a}\\0&1&0&1\\0&-1&0&-1\\\hline 0&0&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 2. Son iguales los rangos, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Resolvemos para $a = 2$ que, por lo visto, es un sistema con una única solución.

El sistema queda $\begin{cases}x+2y+z=2\\x\qquad +z=2\\2x+2y+z=3\end{cases}$

Obtenemos la solución con el método de Cramer.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}=4+2-2-2=2$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&2&1\\2&0&1\\3&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}=\frac{6+4-4-4}{2}=1 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&2&1\\2&3&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}=\frac{2+4+3-4-2-3}{2}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&2\\1&0&2\\2&2&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}=\frac{8+4-6-4}{2}=1$$

La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

3. a) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int x \cdot \cos(3x)\,dx$.

b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\int \frac{dx}{2x^2+1}$

a)

$$\int x\cdot\cos(3x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=3x \to dt=3dx\\ dx=\dfrac{dt}{3}\\ x=\dfrac{t}{3}\end{array}\right\} = \int \frac{t}{3}\cdot\cos(t)\frac{dt}{3} = \frac{1}{9}\int t\cos(t)\,dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ u=t \Rightarrow du=dt\\ dv=\cos(t) \to v=\int\cos(t)\,dt = sen(t)\end{array}\right\} = \frac{1}{9}\left[t\cdot sen(t) - \int sen(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\left[t\cdot sen(t) - (-\cos(t))\right] = \frac{1}{9}\left[t\cdot sen(t)+\cos(t)\right] = \left\{\begin{array}{c}\text{Deshacemos el cambio}\\ t=3x\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{9}\left[3x\cdot sen(3x)+\cos(3x)\right]+K = \boxed{\frac{x}{3}sen(3x)+\frac{1}{9}\cos(3x)+K}$$

b)

$$\int\frac{dx}{2x^2+1} = \int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}x\right)^2+1} = \left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{2}x=t\\ \sqrt{2}dx=dt \to dx=\dfrac{dt}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} = \int\frac{\frac{dt}{\sqrt{2}}}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}arctg(t) = \left\{\begin{array}{l}\textit{Deshacemos el cambio de variable}\\ \sqrt{2}x=t\end{array}\right\} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\sqrt{2}x\right)+K}$$

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ **y** $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$

a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de *a* para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

b) **[1,5 puntos]** Para *a = 1* calcula la distancia del punto P(2, 0, 1) al plano π_1.

a) Para que los planos sean perpendiculares sus vectores normales deben formar un ángulo de 90º, por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3 \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (a,1,2) \\ \pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0 \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (2,-1,a) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (a,1,2)(2,-1,a) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a - 1 + 2a = 0 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$$

b) Para *a = 1* el plano π_1 queda $\pi_1 \equiv x + y + 2\,z = 3$. Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + 2\,z - 3 = 0 \\ P(2,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi_1) = \frac{|2+0+2-3|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408\,u}$$

5. a) Calcula razonadamente el siguiente límite $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}$.

b) Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} e^x & si \;\; x<0 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \;\; 0\le x\le 2 \\ x & si \;\; x>2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad en *x = 0* y en *x = 2* e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{e^{x-1}-1}=\frac{1-1}{e^{1-1}-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{e^{x-1}}=\frac{1}{e^{1-1}}=\boxed{1}$$

b) Estudiamos la continuidad en *x = 0* .

Para ser continua debe cumplirse $f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{1}{0-1}=-1 \\ \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^x=e^0=1 \\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=-1\neq 1=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

En *x = 0* la función es discontinua inevitable de salto finito.

Estudiamos la continuidad en *x = 2* .

Para ser continua debe cumplirse $f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{1}{2-1}=1 \\ \lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-1}=1 \\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x=2 \end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=1\neq 2=\lim_{x\to 2^+}f(x)$$

En *x = 2* la función es discontinua inevitable de salto finito.

6. Sea la función $f(x)=\frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función *f(x)* y clasifícalos.

b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*:

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2+2x-2}{3x^2+3} \Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+2)(3x^2+3)-6x(2x^2+2x-2)}{(3x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{12x^3}+12x+6x^2+6\cancel{-12x^3}-12x^2+12x}{(3x^2+3)^2}=\frac{-6x^2+24x+6}{(3x^2+3)^2}$$

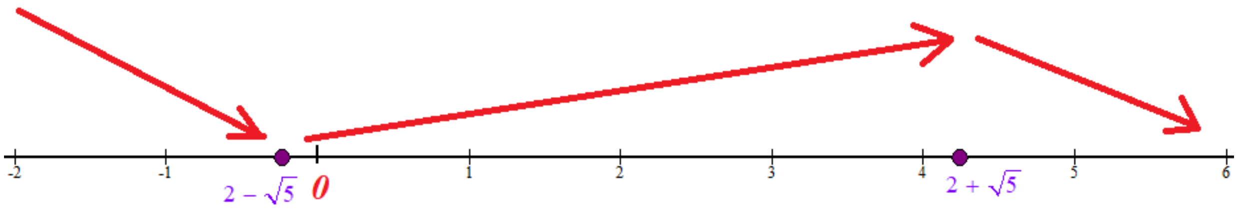
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-6x^2+24x+6}{(3x^2+3)^2}=0 \Rightarrow -6x^2+24x+6=0 \Rightarrow x^2-4x-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(-1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{5}}{2}=2\pm\sqrt{5}=\begin{cases}2+\sqrt{5}\\ o\\ 2-\sqrt{5}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $\left(-\infty,2-\sqrt{5}\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale
  $f'(-1)=\frac{-6(-1)^2+24(-1)+6}{\left(3(-1)^2+3\right)^2}=\frac{-24}{+}<0$. La función decrece en $\left(-\infty,2-\sqrt{5}\right)$
- En $\left(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{0+0+6}{(0+3)^2}=\frac{6}{9}>0$. La función crece en $\left(2-\sqrt{5},2+\sqrt{5}\right)$
- En $\left(2+\sqrt{5},+\infty\right)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale
  $f'(10)=\frac{-6(10)^2+240+6}{\left(3(10)^2+3\right)^2}=\frac{-354}{+}<0$. La función decrece en $\left(2+\sqrt{5},+\infty\right)$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula y sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo en $x = 2-\sqrt{5}$

Como $f\left(2-\sqrt{5}\right) = \dfrac{2\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(2-\sqrt{5}\right) - 2}{3\left(2-\sqrt{5}\right)^2 + 3} = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ las coordenadas del punto mínimo relativo son $\left(2-\sqrt{5}, -\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$

La función presenta un máximo en $x = 2+\sqrt{5}$

Como $f\left(2+\sqrt{5}\right) = \dfrac{2\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + 2\left(2+\sqrt{5}\right) - 2}{3\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + 3} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ las coordenadas del punto máximo relativo son $\left(2+\sqrt{5}, \dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$

b) En $x = 1$ la recta tangente tiene ecuación $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{2+2-2}{3+3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ f'(1) = \dfrac{-6+24+6}{(3+3)^2} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3} \\ y - f(1) = f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene ecuación $y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$

En $x = 1$ la recta normal tiene ecuación $y - f(1) = -\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{1}{3} \\ f'(1) = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{3}{2} \\ y - f(1) = -\dfrac{1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{6}}$$

La recta normal en $x = 1$ tiene ecuación $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{6}$

7. a) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de *a* y *b* para que la gráfica de *f(x)* pase por el punto (1, 1) y tenga aquí un punto de inflexión.

b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x sen(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función *f(x)* tiene al menos un extremo relativo en el intervalo [–1, 1].

a) Debe ser *f(1) = 1* por lo que $f(1) = 1 = a\cdot 1^3 + b\cdot 1^2 + 1 - 1 \Rightarrow \boxed{1 = a + b}$.

Además, al tener un punto de inflexión en *x = 1* la derivada segunda debe anularse en *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 3a\cdot x^2 + 2b\cdot x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6a\cdot x + 2b \\ f''(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 6a\cdot 1 + 2b \Rightarrow$$

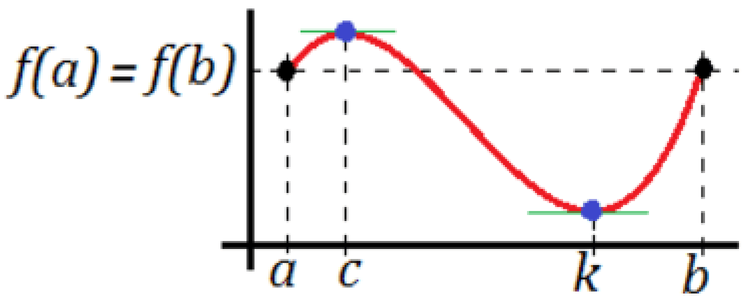
$$\Rightarrow 0 = 6a + 2b \Rightarrow \boxed{3a + b = 0}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 1 - a \\ 3a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a + 1 - a = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}}$$

Los valores buscados son $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$.

b) El teorema de Rolle afirma que si una función *f(x)* es continua en [a, b] y derivable en (a, b) si además *f(a) = f(b)* entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que *f ´(c) = 0.*



La función $f(x) = x sen(x) - \cos(x)$ es una función continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto lo es en el intervalo [–1, 1]. También es derivable en $\mathbb{R}$ y lo será en $(-1, 1)$ como se cumple que

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = (-1)sen(-1) - \cos(-1) = -sen(-1) - \cos(-1) = 0.3011 \\ f(1) = sen(1) - \cos(1) = 0.3011 \\ sen(-1) = -sen(1) = 0.8414 \\ \cos(-1) = \cos(1) = 0.54 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-1) = f(1)$$

Aplicando el teorema de Rolle existe $c \in (-1,1)$ tal que *f ´(c) = 0*. En *x = c* hay un punto crítico.

Es un extremo relativo, pues la derivada segunda no se anula para *x = c*.

$$f(x) = xsen(x) - \cos(x) \Rightarrow f\,'(x) = sen(x) + x\cos(x) + sen(x) = 2sen(x) + xcos(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,''(x) = 2\cos(x) + cosx - xsen(x) = 3\cos(x) - xsen(x)$$

$$Como\ f\,'(c) = 0 \Rightarrow 2sen(c) + c\cdot\cos(c) = 0 \Rightarrow sen(c) = -\frac{c\cdot\cos(c)}{2}$$

$$f\,''(c) = 3\cos(c) - c\cdot sen(c) = 3\cos(c) - c\cdot\left(-\frac{c\cdot\cos(c)}{2}\right) = 3\cos(c) + \frac{c^2\cdot\cos(c)}{2}$$

$$f\,''(c) = \cos(c)\left[3 + \frac{c^2}{2}\right]$$

Esta expresión de $f\,''(c)$ es positiva, pues $c \in (-1,1)$ y el coseno siempre es positivo en este intervalo pues el intervalo está contenido en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left[3 + \frac{c^2}{2}\right]$ es siempre positivo.

8. a) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20% de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60% de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90% de pacientes leves y un 10% de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

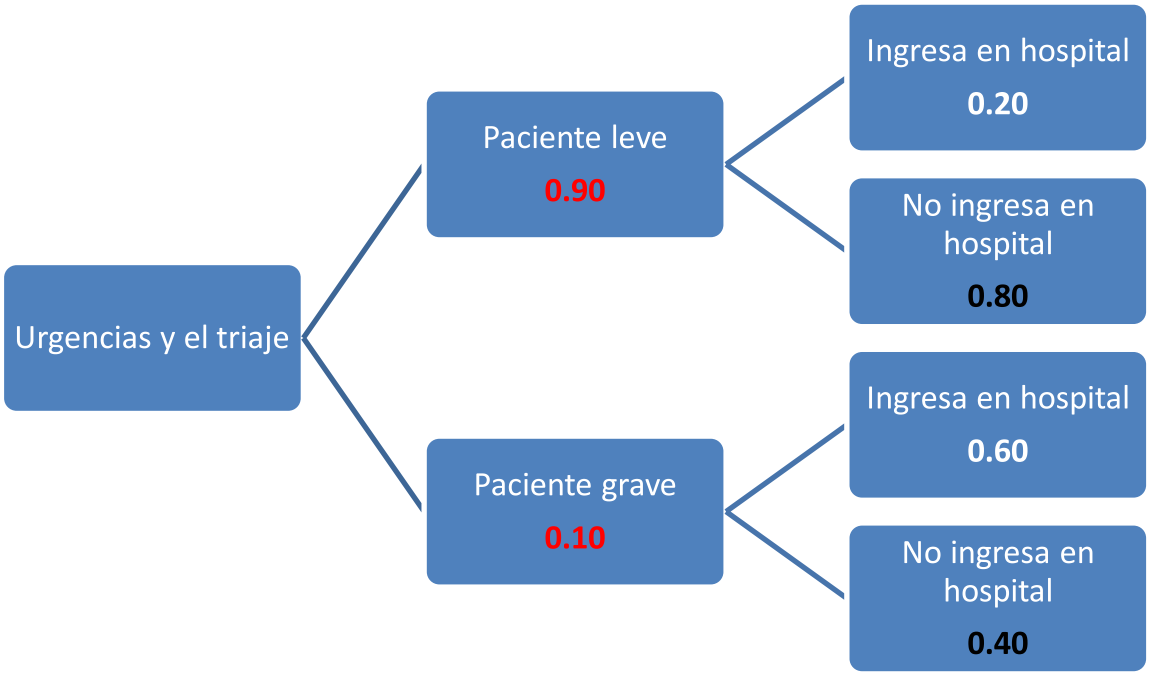
a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?
a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

a) Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos L = "Ser paciente leve", $\overline{L}$ = "ser paciente grave"

Llamamos I = "Ingresar en el hospital". $\overline{I}$ ="No ingresar en hospital"

a.1) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y la información recogida en el diagrama de árbol.

$$P(I)=P(L)P(I/L)+P(\overline{L})P(I/\overline{L})=0.9\cdot 0.2+0.1\cdot 0.6=\boxed{0.24}$$

a.2) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(L/I)=\frac{P(L\cap I)}{P(I)}=\frac{P(L)P(I/L)}{P(I)}=\frac{0.9\cdot 0.2}{0.24}=\boxed{\frac{3}{4}=0.75}$$

b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de pacientes que se clasifican como leves de 8 que llegan a urgencias.
Número de repeticiones = n = 8. Probabilidad de clasificar a un paciente como leve = p = 0.9
X= B(8, 0.9)

b.1) $P(X=4)=\{\text{Miramos en la tabla facilitada}\}=\boxed{0.0046}$

b.2) Como la probabilidad directa implica contemplar muchos casos favorables, lo haremos usando el suceso contrario que implica un cálculo más cómodo.

$$P(X\le 7)=1-P(X>7)=1-P(X=8)=$$
$$=\{\text{Miramos en la tabla facilitada}\}=1-0.4305=\boxed{0.5695}$$

n	k \ p	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
8	0	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	[illegible]
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	[illegible]	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	[illegible]
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.4305